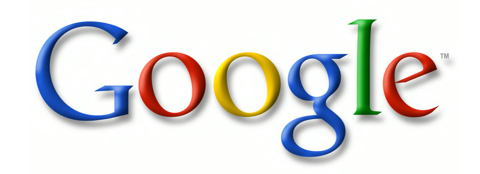
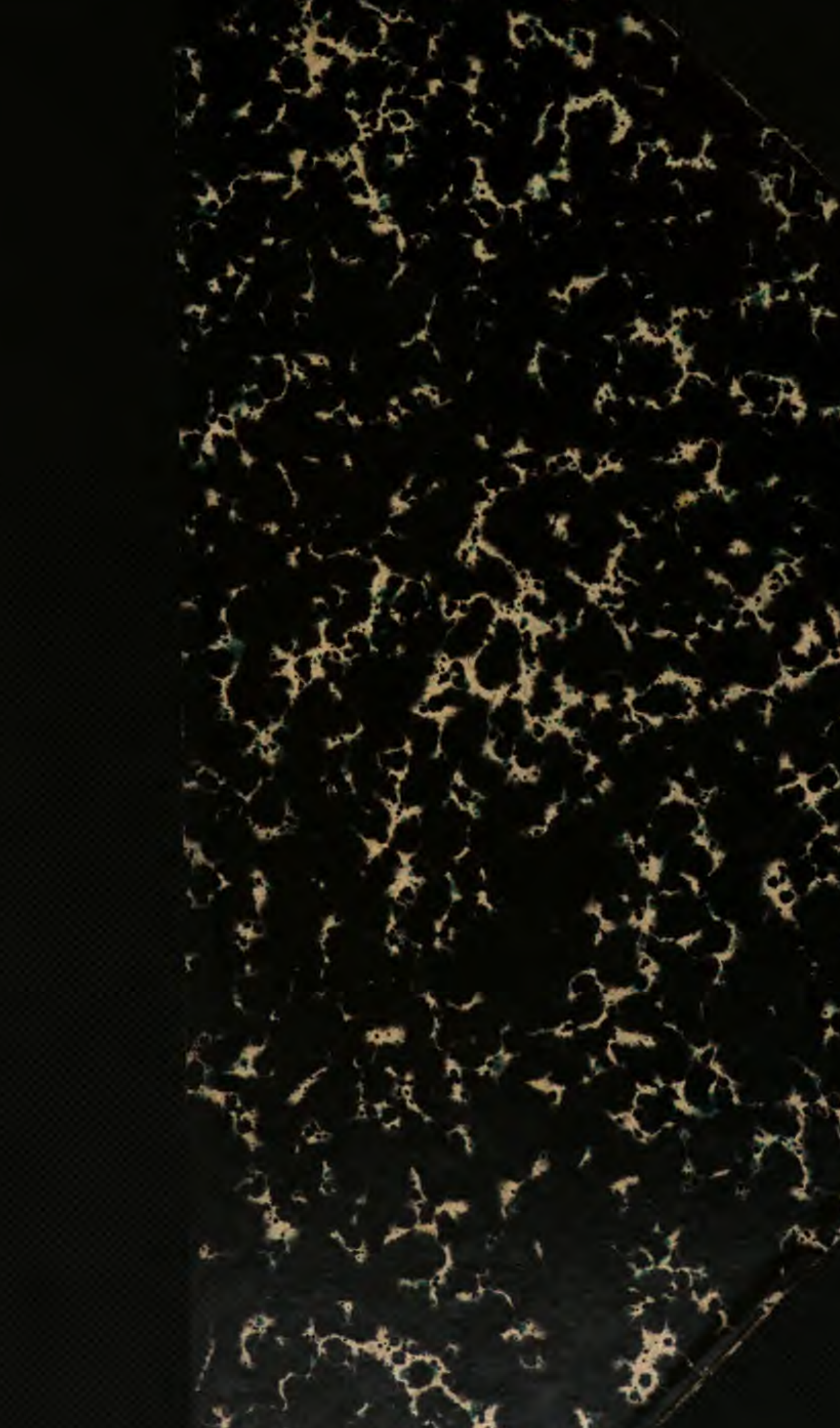
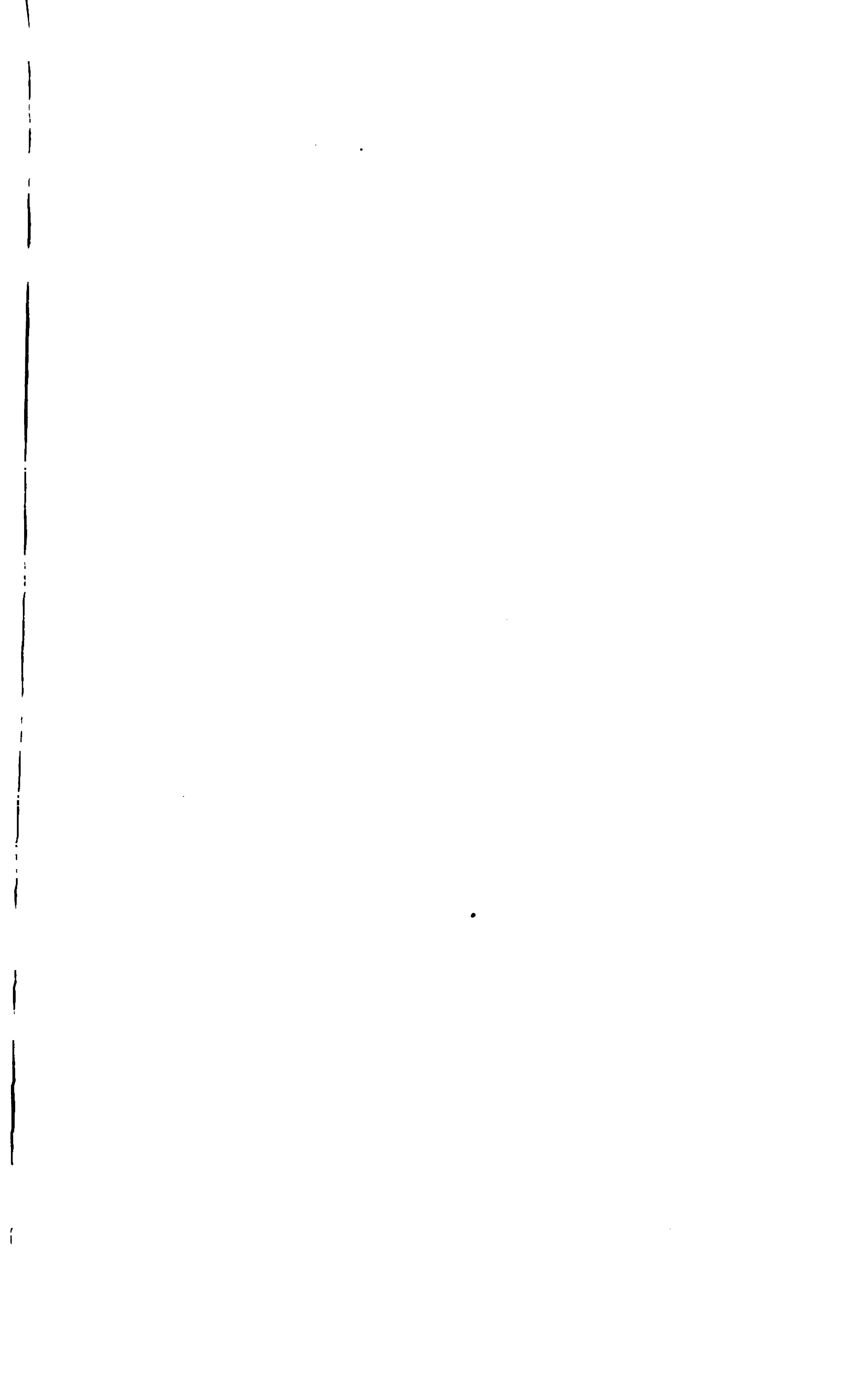
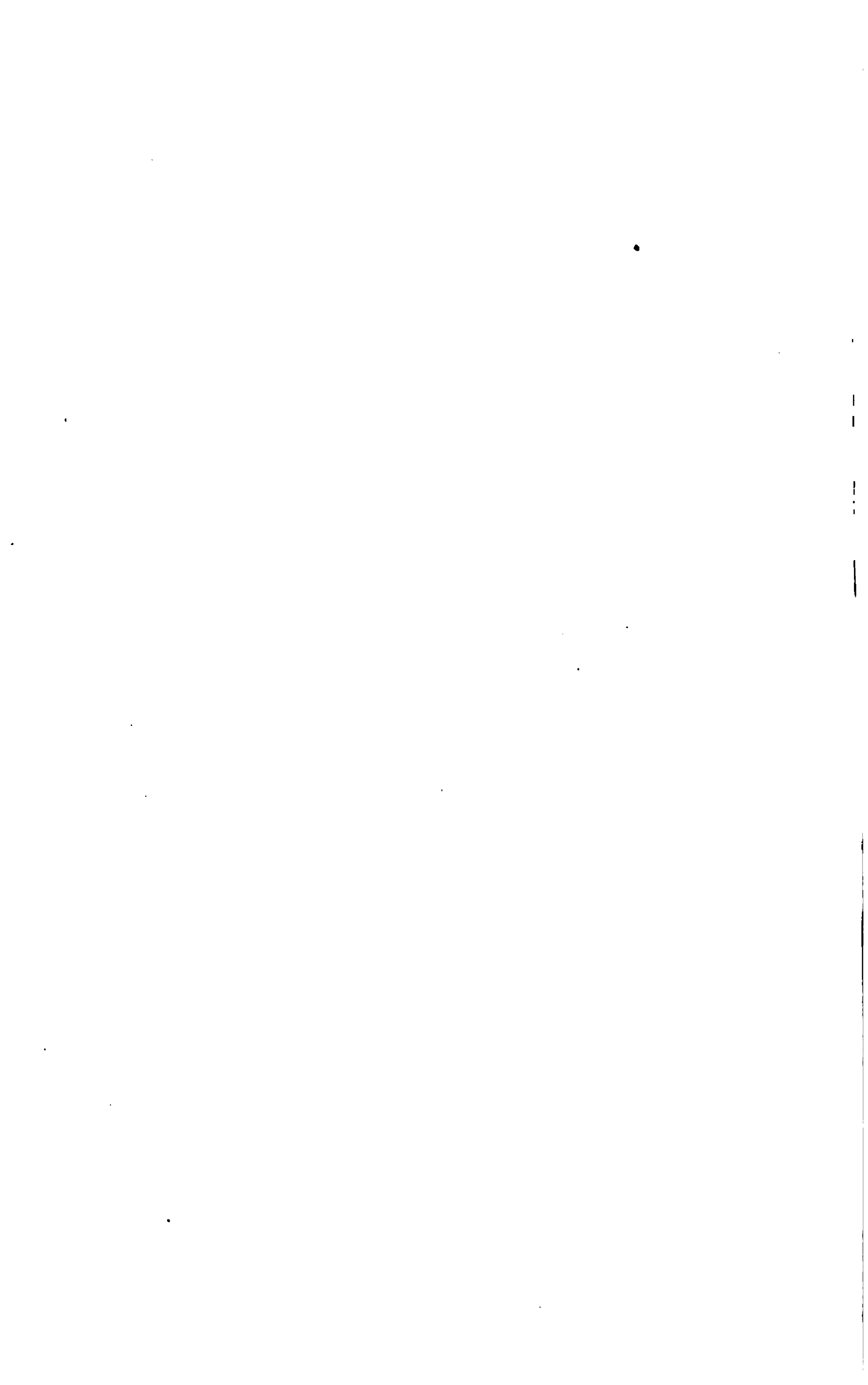





SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS







SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

HUNDERTSECHZEHNTER BAND.

WIEN, 1907.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN KOMMISSION BEI ALFRED HÖLDER,

K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN KLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

CXVI. BAND. ABTEILUNG II a.

JAHRGANG 1907. — HEFT V BIS X.

ZWEITER HALBBAND.

(MIT 10 TAFELN UND 49 TEXTFIGUREN.)

WIEN, 1907.

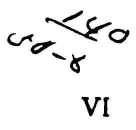
AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN KOMMISSION BEI ALFRED HÖLDER,

K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT.



SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVI. BAND. V. HEFT.

JAHRGANG 1907. — MAI.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 1 TAFEL UND 4 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1907.
AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN KOMMISSION BEI ALFRED HÖLDER,
K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER.
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.



INHALT

des 5. Heftes, Mai 1907, des CXVI. Bandes, Abteilung IIa, der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Klasse.

Preis des ganzen Heftes: 2 K 60 h — 2 M 60 pf.

SITZUNGSBERICHTE

DER

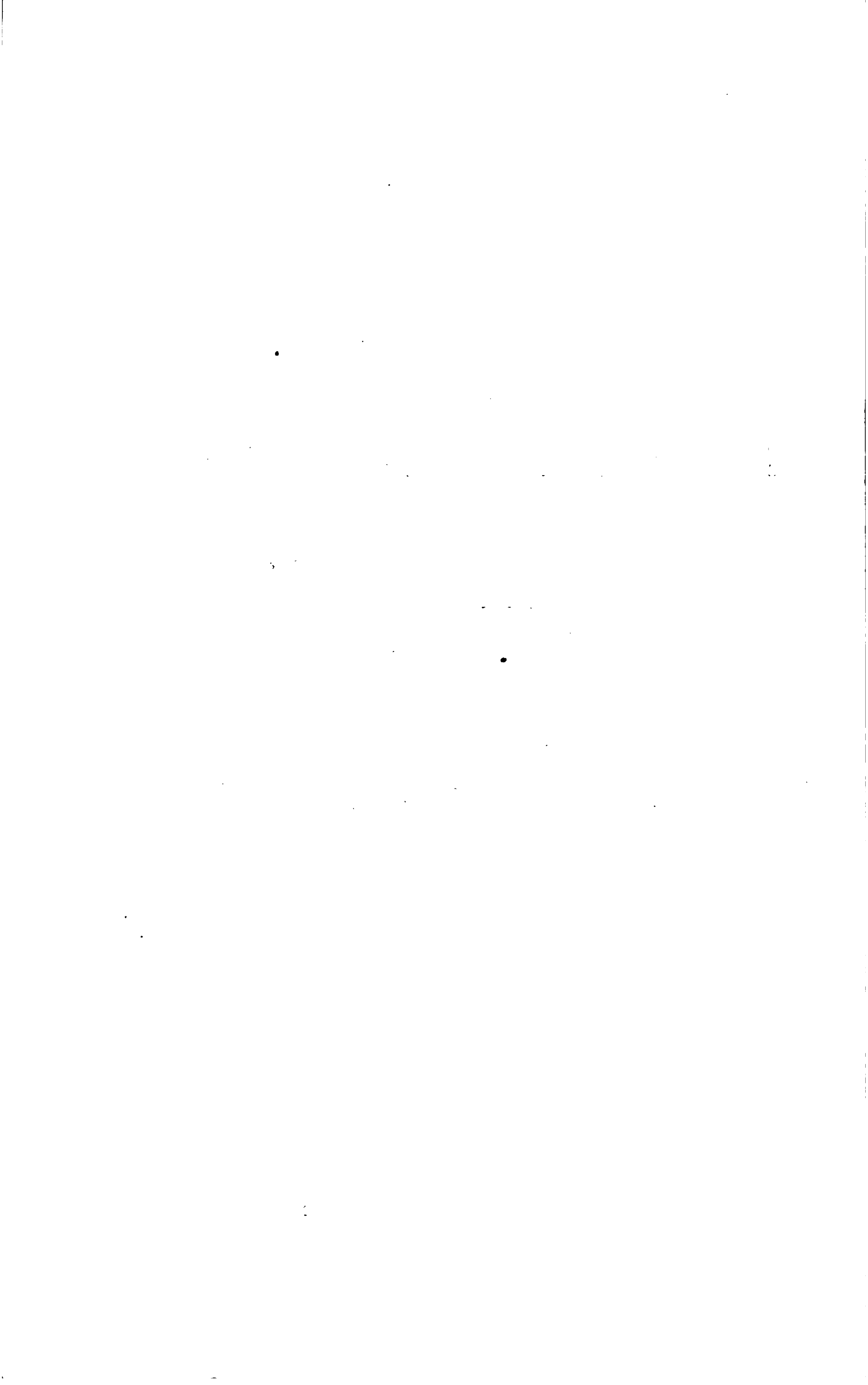
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVI. BAND. V. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



Über die Anzahl inkongruenter Werte, die eine ganze Funktion dritten Grades annimmt,

von

Dr. R. Daublebsky v. Sterneck,

Professor der Mathematik an der Universität Graz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Juni 1907.)

Es gelingt auf vollkommen elementarem Wege, die Anzahl der inkongruenten Werte zu bestimmen, die die allgemeine Funktion dritten und spezielle Funktionen vierten Grades annehmen, wenn die Variable die sämtlichen Elemente eines vollständigen Restsystems bezüglich eines gegebenen Primzahlmoduls p, den wir größer als 3 voraussetzen, durchläuft. Dies soll in der folgenden kurzen Mitteilung gezeigt werden.

I.

Wir betrachten die allgemeine Funktion dritten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten

$$f(x) = Ax^3+Bx^2+Cx+D.$$

Ist A durch p teilbar, so liegt der einfachere Fall einer quadratischen Funktion vor, der sich unmittelbar erledigen läßt; denn Bx^2+Cx+D durchläuft, wenn B nicht durch p teilbar ist, jede Restklasse, von einer einzigen abgesehen, zweimal; soll nämlich für zwei inkongruente Werte x und y

$$Bx^2+Cx+D \equiv By^2+Cy+D \pmod p$$

sein, so muß

$$B(x+y)+C \equiv 0 \pmod p$$

sein; so daß zu jedem Wert x ein bestimmter, im allgemeinen von ihm verschiedener Wert y gehört; nur zu dem Werte x, der der Kongruenz

$$2Bx+C \equiv 0 \pmod p$$

genügt, gehört kein inkongruenter Wert y. Die Gesamtzahl der inkongruenten Werte, die eine Funktion zweiten Grades annimmt, beträgt daher (bei durch p unteilbarem B) $\frac{p+1}{2}$; bei teilbarem B aber, wo wir den Fall einer linearen Funktion vor uns haben, offenbar p oder 1, je nachdem C durch p unteilbar oder teilbar ist.

Nunmehr setzen wir voraus, daß A nicht durch p teilbar ist. Indem wir zunächst die Funktion mit A', das der Kongruenz

$$AA' \equiv 1 \pmod{p}$$

genügt, multiplizieren, dann durch eine Substitution $x = y + h$ das quadratische Glied zum Verschwinden bringen, endlich von der für unser Problem unwesentlichen Konstanten absehen, erkennen wir, daß wir nur die speziellere Funktion

$$f(x) = x^3 - \alpha x$$

zu untersuchen brauchen, wo α irgend eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

Zwei inkongruente Werte x und y, für welche

$$f(x) \equiv f(y) \pmod{p}$$

sein soll, erfüllen dann die Kongruenz

$$x^3 - y^3 - \alpha(x - y) \equiv 0 \pmod{p}$$

oder

$$x^2 + xy + y^2 - \alpha \equiv 0 \pmod{p},$$

die sich nach Multiplikation mit 4 in eine der folgenden:

$$(2x + y)^2 \equiv 4\alpha - 3y^2 \pmod{p},$$

respektive

$$(2y + x)^2 \equiv 4\alpha - 3x^2 \pmod{p}$$

verwandelt. Zwei Werte x und y, die zu kongruenten Funktionswerten führen, wollen wir des kürzeren Ausdruckes halber als konjugiert bezeichnen. Zu einem bestimmten x sind entweder zwei oder ein oder gar kein Wert y konjugiert; es wird also $f(x)$, wenn x ein volles Restsystem durchläuft, einige Werte dreimal, andere zweimal, andere nur einmal annehmen; die Anzahl dieser Werte werde bezüglich mit T_3, T_2, T_1 bezeichnet.

Wir betrachten zunächst den Fall eines durch p unteilbaren α und bestimmen T_2, d. h. die Anzahl jener Zahlen x im Restsystem, zu denen ein einziger Wert y konjugiert ist. Dies ist vor allem für jene x der Fall, für welche

$$4\alpha-3x^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

ist; denn dann hat die Kongruenz

$$(2y+x)^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

eine und nur eine Wurzel y, die erstens offenbar von x verschieden ist, da sonst x und somit auch α durch p teilbar sein müßte, was gegen die Voraussetzung verstößt.

Zweitens ist der zu x konjugierte Wert y nicht etwa selbst von der Art, daß er gleichfalls die Kongruenz

$$4\alpha-3y^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

der x genügte, befriedigt; denn aus dem Bestehen dieser beiden Kongruenzen könnte man

$$x^2 \equiv y^2 \pmod{p},$$

somit

$$x \equiv -y \pmod{p}$$

und daraus $x \equiv y \equiv 0 \pmod{p}$ folgern, was wieder zu $\alpha \equiv 0 \pmod{p}$ entgegen unserer Voraussetzung führen würde.

Aus diesen beiden Bemerkungen ergibt sich zunächst, daß T_2 mindestens gleich ist der Anzahl der Wurzeln der Kongruenz $4\alpha-3x^2 \equiv 0 \pmod{p}$.

Für alle jene x, die diese Kongruenz nicht erfüllen, hat

$$(2y+x)^2 \equiv 4\alpha-3x^2 \pmod{p}$$

entweder keine oder zwei Wurzeln y; doch kann eventuell von den zwei Wurzeln eine mit x zusammenfallen, was einen weiteren Beitrag zu T_2 liefern würde; es soll abgezählt werden, für wie viele Werte x letzteres der Fall ist.

Die Annahme $y \equiv x \pmod{p}$ führt zur Bedingung

$$12x^2 \equiv 4\alpha \pmod{p},$$

beziehungsweise

$$3x^2 \equiv \alpha \pmod{p};$$

heißt die zweite Wurzel der Kongruenz y', so ist dieses, wie man sofort einsieht, in unserem Falle von y und somit auch von x verschieden; denn es ist

$$2y'+x \equiv -(2y+x) \equiv -3x \pmod{p},$$

somit

$$y' \equiv -2x \pmod{p},$$

woraus die Verschiedenheit von x hervorgeht.

Diese zweite Wurzel y' ist nun aber, wie leicht zu zeigen, von der Art, daß

$$4\alpha - 3y'^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

ist; denn

$$4\alpha - 3y'^2 \equiv 4\alpha - 12x^2 \equiv 4(\alpha - 3x^2) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Wir sehen somit, daß die aus x und y' bestehenden Paare konjugierter Zahlen genau mit den oben besprochenen Paaren übereinstimmen und wir somit keinen weiteren Beitrag zu T_2 erhalten. T_2 ist somit genau gleich der Anzahl der Wurzeln der Kongruenz $4\alpha - 3x^2 \equiv 0 \pmod{p}$; also

$$\text{im Falle } \left(\frac{3\alpha}{p}\right) = +1 \qquad T_2 = 2$$

$$\text{im Falle } \left(\frac{3\alpha}{p}\right) = -1 \qquad T_2 = 0.$$

Um nun auch T_1 und T_3 zu ermitteln, bezeichnen wir mit L_1 und L_2 die Anzahl der Werte x im vollständigen Restsystem (mod p), für welche

$$\left(\frac{4\alpha - 3x^2}{p}\right) = +1, \text{ respektive } = -1$$

ist.

Die in L_1 gezählten Werte x vereinigen sich dann zu je dreien zu einem Tripel konjugierter Werte, nur im Falle $\left(\frac{3\alpha}{p}\right) = +1$ gehen zwei dieser Werte verloren, da sie, wie wir gesehen haben, nur je einen konjugierten Wert besitzen. Es ist daher

$$\text{im Falle } \left(\frac{3\alpha}{p}\right) = +1 \qquad T_3 = \frac{L_1-2}{3}$$

$$\text{im Falle } \left(\frac{3\alpha}{p}\right) = -1 \qquad T_3 = \frac{L_1}{3}.$$

Die Anzahl T_1 fällt in allen Fällen mit L_2 zusammen.

Die Bestimmung von L_1 und L_2 ist einfach; setzt man in $-3x^2$ für x ein vollständiges Restsystem (mod p) ein, so durchläuft es jedenfalls den Wert 0, dann aber entweder jeden Rest oder jeden Nichtrest doppelt, je nachdem ob -3 Rest oder Nichtrest von p ist. Entsprechend dem quadratischen Restcharakter von α durchläuft dann $4\alpha-3x^2$ außer dem Werte α noch (und zwar doppelt) eines der Systeme $r'+r''$, $r'+n''$, $n'+r''$, $n'+n''$, wo ein mit einem Striche versehener Buchstabe ein fixes, ein mit zwei Strichen versehener aber ein variables Element des betreffenden quadratischen Restcharakters bezeichnet. Die Anzahlen, wie oft jedes dieser Systeme einen Rest, beziehungsweise einen Nichtrest durchläuft, habe ich an anderer Stelle[1] angegeben und finde mit Verwendung der dortigen Formeln folgende Werte für L_1 und L_2:

1. $\left(\frac{\alpha}{p}\right) = +1, \quad \left(\frac{-3}{p}\right) = +1$

$$L_1 = \frac{p-4-\left(\frac{-1}{p}\right)}{2}+1, \qquad L_2 = \frac{p-\left(\frac{-1}{p}\right)}{2}$$

2. $\left(\frac{\alpha}{p}\right) = +1, \quad \left(\frac{-3}{p}\right) = -1$

$$L_1 = \frac{p-2+\left(\frac{-1}{p}\right)}{2}+1, \qquad L_2 = \frac{p-2+\left(\frac{-1}{p}\right)}{2}$$

3. $\left(\frac{\alpha}{p}\right) = -1, \quad \left(\frac{-3}{p}\right) = +1$

$$L_1 = \frac{p-2+\left(\frac{-1}{p}\right)}{2}, \qquad L_2 = \frac{p-2+\left(\frac{-1}{p}\right)}{2}+1$$

[1] Über die Kombinationen der Potenzreste einer Primzahl zu bestimmten Summen. Diese Sitzungsber., Bd. 114, Abt. IIa, p. 718 (1905).

4. $\left(\frac{\alpha}{p}\right)=-1,\quad \left(\frac{-3}{p}\right)=-1$

$$L_1=\frac{p-\left(\frac{-1}{p}\right)}{2},\qquad L_2=\frac{p-4-\left(\frac{-1}{p}\right)}{2}+1.$$

Diese Formeln lassen sich durch die einheitlicheren Ausdrücke:

$$L_1=\frac{p-\left(\frac{3\alpha}{p}\right)-1-\left(\frac{-3}{p}\right)}{2},\qquad L_2=\frac{p-\left(\frac{3\alpha}{p}\right)-1+\left(\frac{-3}{p}\right)}{2}.$$

ersetzen, aus denen wir schließlich

$$T_3=\frac{p-\left(\frac{-3}{p}\right)-3\left(\frac{3\alpha}{p}\right)-3}{6}$$

$$T_1=\frac{p+\left(\frac{-3}{p}\right)-\left(\frac{3\alpha}{p}\right)-1}{2}$$

erhalten, wozu wir noch unser obiges Resultat

$$T_2=\left(\frac{3\alpha}{p}\right)+1$$

hinzufügen.

$T_1+T_2+T_3$ stellt die Anzahl sämtlicher inkongruenter Werte der Funktion $x^3-\alpha x$ dar; man findet hiefür:

$$T_1+T_2+T_3=\frac{2p+\left(\frac{-3}{p}\right)}{3}=\left\{\frac{2p}{3}\right\},$$

wenn wir in üblicher Weise mit diesem Symbol die nächste an $\frac{2p}{3}$ gelegene ganze Zahl bezeichnen. Wir haben somit den Satz:

Die Funktion $x^3-\alpha x$ nimmt, sobald α nicht durch p teilbar ist, im ganzen $\left\{\frac{2p}{3}\right\}$ inkongruente Werte an, wenn x ein vollständiges Restsystem (mod p) durchläuft.

Der Fall $\alpha \equiv 0 \pmod p$ führt zur Funktion x^3, die offenbar entweder p oder $\frac{p-1}{3}+1$, d. i. $\frac{p+2}{3}$ Werte annimmt, je nachdem p die Form $3n-1$ oder $3n+1$ besitzt.

Die allgemeine Funktion dritten Grades

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D,$$

in welcher wir A als nicht durch p teilbar voraussetzen, nimmt gleichfalls entweder $\left\{\frac{2p}{3}\right\}$ oder p oder $\frac{p+2}{3}$ inkongruente Werte an, ersteres in dem Falle, wo nach der Transformation, die das quadratische Glied beseitigt, ein durch p unteilbarer Koeffizient der ersten Potenz der Variablen auftritt. Diese Bedingung wollen wir explizite anschreiben:

Setzen wir $x = y+h$, so ergibt sich

$$f(x) = Ay^3+(3Ah+B)y^2+(3Ah^2+2Bh+C)y+ \\ +Ah^3+Bh^2+Ch+D.$$

h bestimmen wir aus der Kongruenz

$$3Ah+B \equiv 0 \pmod p;$$

soll dann auch

$$3Ah^2+2Bh+C \equiv 0 \pmod p$$

werden, so muß, wie eine einfache Überlegung zeigt,

$$3AC-B^2 \equiv 0 \pmod p$$

sein. Für eine allgemeine Funktion dritten Grades haben wir somit den Satz:

Die Funktion Ax^3+Bx^2+Cx+D mit durch p unteilbarem A durchläuft, wenn x ein vollständiges Restsystem $\pmod p$ durchläuft, $\left\{\frac{2p}{3}\right\}$ inkongruente Werte, wenn $3AC-B^2$ nicht durch p teilbar ist, im entgegengesetzten Falle aber p oder $\frac{p+2}{3}$ Werte, je nachdem p die Form $3n-1$ oder $3n+1$ hat.

II.

Die allgemeine Funktion vierten Grades läßt keine analoge Behandlung zu, dagegen jene speziellere, die die Eigenschaft hat, daß bei der Transformation, die das kubische Glied zum Verschwinden bringt, auch der Koeffizient der ersten Potenz durch p teilbar wird. Eine solche Funktion läßt sich nämlich durch Multiplikation mit 4 und Addition einer bestimmten Konstanten auf die Form

$$(x^2+a)^2$$

bringen, deren inkongruente Werte sich ebenfalls leicht abzählen lassen.

Zwei konjugierte Werte x und y erfüllen die Bedingung:

$$(x^2+a)^2-(y^2+a)^2 \equiv 0 \pmod p$$

oder, durch $x-y$ dividiert:

$$(x^2+y^2+2a)(x+y) \equiv 0 \pmod p.$$

Zu einem bestimmten x gehört sonach jedenfalls der Wert $y \equiv -x$ als konjugierter, ferner aber auch die Wurzeln y der Kongruenz

$$y^2+x^2+2a \equiv 0 \pmod p,$$

deren Anzahl zwei, eins oder Null beträgt.

Da die Funktion $(x^2+a)^2$ bereits alle ihre Werte durchläuft, wenn x die Werte $0, 1, 2, \ldots \frac{p-1}{2}$ annimmt, so wollen wir uns auf diesen Wertevorrat beschränken; wir schalten hiemit den zu x konjugierten Wert $-x$ aus und brauchen bloß die Wurzeln der Kongruenz $y^2+x^2+2a \equiv 0 \pmod p$ zu untersuchen. Diese Kongruenz hat für ein bestimmtes x jedenfalls nicht mehr als eine unserem Wertevorrat angehörige Wurzel.

Zu einem bestimmten x gehört dann ein konjugierter Wert y, wenn $-2a-x^2$ quadratischer Rest ist, und kein konjugierter Wert, wenn es ein Nichtrest ist. Zu jenem Wert x, der die Kongruenz $-2a-x^2 \equiv 0 \pmod p$ erfüllt, gehört $y \equiv 0$ als konjugierter Wert.

Es entsteht somit vor allem ein Paar konjugierter Werte, wenn $\left(\frac{-2a}{p}\right) = +1$ ist; ferner entstehen Paare konjugierter Werte in der Anzahl $\frac{L_1}{2}$, wo L_1 angibt, für wie viele Werte des Intervalls $1, 2 \ldots \frac{p-1}{2}$ der Ausdruck $-2a-x^2$ quadratischer Rest ist; nur im Falle $\left(\frac{-a}{p}\right) = +1$ ist von L_1 eine Einheit zu subtrahieren, da dann auch der Fall $x \equiv y$ eintritt; analog entstehen L_2 isolierte Werte, wenn L_2 anzeigt, für wie viele Werte er ein Nichtrest ist; zu diesen L_2 isolierten Werten kommt aber noch die Null hinzu, wenn $-2a$ Nichtrest ist, und der sich selbst konjugierte Wert, wenn $-a$ Rest ist.

Die Anzahlen L_1 und L_2 hängen wieder davon ab, welchen quadratischen Charakter $-2a$ und -1 haben, denn darnach entscheidet es sich, welches der Systeme $r'+r''$, $r'+n''$, $n'+r''$, $n'+n''$ der Ausdruck $-2a-x^2$ durchläuft. Wir müssen sonach vier Fälle unterscheiden:

1. $\left(\frac{-2a}{p}\right) = +1, \quad \left(\frac{-1}{p}\right) = +1, \quad L_1 = \frac{p-5}{4}, \quad L_2 = \frac{p-1}{4};$

2. $\left(\frac{-2a}{p}\right) = +1, \quad \left(\frac{-1}{p}\right) = -1, \quad L_1 = \frac{p-3}{4}, \quad L_2 = \frac{p-3}{4};$

3. $\left(\frac{-2a}{p}\right) = -1, \quad \left(\frac{-1}{p}\right) = +1, \quad L_1 = \frac{p-1}{4}, \quad L_2 = \frac{p-1}{4};$

4. $\left(\frac{-2a}{p}\right) = -1, \quad \left(\frac{-1}{p}\right) = -1, \quad L_1 = \frac{p+1}{4}, \quad L_2 = \frac{p-3}{4}.$

Bedeutet dann wieder T_1 die Anzahl der isolierten Werte, die die Funktion annimmt, T_2 die Anzahl der Paare von Werten, so ist im ersten und zweiten Falle

$$T_1 = L_2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{-a}{p}\right)+1\right], \quad T_2 = \frac{L_1}{2} - \frac{1}{4}\left[\left(\frac{-a}{p}\right)+1\right]+1,$$

dagegen im dritten und vierten Falle

$$T_1 = L_2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{-a}{p}\right)+1\right]+1, \quad T_2 = \frac{L_1}{2} - \frac{1}{4}\left[\left(\frac{-a}{p}\right)+1\right].$$

Die Formeln lassen sich wieder durch folgende einheitliche ersetzen:

$$T_1 = \frac{p-2\left(\frac{-2a}{p}\right)+\left(\frac{-1}{p}\right)+2\left(\frac{-a}{p}\right)+2}{4},$$

$$T_2 = \frac{p+2\left(\frac{-2a}{p}\right)-\left(\frac{-1}{p}\right)-2\left(\frac{-a}{p}\right)}{8}.$$

T_1+T_2 ist die Gesamtzahl der inkongruenten Werte, die die Funktion überhaupt annimmt; hiefür findet man den Ausdruck:

$$T_1+T_2 = \frac{3p+4-2\left(\frac{-2a}{p}\right)+\left(\frac{-1}{p}\right)+2\left(\frac{-a}{p}\right)}{8} = \psi\,(a, p).$$

Der Fall $a \equiv 0 \pmod p$ ist unmittelbar zu erledigen; es ist da einfach die Funktion x^4 zu betrachten, die, wenn p die Form $4n+1$ hat, $\frac{p+3}{4}$, wenn aber p die Form $4n-1$ hat, $\frac{p+1}{2}$ inkongruente Werte durchläuft.

Wir haben somit das Resultat:

Die Funktion $(x^2+a)^2$ durchläuft, wenn a nicht durch p teilbar ist, $\psi\,(a, p)$ inkongruente Werte, wenn aber a durch p teilbar ist, entweder $\frac{p+3}{4}$ oder $\frac{p+1}{2}$ Werte, je nachdem p die Form $4n+1$ oder $4n-1$ hat.

Daraus läßt sich noch folgender Schluß ziehen:

Die Funktion Ax^4+Bx^2+C, in welcher A durch p unteilbar vorausgesetzt wird, durchläuft, wenn B nicht durch p teilbar ist, $\psi\,(2AB, p)$ inkongruente Werte, dagegen im Falle eines durch p teilbaren B entweder $\frac{p+3}{4}$ oder $\frac{p+1}{2}$ Werte, je nachdem p die Form $4n+1$ oder $4n-1$ hat.

Über die Bestimmung des linearen Ausdehnungskoeffizienten und dessen Abhängigkeit von der Spannung aus den Temperaturänderungen bei der Dehnung von Hartgummistäben

von

phil. **Robert Wagner.**

Aus dem mathematisch-physikalischen Kabinett der Universität Graz; Vorstand Prof. A. Waßmuth.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Juni 1907.)

A. Waßmuth hat schon 1902[1] darauf hingewiesen, daß die beim Ausdehnen und Zusammenziehen von Stäben auftretenden Temperaturänderungen ein neues Mittel an die Hand geben, aus dem Vergleiche der Theorie und der Versuche den linearen Ausdehnungskoeffizienten zu bestimmen. Seit dieser Zeit ist die Methode der genauen Ermittlung solcher sehr kleiner Temperaturdifferenzen durch zahlreiche auf diesem Gebiete durchgeführte Arbeiten[2] so weit ausgebildet und verbessert worden, daß es mir möglich wurde, auf diesem neuen Wege den linearen Ausdehnungskoeffizienten und dessen Abhängigkeit von der Spannung zu ermitteln. Über die direkte Bestimmung der Änderung des linearen Ausdehnungs-

---

[1] A. Waßmuth, diese Sitzungsberichte, Bd. 111, Abt. IIa, Juli 1902; Annalen d. Phys., IV, *11*, 158.

[2] So z. B. Haga, Wiedem. Annalen, *15*, 1882; A. Waßmuth, diese Sitzungsberichte, Bd. 98, IIa (1889); Annalen d. Phys., Bd. 13, p. 182 (1904); Boltzmann-Festschrift, p. 563 (1904).

koeffizienten von Metalldrähten mit dem Zuge liegen bekanntlich Versuche von Dahlander[1] und Haga[2] vor.

Es läßt sich nun zeigen, daß die Änderung des Ausdehnungskoeffizienten infolge der Spannung im wesentlichen durch die Änderung des Elastizitätskoeffizienten mit der Temperatur bedingt wird. Wenn auf einen Stab (Länge l, Querschnitt q, Elastizitätsmodul E) ein Zug δP wirkt, der eine Verlängerung δl hervorbringt, so ist

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{\delta P}{q}$$

oder

$$\frac{1}{E.q} = \frac{1}{l} \cdot \frac{\partial l}{\partial P_T} = \frac{\partial \log l}{\partial P_T};$$

ferner ist der lineare Ausdehnungskoeffizient

$$\alpha = \frac{1}{l} \cdot \frac{\partial l}{\partial T_P} = \frac{\partial \log l}{\partial T_P};$$

differenziert man die rechte Seite dieser Gleichung nach P (konstans T) und die vorhergehende nach T (konstans P), so ergibt sich:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial P} = \frac{\partial \frac{1}{E.q}}{\partial T} = -\frac{1}{E^2 . q^2} \cdot \left[E . \frac{\partial q}{\partial T} + q \cdot \frac{\partial E}{\partial T}\right].$$

Dann folgt aus

$$q = q_0 (1 + 2\alpha T)$$

durch Differentiation:

$$\frac{1}{q_0} \cdot \frac{\partial q}{\partial T} = 2\alpha$$

oder

$$\frac{\partial q}{\partial T} = 2\alpha q_0, \text{ d. i. sehr nahe } = 2\alpha q;$$

---

[1] Dahlander, Pogg. Annalen, *145*, 147 (1872).

[2] H. Haga, Wiedem. Annalen, *15*, 18 (1882).

setzt man $\varepsilon = \frac{1}{E} \cdot \frac{\partial E}{\partial T}$, so wird:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial P} = -\frac{1}{E^2 . q^2}\left[2\alpha q E + q E \varepsilon\right] = -\frac{1}{E . q}(2\alpha + \varepsilon)$$

oder, wenn man den spezifischen Zug (auf 1 mm^2) $p = \frac{P}{q}$ einführt:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial p} = -\frac{\varepsilon + 2\alpha}{E}.$$

Diese Gleichung soll von nun an kurz die Dahlandersche Formel heißen, da sie der von ihm auf andere Weise abgeleiteten Beziehung analog ist.

Für die Temperaturänderungen, welche bei plötzlicher Änderung der Spannung eines Stabes oder Drahtes auftreten, gilt die von W. Thomson (1851) aus dem II. Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie abgeleitete Formel:

$$\tau = \frac{T_0 . \alpha . P}{427 . \omega . c},$$

worin P die Änderung der Spannung in Kilogramm, α den linearen Ausdehnungskoeffizienten bei der betreffenden Spannung, c die spezifische Wärme, $\omega = q . \sigma$ das Gewicht der Längeneinheit (1 m) des Körpers in Kilogramm und τ die bei der absoluten Temperatur T_0 eintretende Abkühlung bedeutet.

Nachdem zuerst Joule[1] die Richtigkeit dieser Formel experimentell untersuchte und sie im allgemeinen — wenn auch noch merkliche Differenzen zwischen Theorie und Versuch bestehen blieben — bestätigt fand, hat nachher Edlund[2] über diesen Gegenstand Versuche angestellt, aus denen er zu schließen glaubte, daß sich nur die relativen Werte der Temperaturänderungen berechnen ließen; erst Haga[3] hat gezeigt, daß diese Formel auch für den absoluten Wert gültig ist, indem er daraus das mechanische Wärmeäquivalent hinreichend genau

---

[1] Joule, Proc., Roy. Soc., 8 (1857); Phil. Trans., 149 (1859).

[2] Edlund, Pogg. Annalen, *126*, 539 (1865).

[3] Haga, Wiedem. Annalen, *15*, 18 (1882).

bestimmen konnte. Dann hat Waßmuth — wie erwähnt — darauf aufmerksam gemacht, daß es möglich sei, falls man die Temperaturdifferenzen genau zu bestimmen im stande sei, auch den Ausdehnungskoeffizienten an der Hand dieser Formel zu ermitteln. Da man auf diese Weise die Ausdehnungskoeffizienten bei verschiedenen Zugkräften erhält, kann man auch einen Schluß auf die Änderung des α mit der Spannung ziehen und prüfen, ob und inwieweit die Dahlander'sche Formel erfüllt ist.

Wenn Haga[1] die vollständige Proportionalität der Temperaturänderung mit dem Spannungsgewichte an einem Neusilberdraht bestätigt fand, so liegt das darin, daß bei einem Metalle der Elastizitätsmodul E ungemein groß und die Änderung desselben ε mit der Temperatur sehr klein ist, weshalb, wie die Dahlander'sche Formel zeigt, $\frac{\partial \alpha}{\partial P}$ so klein ausfällt, daß eine Bestimmung wohl nicht möglich ist. Um aber trotzdem auf diese Art $\frac{\partial \alpha}{\partial P}$ annähernd ermitteln zu können, muß ein Stoff gewählt werden, der ein möglichst kleines E und verhältnismäßig großes ε hat. Als ein solches Material empfiehlt sich Hartgummi. Außerdem hat, wie Waßmuth[2] beobachtete, dieser Stoff das Merkwürdige, daß es Stäbe gibt, die sicher ein großes positives ε haben, während andere Stäbe große negative Werte für ε aufweisen und bei einem Stabe die Änderung des Elastizitätsmoduls fast Null war.

Es wurden daher verschiedene zylindrische Hartgummistäbe (von der Gummifabriks-Aktiengesellschaft in Budapest) zu den Untersuchungen herangezogen, indem sie in einem breiten, allseits verschlossenen Holzrahmen aufgehängt und durch direktes Anhängen von Gewichten gedehnt wurden. Den Sinn und die Größe der auftretenden Temperaturänderungen wies ein feines, in der Mitte des Stabes angebrachtes Thermoelement aus Konstantan und Eisen nach, das mit einem sehr empfindlichen Galvanometer durch dünngewalzte Kupfer-

---

[1] Haga, ibid. p. 14.

[2] A. Waßmuth, Boltzmann-Festschrift, p. 568.

streifen — zur Verhütung der Deformationsströme — in Verbindung stand. Die Befestigung des Thermoelementes geschah in der Art, daß der Hartgummistab in einem Glasrohr solange erwärmt wurde, bis sich die durch Ätzen verdünnten Drähte des Elementes in den Stab einfügen ließen. So blieb der Stab nach dem Abkühlen gerade und das Thermoelement steckte ungemein fest in der Mitte. Dehnungsapparat, Zuleitung und Galvanometer waren durch Watte und Pappdeckel möglichst vor Luftströmungen geschützt. Alle Versuche konnten — wegen der erforderlichen Ruhe — nur in den Abendstunden angestellt werden und wurde zwischen den einzelnen Versuchen mindestens 5 Minuten gewartet, bis die Nadel des Galvanometers wieder zur Ruhelage zurückgekehrt war.

Der zuerst untersuchte Stab (Qual. VII) von der Dicke $2a = 4 \cdot 89\, mm$, dem spezifischen Gewichte $\sigma = 1 \cdot 27$, der spezifischen Wärme $c = 0 \cdot 39$, dem Elastizitätsmodul $E = 312 \frac{kg}{mm^2}$ hatte ein mittels der gleichförmigen Biegung bereits bestimmtes $\varepsilon = +35.10^{-4}$. In der folgenden Tabelle 1 sind die Beobachtungen vom 12. März 1907 wiedergegeben.

Die Berechnung der Beobachtungen erfolgte nach den Formeln:

$$\tau = \frac{X.r}{(1-z).R},$$

$$X = A - X_0,$$

$$X_0 = \left(\frac{k}{1+k}\right)^2 \cdot \left[(x_1 - x_2) + (x_3 - x_2)\right].$$

Dabei war für den ersten Stab:

$k = 1 \cdot 235$ das Dämpfungsverhältnis, daher $\left(\frac{k}{1+k}\right)^2 = 0 \cdot 3,$

$r = 1 \cdot 20$ der Gesamtwiderstand, $R = \left(\frac{3 \cdot 58}{4 \cdot 29}\right)^2 \cdot 2210 = 1540$ die thermoelektrische Konstante für die Schwingungsdauer $T = 3 \cdot 58''$.

Tabelle 1. *H* I.

Spannendes Gewicht P in Kilogr.		Erster Ausschlag A	Erste Distanz der Umkehrpunkte x_1-x_2	Zweite Distanz der Umkehrpunkte x_3-x_2	X	X Mittel	τ	$\frac{\tau}{P}\cdot 10^5$	$\alpha . 10^7$
0·5	an..	8·1	5·1	3·2	5·61	5·41	0·00432°	864	1184
	ab..	8·2	5·8	4·2	5·20				
1	an..	15·1	11·2	8·4	9·22	9·52	0·00760	760	1041
	ab..	15·6	11·4	7·9	9·81				
1·5	an..	21·2	15·9	10·9	13·16	13·18	0·01052	701	960
	ab..	21·0	15·3	10·7	13·20				
2	an..	25·7	18·6	14·0	15·92	16·15	0·01290	645	884
	ab..	26·1	19·0	13·4	16·38				
2·5	an..	31·1	22·7	16·4	19·37	19·25	0·01537	615	843
	ab..	31·1	23·1	16·8	19·13				
3	an..	36·2	25·8	18·6	22·88	22·65	0·01809	603	826
	ab..	36·3	26·6	19·7	22·41				
4	an..	44·9	31·5	22·4	28·73	28·64	0·02287	572	784
	ab..	45·8	32·9	24·6	28·55				
3	an..	36·4	26·4	18·5	22·93	22·79	0·01820	607	832
	ab..	36·2	26·1	19·1	22·64				

Ferner wurde nach einer von Haga angegebenen Methode — die vollständige Theorie hat Onnes gegeben — die sogenannte Ausstrahlungskonstante z ermittelt. Zu dem Ende wurde vom Moment der ersten Elongation an in gleichen Zeitintervallen (30'') der Stand der Galvanometernadel notiert, das Verhältnis der Differenzen von der Ruhelage gebildet und die Logarithmen dieser Quotienten mit $\frac{2\cdot 3}{30}$ multipliziert; daraus resultieren ziemlich konstante Zahlen h, die noch mit T zu multiplizieren sind, um z zu erhalten. Es ergaben die Beobachtungen für diesen Tag folgende Werte: 0·023, 0·022, 0·028, 0·022, woraus als Mittel $z = 0\cdot 024$ folgt.

Demnach bestimmen sich die Temperaturdifferenzen aus der Gleichung:

$$\log \tau = \log X + 0\cdot 9023 - 4.$$

Man merkt ein starkes, regelmäßiges Sinken der Werte $\frac{\tau}{P}$. Trägt man sich die Gewichte auf der Abscissenachse und die zugehörigen $\frac{\tau}{P}$ auf der Ordinatenachse auf, erhält man eine Kurve (siehe Fig. 1, H I), die zuerst verhältnismäßig steil abfällt, dann aber allmählich in eine ungemein schwach geneigte Gerade übergeht.

Setzt man nun die beobachteten $\frac{\tau}{P}$ in die Thomson'sche Formel ein, so gestattet die Gleichung

$$\alpha = \frac{427 . \omega . c}{T_0} \cdot \frac{\tau}{P}$$

das ist

$$\log \alpha = \log \frac{\tau}{P} + 0 \cdot 1367 - 2$$

die Berechnung der zugehörigen Ausdehnungskoeffizienten. Werden sie mit den von Kohlrausch angegebenen Zahlen

$\alpha_1 = 0 \cdot 0000770$ ....für 17 bis 25°

$\alpha_2 = 0 \cdot 0000842$ .... » 25 » 35°

verglichen, sieht man, daß die ersten Werte größer ausfallen, worauf die Kurve deutlich hinweist. Aus der Dahlander'schen Formel ergibt sich, da E und ε bekannt sind:

$$-\frac{\delta \alpha}{\partial P} = 6 \cdot 2 . 10^{-7},$$

also ein geringeres Gefälle für die Kurve, als — wenigstens im Anfange — hiefür beobachtet wurde. Die natürliche Verlängerung der Kurve, wie sie größeren Spannungen entspreche, würde so verlaufen, wie es die Theorie verlangt.

Nun könnte vielleicht der Einwurf erhoben werden, daß in der Thomson'schen Formel noch das Gewicht der Längeneinheit und die spezifische Wärme enthalten sind und auch diese Größen mit wachsender Spannung sich wesentlich ändern. Rechnet man aber mit dem bekannten Elastizitätsmodul die Änderung des ω, so findet man einen außerordentlich kleinen

Betrag; zudem kann ja ω bei der Dehnung nur abnehmen, vermag also seinerseits sicher nicht das Sinken von $\frac{\tau}{P}$ zu erklären. Die spezifische Wärme steigt allerdings mit wachsender Spannung, aber so minimal, daß es auf die berechneten Werte für α keinen Einfluß haben kann. Die Formel für die Abhängigkeit des c von P lautet:

$$\frac{dc}{dP} = + T_0 \cdot \frac{d^2 l}{d T_0^2}.$$

Nun ist:

$$l = l_0 (1 + \alpha_0 t + \beta_0 t^2) = l_0 [1 + (\alpha_0 + \beta_0 t) t];$$

daher

$$\frac{\partial l}{\partial t} = l_0 (\alpha_0 + 2 \beta_0 t)$$

und

$$\frac{\partial^2 l}{\partial t^2} = l_0 . 2 \beta_0;$$

setzt man:

$$\alpha = \alpha_0 + \beta_0 t,$$

ergibt sich β_0 aus den Versuchen von Kohlrausch über den Ausdehnungskoeffizienten des Hartgummi bei verschiedenen Temperaturen:

$$\beta_0 = \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 8 . 10^{-7};$$

also:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial t^2} = l_0 . 16 . 10^{-7}$$

und es wird

$$\frac{dc}{dP} = T_0 . l_0 . 16 . 10^{-7}$$

verschwindend klein.

Daraus geht hervor, daß nur die verhältnismäßig große Änderung des α in Betracht kommen kann.

Derselbe Stab wurde am 15. März einer neuen Versuchsreihe unterworfen, deren Ergebnisse die Tabelle 2 enthält.

Tabelle 2. *H* I.

P		A	x_1-x_2	x_3-x_2	X	X Mittel	τ	$\frac{\tau}{P}\cdot 10^5$	$\alpha . 10^7$
0·5	an..	7·8	5·7	3·5	5·04	5·51	0·00438°	876	1200
	ab..	9·0	5·9	4·2	5·97				
1	an..	15·0	10·6	7·1	9·69	9·54	0·00759	759	1040
	ab..	15·2	11·3	8·1	9·38				
1·5	an .	21·5	16·0	11·5	13·25	13·36	0·01062	708	970
	ab..	21·6	15·7	11·4	13·47				
2	an..	26·0	18·5	13·1	16·52	16·61	0·01321	661	906
	ab..	26·9	20·1	13·9	16·70				
2·5	an..	32·6	23·8	16·7	20·45	20·12	0·C1600	640	877
	ab..	31·7	23·1	16·6	19·79				
3	an..	36·4	26·2	19·4	22·72	22·80	0·01813	604	827
	ab..	37·0	27·2	19·9	22·87				
4	an..	46·3	33·1	24·1	29·14	28·93	0·02300	575	788
	ab..	46·2	33·2	25·1	28·71				
3	an..	37·2	27·4	19·7	23·07	22·94	0·01824	608	833
	ab..	37·3	27·9	20·4	22·81				

Dazu gehörte: $r = 1\cdot 20$, $T = 3\cdot 58''$, $R = 1540$, $z = 0\cdot 020$; $\log \tau = \log X + 0\cdot 9005—4$. Man sieht, daß die erhaltenen Zahlen fast vollständig mit den früheren zusammenfallen.

Um zu sehen, wie sich andere Hartgummistäbe in dieser Hinsicht verhielten, untersuchte ich auf gleiche Art noch einige Stäbe derselben Fabrik.

Der zweite Stab (Qual. III) von der Dicke $2a = 5\cdot 00\,mm$, dem spezifischen Gewichte $\sigma = 1\cdot 325$ und dem Elastizitätsmodul $E = 368 \frac{kg}{mm^2}$ lieferte die in der Tabelle 3 angegebenen Zahlen.

Dabei war:

$$r = 1\cdot 20,\ T = 3\cdot 62'',$$

$$R = \left(\frac{3\cdot 62}{3\cdot 58}\right)^2 \cdot 1540 = 1574,\ z = 0\cdot 020;$$

daher

$$\log \tau = \log X + 0\cdot 8910 - 4$$

und

$$\log \alpha = \log \frac{\tau}{P} + 0\cdot 2013 - 2.$$

Die Werte für α sind etwas kleiner als beim ersten Stab und fallen auch nicht so stark ab, wie die entsprechende Kurve (vergl. Fig. 1, *H* II) deutlich zeigt.

Tabelle 3. *H* II.

P		A	$x_1 - x_2$	$x_3 - x_2$	X	X Mittel	τ	$\frac{\tau}{P} \cdot 10^5$	$\alpha . 10^7$
0·5	an..	5·3	3·8	2·1	3·53	3·83	0·00298°	596	947
	ab..	5·9	3·6	2·3	4·13				
1	an..	10·7	6·7	4·6	7·31	7·00	0·00545	545	866
	ab..	10·0	6·5	4·9	6·58				
1·5	an..	14·5	9·1	6·8	9·73	9·75	0·00759	506	804
	ab..	14·6	9·1	7·0	9·77				
2	an..	19·0	11·9	9·1	12·70	12·50	0·00973	487	774
	ab..	18·8	11·6	10·1	12·29				
2·5	an..	22·7	14·1	10·9	15·20	15·43	0·01201	480	763
	ab..	22·7	13·2	10·3	15·65				
3	an..	27·0	15·9	12·6	18·45	18·31	0·01425	475	755
	ab..	26·5	15·5	12·3	18·16				
4	an..	34·8	20·6	16·4	23·70	23·62	0·01838	460	731
	ab..	34·3	19·9	16·0	23·53				

Um zu sehen, inwieweit die Dahlander'sche Formel erfüllt ist, mußte die Änderung des Elastizitätsmoduls mit der Temperatur $\frac{1}{E} \cdot \frac{\partial E}{\partial T} = \varepsilon$ mit Hilfe der gleichförmigen Biegung bestimmt werden. Der Stab wurde, gestützt auf zwei Schneiden von der Distanz 13·9 *cm*, durch gleiche, an seinen Enden nach abwärts wirkende Zugkräfte p, von denen jede am Arme von 5·3 *cm* drehte, gleichförmig nach oben gebogen. Es ließ sich

nun zweifellos — der Sinn wurde auf mehrfache Weise festgestellt — nachweisen, daß eine Verstärkung der Biegung mit einer Erwärmung und eine Entlastung mit einer Abkühlung verbunden war; dieser Hartgummi verhält sich demnach entgegengesetzt wie ein Metall und es muß also ε positiv sein.

Nun wurde versucht, auch den Betrag dieser Größe annähernd festzustellen.

Tabelle 4. *H* II.

p in Gr.	A	x_1-x_2	x_3-x_2	X	X Mittel	τ	$\log \vartheta_{ab}$	$\log (M_b^2-M_a^2)$	$\varepsilon.10^4$
150	5·7	4·6	2·4	3·60	3·67	0·00248°	—	—	—
	5·9	4·7	2·5	3·74					
250	10·6	9·0	4·4	6·58	6·46	0·00437	0·2765–3	12·0531	56
	10·3	8·5	4·7	6·34					
400	22·7	18·4	10·4	14·06	14·29	0·00967	0·8567–3	12·4487	62
	23·6	19·9	10·4	14·51					
500	34·8	29·1	15·9	21·30	21·38	0·01447	0·0788–2	12·7042	63
	34·5	28·7	14·8	21·45					

Mittel: $\varepsilon = +60.10^{-4}$.

Aus den in der Tabelle 4 wiedergegebenen Versuchen lassen sich zuerst die Temperaturänderungen τ berechnen nach der Formel $\tau = X \cdot \frac{1\cdot 03}{1523}$; dann kann mit Hilfe der Voigt'schen Formel

$$\frac{\gamma_x}{T_0} \cdot \vartheta_{ab} = \frac{\varepsilon}{E} \cdot \frac{M_b^2 - M_a^2}{{}^1/_2 . a^6 . \pi^2},$$

worin $\gamma_x = c.\sigma.419.10^5$ die spezifische Wärme der Volumseinheit und ϑ_{ab} die Temperaturdifferenz bei der Drehung vom Momente M_a in das Moment M_b bedeutet, ε bestimmt werden aus der Gleichung:

$$\varepsilon = \frac{c.\sigma.4\cdot 19.10^7.E.\pi^2.a^6}{2\,T_0} \cdot \frac{\vartheta_{ab}}{M_b^2 - M_a^2}$$

oder

$$\log \varepsilon = \log \vartheta_{ab} + 12 \cdot 5234 - \log (M_b^2 - M_a^2).$$

Es gibt demnach die Dahlander'sche Formel mit dem auf diese Art gefundenen ε:

$$-\frac{\partial \alpha}{\partial P} = 8 \cdot 5 . 10^{-7}.$$

Der dritte Stab (Qual. IV) von der Dicke $2a = 4 \cdot 92$ *mm* und dem spezifischen Gewichte $\sigma = 1 \cdot 325$ ergab die in der Tabelle 5 enthaltenen Werte. Dazu gehörte: $r = 1 \cdot 17$, $T = 3 \cdot 54''$, $R = 1506$, $z = 0 \cdot 025$; $\log \tau = \log X + 0 \cdot 9014 - 4$, $\log \alpha = = \log \frac{\tau}{P} + 0 \cdot 1908 - 2$.

Tabelle 5. *H* III.

P		A	$x_1 - x_2$	$x_3 - x_2$	X	X Mittel	τ	$\frac{\tau}{P} \cdot 10^5$	$\alpha . 10^7$
0·5	an..	4·5	2·5	1·5	3·30	3·39	0·00270°	540	838
	ab..	5·3	3·4	2·7	3·47				
1	an .	8·5	4·7	3·8	5·95	6·48	0·00516	516	801
	ab..	10·1	5·6	4·7	7·01				
1·5	an.	11·2	4·5	4·0	8·65	8·81	0·00702	468	726
	ab..	12·9	6·9	6·2	8·97				
2	an..	15·7	9·2	7·5	10·69	11·58	0·00923	462	717
	ab..	17·5	9·0	7·8	12·46				
2·5	an..	18·2	11·0	6·4	13·28	14·12	0·01125	450	698
	ab..	21·1	11·0	9·5	14·95				
3	an..	20·5	8·8	8·3	15·37	16·43	0·01309	436	677
	ab..	24·8	13·1	11·3	17·48				
4	an..	28·2	12·5	11·7	20·94	21·85	0·01741	435	675
	ab..	32·3	17·0	14·8	22·76				
5	an..	27·4	2·2	3·1	25·81	27·07	0·02157	431	669
	ab..	42·6	25·4	21·5	28·53				
	an..	34·0	13·0	12·3	26·41				
	ab..	39·7	21·5	19·1	27·52				

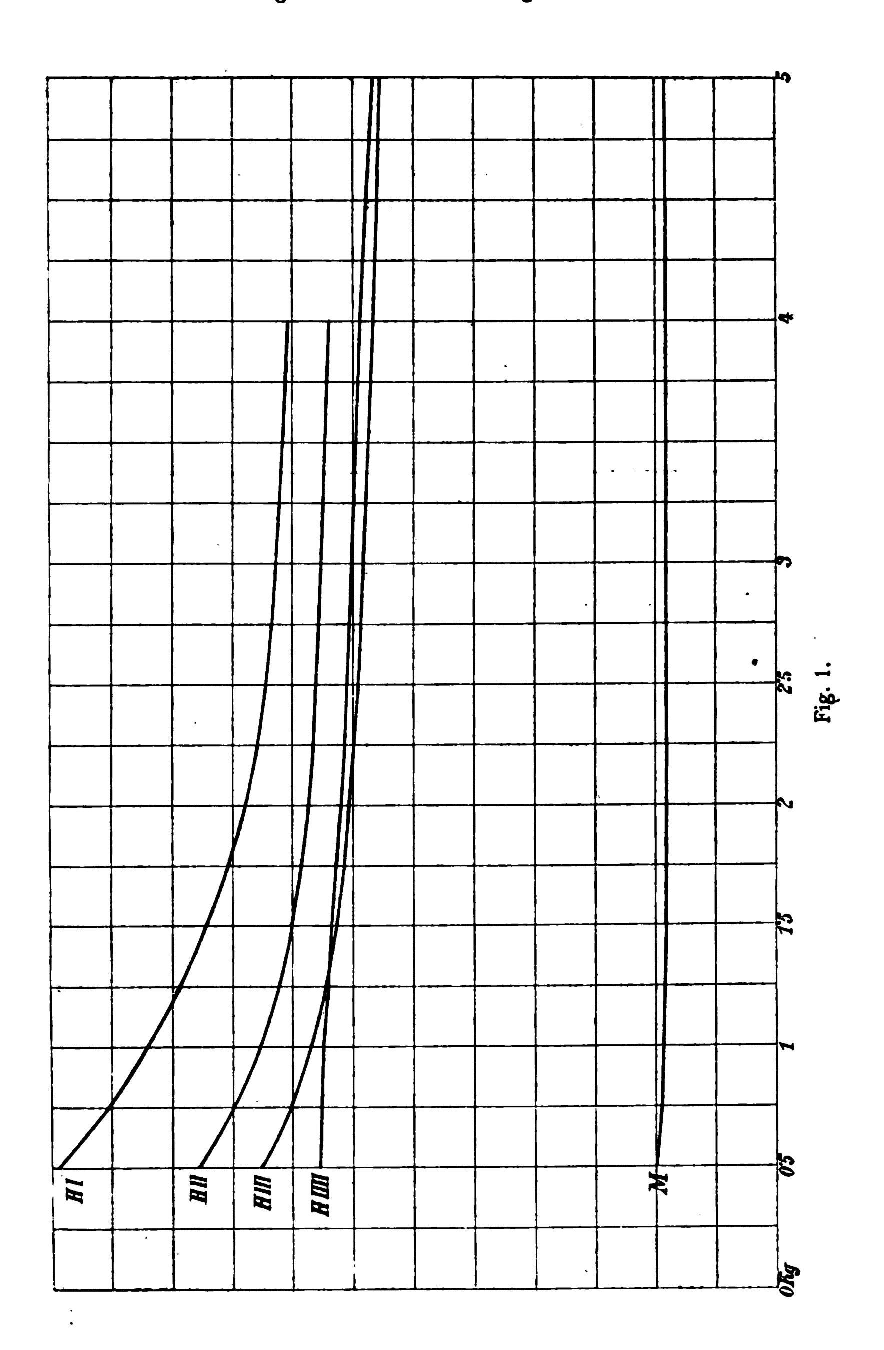


Fig. 1.

Die Kurve (vergl. Fig. 1, H III) der $\frac{\tau}{P}$ verläuft nahezu parallel mit der entsprechenden des früheren Stabes.

Die gleichförmige Biegung wies ebenfalls ein positives ε auf; die Beobachtungen, beziehungsweise Berechnungen findet man in Tabelle 6. Es war

$$\tau = X \cdot \frac{1 \cdot 22}{1570},$$

$$\log \varepsilon = \log \vartheta_{ab} + 12 \cdot 2843 - \log (M_b^2 - M_a^2).$$

Tabelle 6. H III.

p	A	x_1-x_2	x_3-x_2	X	X Mittel	τ	$\log \vartheta_{ab}$	$\log (M_b^2-M_a^2)$	$\varepsilon.10^4$
150	5·2	2·5	1·6	3·97	3·97	0·00309°	—	—	—
	5·4	2·9	1·9	3·96					
275	11·8	6·2	4·6	8·56	8·10	0·00630	0·5065–3	12·1732	41
	10·4	5·3	3·9	7·64					
400	17·2	10·0	7·4	11·98	11·67	0·00907	0·7767–3	12·5877	30
	15·1	7·2	5·3	11·35					

Mittel: $\varepsilon = + 36.10^{-4}$.

Der Elastizitätsmodul bestimmte sich nach der für die ungleichförmige Biegung geltenden Gleichung:

$$E = \frac{l^3}{12 \pi a^4} \cdot \frac{P}{h}.$$

Zu dem Ende wurde der Stab auf zwei feste Scheiden, deren Distanz $l = 223$ *mm* betrug, aufgelegt und mit Hilfe einer Marke am Stabe und einer spiegelnden Skala die Pfeiltiefen h beobachtet, welche er bei einer Belastung von P *kg* in der Mitte aufwies. Es gehörten zu den Gewichten P: 0·1, 0·2, 0·3, 0·4, 0·5 *kg* die Pfeiltiefen h: 2·1, 4·3, 6·9, 9·5, 12·0 *mm*. Daraus

ergeben sich für E' die Werte: 383, 374, 349, 338, 335 und als Mittel:

$$E = 356 \frac{kg}{mm^2}.$$

Mit den nun gefundenen Werten von E und ε gibt die Dahlander'sche Formel:

$$-\frac{\delta\alpha}{\delta P} = 5 \cdot 6.10^{-7}.$$

Der vierte zur Untersuchung herangezogene Stab (Qual. VII) von der Dicke $2a = 6 \cdot 16\,mm$ und dem spezifischen Gewichte $\sigma = 1 \cdot 27$ lieferte die Daten der Tabelle 7.

Tabelle 7. *H* IV.

P		*A*	x_1-x_2	x_3-x_2	*X*	*X* Mittel	τ	$\frac{\tau}{P} \cdot 10^5$	$\alpha . 10^7$
0·5	an..	5·2	2·9	1·9	3·76	3·66	0·00163*	326	754
	ab..	5·2	3·0	2·5	3·55				
1	an..	10·0	4·7	4·3	7·30	7·30	0·00324	324	750
	ab..	10·5	5·8	4·9	7·29				
1·5	an..	15·0	8·1	7·1	10·44	10·46	0·00464	309	715
	ab..	15·1	8·2	7·2	10·48				
2	an..	19·6	9·9	8·8	14·00	13·75	0·00611	306	708
	ab..	19·4	10·5	9·2	13·50				
2·5	an .	24·3	12·9	10·5	17·28	17·16	0·00765	305	706
	ab..	23·4	11·6	9·6	17·04				
3	an..	28·4	15·1	13·4	19·85	19·98	0·00887	296	685
	ab..	28·7	15·2	13·5	20·10				
4	an .	37·9	20·3	17·7	26·50	26·41	0·01173	293	678
	ab..	37·6	20·3	17·3	26·32				
5	an..	45·9	23·8	20·9	32·49	32·38	0·01438	288	667
	ab..	46·1	24·1	22·0	32·27				

Es war:

$T = 3 \cdot 58''$, $R = 1540$, $r = 0 \cdot 67$, $z = 0 \cdot 020$;

daher:

$$\log \tau = \log X + 0{\cdot}6474 - 4$$

und

$$\log \alpha = \log \frac{\tau}{P} + 0{\cdot}3644 - 2.$$

Man sieht sofort, daß dieser Stab von den früheren sich durch das schwächere Abfallen der $\frac{\tau}{P}$ unterscheidet (vergl. Kurve *H* IV). In der Tat verhielt sich der Stab bei der Biegung wie ein Metall, da er ein negatives ε aufwies. Siehe Tabelle 8.

Tabelle 8. *H* IV.

p	A	x_1-x_2	x_3-x_2	X	X Mittel	τ	$\log \vartheta_{ab}$	$\log (M_b^2-M_a^2)$	$\varepsilon.10^4$
150	5·9	3·5	1·4	4·43	4·23	0·00201°	—	—	—
	4·5	0·6	1·0	4·02					
275	5·9	3·3	1·4	4·49	4·64	0·00220	0·3423–3	12·1732	—27
	6·7	3·5	2·9	4·78					
400	11·3	5·8	4·5	8·21	8·56	0·00406	0·6083–3	12·5877	—19
	11·6	5·0	4·0	8·90					

Mittel: $\varepsilon = -23.10^{-4}$.

Dazu gehörte:

$$\tau = X \cdot \frac{0{\cdot}73}{1540};$$

$$\log \varepsilon = \log \vartheta_{ab} + 12{\cdot}2602 - \log (M_b^2 - M_a^2).$$

Der Elastizitätsmodul bestimmte sich aus mehreren Beobachtungen:

$$E = 336 \frac{kg}{mm^2}.$$

Also:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial P} = 2{\cdot}1.10^{-7}.$$

Dieser Stab hatte demnach ein negatives und verhältnismäßig kleines ε, d. h. er näherte sich in dieser Hinsicht einem Metalle mit relativ hohem ε, wie es z. B. Messing mit großem Zinkgehalte darstellt. Um nun zu sehen, ob Messing bei der Dehnung ein ähnliches Verhalten zeigt, wie dieser letzte Hart-

Tabelle 9. *M.*

P		A	x_1-x_2	x_3-x_2	X	X Mittel	τ	$\frac{\tau}{P}\cdot 10^5$	$\alpha . 10^7$
0·5	an..	14·0	11·5	7·6	8·27	8·47	0·00279°	558	197
	ab..	14·6	11·9	7·9	8·66				
1	an..	27·6	22·5	15·8	16·11	16·38	0·00539	539	190
	ab..	28·8	23·2	17·3	16·65				
1·5	an..	42·4	35·2	25·2	24·28	24·29	0·00799	533	188
	ab..	42·0	34·0	25·0	24·30				
2	an..	56·2	46·7	39·6	32·41	32·23	0·01060	530	187
	ab..	55·9	45·0	34·5	32·05				
2·5	an..	70·5	57·5	42·4	40·53	40·14	0·01320	528	186
	ab..	69·2	56·5	41·7	39·74				
3	an..	84·7	69·4	50·9	48 61	48·10	0·01582	527	186
	ab..	82·8	67·1	50·3	47·58				
4	an..	114·0	93·8	68·3	65·37	64·57	0·02124	531	187
	ab..	110·8	89·9	66·9	63·76				
5	an..	140·6	115·0	72·0	84·50	81·18	0·02670	534	188
	ab..	136·0	111·0	82·8	77·86				

gummistab, wurde ein Messingstab (65% Cu, 35% Zn) von der Dicke $2a = 2\cdot 00\,mm$, dem spezifischen Gewichte $\sigma = 8\cdot 39$ und der spezifischen Wärme $c = 0\cdot 094$ der Dehnung unterworfen und lieferten die Beobachtungen die in der Tabelle 9 angegebenen Zahlen.

Dazu gehörte:

$$T = 3\cdot 64'', \quad R = 1592, \quad r = 0\cdot 51, \quad z = 0\cdot 026;$$

$$\log \tau = \log X + 0\cdot 5171 - 4, \ \log \alpha = \log \frac{\tau}{P} + 0\cdot 5474 - 3.$$

Aus der letzten Reihe sieht man, daß für α nahezu konstante Werte sich ergeben, die nur anfangs außerordentlich wenig sinken (vergl. Kurve *M*). Werden sie mit dem von Fizeau angegebenen $\alpha = 186.10^{-7}$ verglichen, so merkt man das vollständige Übereinstimmen bei einem Zuge von 2 *kg* an. Berechnet man nach der Dahlander'schen Formel mit dem bekannten[1] $\varepsilon = -15.10^{-4}$ die Änderung des Ausdehnungskoeffizienten mit der Spannung, so ergibt sich:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial P} = 0 \cdot 5.10^{-7}.$$

Die Ergebnisse dieser Versuche werden in der folgenden Tabelle veranschaulicht:

Resultate.

	$E \frac{kg}{mm^2}$	$\varepsilon.10^4$	$\frac{\partial \alpha}{\partial P}.10^7$
H I	312	+ 35	— 6·2
H II	368	+ 60	— 8·5
H III	356	+ 36	— 5·6
H IV	336	— 23	+ 2·1
M	11000	— 15	+ 0·5

Ein Ausdehnungskoeffizient, der von der Spannung fast unabhängig ist, beziehungsweise nur in sehr geringem Maße davon abhängt, zeigt sich nur bei Messing und beim Hartgummistab *H* IV. Die Ursache finden wir darin, daß bei beiden Stäben ε im Vergleiche zu den übrigen klein und negativ ist. Daher wird der Zähler $\varepsilon + 2\alpha$ klein, wozu bei Messing noch dazu kommt, daß der Nenner E sehr bedeutend ist. Aus diesem Grunde erscheint bei den übrigen Hartgummistäben, welche

[1] Waßmuth: Über die Bestimmung der thermischen Änderungen des Elastizitätsmoduls, p. 77; Wiener Ber., 115, II *a* (1906).

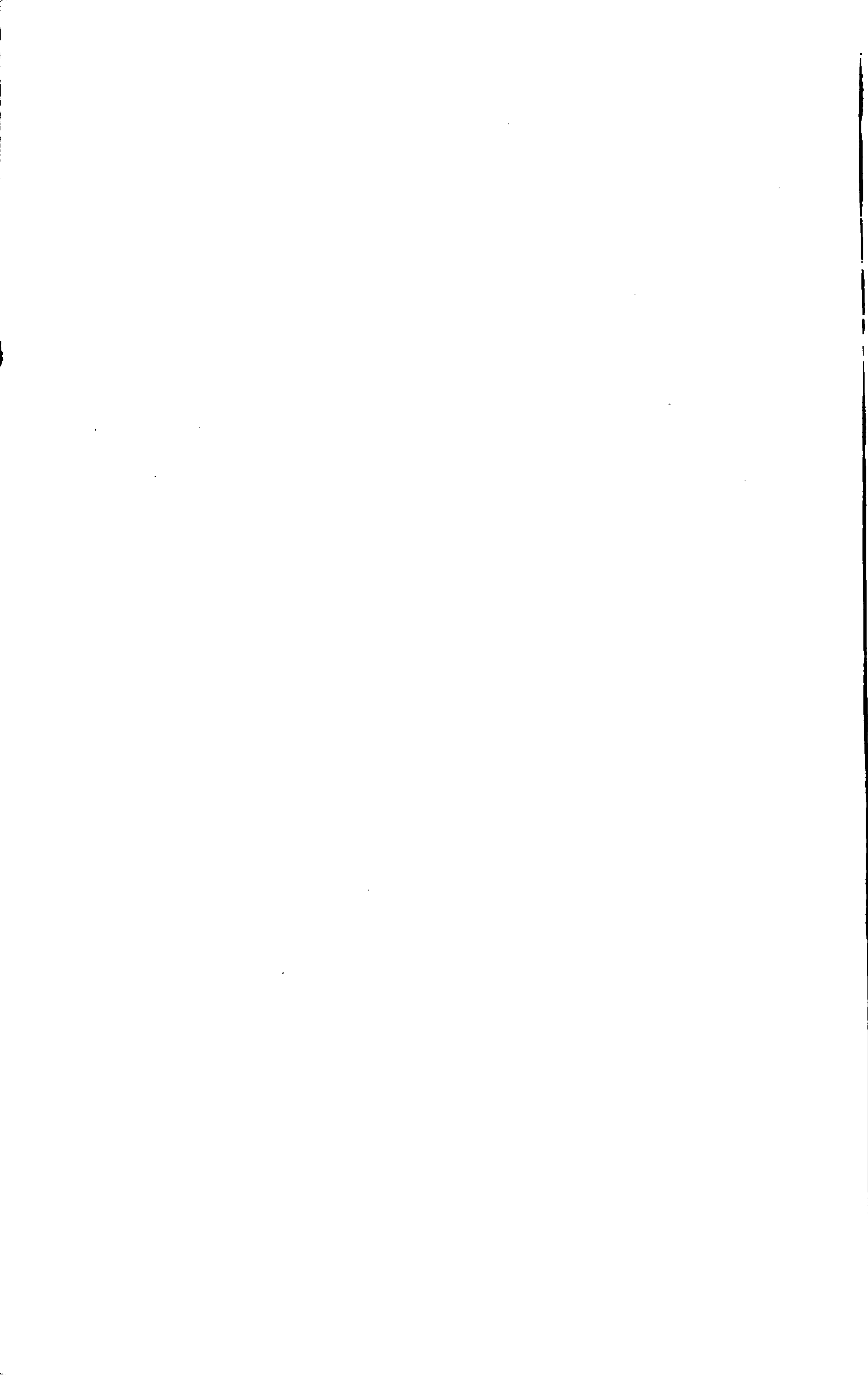
alle ein großes positives ε aufweisen, der Ausdehnungskoeffizient in erheblicher Weise abhängig von der Spannung, und zwar nimmt, wie die Versuche ergaben, derselbe besonders für kleine Zugkräfte mit diesen ab.

Dort, wo der Elastizitätsmodul klein und seine thermische Änderung positiv und verhältnismäßig groß ist, nimmt der Ausdehnungskoeffizient in erheblicher Weise mit dem Zuge ab; er ändert sich nur wenig (nimmt unbedeutend zu), wenn, wie bei den Metallen, der Modul sehr groß und die thermische Änderung desselben negativ und absolut genommen klein ist.

Durch diese Untersuchungen dürfte die strittige Frage[1] betreffs des thermischen Verhaltens des Elastizitätsmoduls von Hartgummi und seiner Beziehung zur Dahlander'schen Formel der Erkenntnis näher gerückt worden sein.

---

1 Winkelmann, Handb. d. Physik, II, 2, p. 64 (1896).



Über die Erwärmung beim Dehnen eines Jodsilberstabes

von

phil. **Robert Wagner.**

Aus dem mathematisch-physikalischen Kabinett der Universität Graz; Vorstand: Prof. A. Waßmuth.

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Juni 1907.)

Jene festen Körper, bei denen der lineare Ausdehnungskoeffizient positiv ist, müssen nach der Thomson'schen Regel beim Dehnen eine Abkühlung aufweisen. Eine große Zahl von Versuchen an Metallen haben dies sowie die Übereinstimmung mit der erwähnten Regel bewiesen. Demnach müßten Stoffe, wie z. B. Jodsilber, welches einen negativen, wenn auch sehr kleinen Ausdehnungskoeffizienten hat, sich beim Dehnen entgegengesetzt verhalten, also erwärmt werden. Dieses anormale, bisher noch nicht nachgewiesene Verhalten des Jodsilbers ist durch die nachfolgenden Versuche bestätigt worden.

Das Silberjodid wurde durch Fällung von Kaliumjodid mit Silbernitrat ($AgNO_3 + KJ \doteq KNO_3 + AgJ$) zunächst als gelber, schmieriger Niederschlag erhalten, der gründlich gewaschen und getrocknet wurde. Das so erhaltene Pulver wurde dann in einem Tiegel geschmolzen, mit einer 3 *mm* dicken Röhre aus Hartglas aufgesogen und rasch in kaltes Wasser getaucht. Die auf diese Weise gewonnenen Stäbe waren vielfach hohl und zeigten überhaupt ein sehr lockeres, stark kristallinisches Gefüge, so daß sie schon bei einer Belastung von wenig über 100 *g* rissen. Der Grund lag ersichtlich darin, daß das Glasrohr beim Einsenken in das Wasser sofort zersprang und daher dem

sich ausdehnenden Jodsilber keinen genügenden Widerstand entgegensetzte. Infolgedessen wurde ein anderer Weg eingeschlagen. Eine zylindrische Stahlform aus starken Wänden, die aus zwei sehr gut schließenden Teilen bestand, wurde in einen Schraubstock eingeklemmt, rings mit Schnee umgeben und das über den Schmelzpunkt hoch erhitzte Jodsilber hineingegossen. Auf diese Art war die Abkühlung eine sehr rasche und fand gleichzeitig unter starkem äußeren Drucke statt, was die Bildung größerer, ausgebildeter Kristalle hinderte und verhältnismäßig widerstandsfähige Stäbe von nahezu amorpher Beschaffenheit lieferte. Auch bestand der große Vorteil dieser Methode des Gießens darin, daß die feingewalzten Drähte eines Thermoelementes zwischen den Teilen der Form in das Innere eingeführt werden konnten, so daß die Lötstelle im Stabe selbst eingeschmolzen war.

Der Ausdehnungskoeffizient eines auf die beschriebene Weise hergestellten Stabes wurde qualitativ folgendermaßen bestimmt. Das eine Ende wurde in einem Metallfuße auf eine feste Unterlage gestellt und auf das andere Ende ein langes, dünnes Stäbchen so gelegt, daß es einen einarmigen Hebel vorstellte. Mit einem Mikroskope konnte man die Spitze des Zeigers verfolgen, während der Jodsilberstab erwärmt und abgekühlt wurde. Ersetzte man das Jodsilber durch ein beliebiges Metall, so bewegte sich der Zeiger viel rascher nach der entgegengesetzten Richtung hin. Also war sicher nachgewiesen, daß der untersuchte Jodsilberstab einen negativen, wenn auch sehr kleinen Audehnungskoeffizienten hatte.

Die Stäbe wurden dann mit Marmorkitt in Ebonithülsen eingepickt, in einem breiten, allseits verschlossenen Holzrahmen aufgehängt und durch Anhängen von Gewichten direkt gedehnt. Dehnungsapparat, Zuleitung und das ungemein empfindliche Galvanometer (bezogen von Keiser & Schmidt) waren durch Watte und Pappdeckel sorgfältig vor Wärmeströmungen geschützt.

Um überhaupt einen von den Temperaturdifferenzen herrührenden Ausschlag am Galvanometer zu erhalten, war es notwendig, den Gesamtwiderstand w (Thermoelement + Leitung + Galvanometer) möglichst klein zu machen, was besonders

durch Wahl von dickeren Drähten für das Thermoelement (Eisen-Konstantan) erreicht wurde; in der Tat war $w \doteq 0 \cdot 65$ Ohm. Die dabei trotz der geringen Dehnung auftretenden Deformationsströme konnten dadurch vermieden werden, daß die Verbindung mit der Leitung durch fein gewalzte Kupferstreifen vermittelt wurde.

Es möge hier nur eine Versuchsreihe vollständig mitgeteilt werden, die am 7. März 1907 nachts bei vollkommener Ruhe angestellt wurde. Es wurden nacheinander $^1/_2$, 1, $1^1/_2$, 2 *kg* angehängt und abgehoben, bei $2^1/_2$ *kg* riß der Stab. Vor jedem Versuche wurde solange gewartet, bis der Spiegel des Galvanometers absolut ruhig stand, so daß noch $^1/_{10}$ *mm* sicher abgelesen werden konnte. Die Resultate der Versuche sind in der folgenden Tabelle angegeben:

Spannendes Gewicht P		Erster Ausschlag A	Erste Distanz der Umkehrpunkte $x_1 - x_2$	X	Mittleres X	Mittleres beobachtetes τ
$^1/_2$ *kg*	an..	0·8	0·4	0·6	0·3	0·00006°
	ab..	0·3	0·2	0·2		
	an..	0·5	0·7	0·1		
	ab..	0·6	0·4	0·4		
	an..	0·6	0·7	0·2		
	ab..	0·2	0·2	0·1		
1 *kg*	an..	0·9	0·4	0·7	0·4	0·00008°
	ab..	0·5	0·3	0·3		
	an..	0·4	0·4	0·2		
	ab..	0·7	0·8	0·2		
	an..	1·2	1·3	0·4		
	ab..	0·6	0·4	0·4		
$1^1/_2$ *kg*	an..	0·7	0·3	0·5	0·6	0·00012°
	ab..	0·5	0·4	0·3		
	an..	1·1	0·9	0·6		
	ab..	1·2	0·3	1·0		
	an..	1·6	1·2	0·9		
	ab..	0·6	0·4	0·4		
2 *kg*	an..	0·7	0·5	0·4	0·7	0·00014°
	ab..	0·9	0·4	0·7		
	an..	1·0	0·2	0·9		
	ab..	1·0	0·5	0·7		

Die Berechnung der Beobachtungen erfolgte nach den Formeln:

$$\tau = \frac{X.w}{R},$$

$$X = A - X_0,$$

$$X_0 = \frac{k}{1+k}(x_1 - x_2);$$

dabei war:

$k = 1 \cdot 44$ das Dämpfungsverhältnis, also $\frac{k}{1+k} = 0 \cdot 6$,

$x_1 - x_2$ die erste Distanz der Umkehrpunkte,

A der erste Ausschlag,

$w = 0 \cdot 65\, \Omega$ der Widerstand,

$R = 3280$ die thermoelektrische Konstante für die Schwingungsdauer $T = 5 \cdot 6''$.

Der Sinn der Ablenkung wurde vor und nach den Versuchen auf mehrfache Weise festgestellt. Wurde die Mitte des Stabes mit der warmen Hand berührt, so ging die Nadel des Galvanometers auf dieselbe Seite wie bei der Belastung des Stabes; eine Abkühlung der Stabmitte brachte einen entgegengesetzten Nadelausschlag in der Richtung, wie ihn die Entlastung lieferte. Ein zweites, frei eingeschaltetes Thermoelement bestätigte das Gewonnene. Es ist also damit zweifellos nachgewiesen, daß Dehnung des Jodsilbers mit einer Erwärmung und die Zusammenziehung mit einer Abkühlung verbunden ist.

Berechnet man die Temperaturänderungen an der Hand der von W. Thomson für vollkommen elastische Körper aufgestellten Formel

$$\tau = -\frac{T_0 . \alpha . P}{427 . \omega . c},$$

worin T_0 die absolute Temperatur, α den linearen Ausdehnungskoeffizienten, P das spannende Gewicht in Kilogramm, ω das Gewicht der Längeneinheit (1 *m*) in Kilogramm und c die spezifische Wärme bedeutet, so findet man Werte, die nach der Größenordnung mit den beobachteten ziemlich übereinstimmen. Der Stab hatte eine mittlere Dicke $2r = 4 \cdot 00$ *mm*,

ein spezifisches Gewicht $\sigma = 5 \cdot 62$ und für die spezifische Wärme wurde die von Regnault angegebene Zahl $c = 0 \cdot 0616$ genommen. Der lineare Ausdehnungskoeffizient des Jodsilbers ist von Fizeau bestimmt worden, der für geschmolzenes AgJ $\alpha = -0 \cdot 00000139$ bei 40° erhielt. Ferner zeigte er, daß die Änderung desselben mit der Temperatur sehr bedeutend ist, so daß sich für 17° $\alpha = -0 \cdot 00000107$ ergibt. Dieser Wert gilt aber nur unter der Voraussetzung, daß das Silberjodid vollkommen amorph ist. Bedenkt man aber, daß unser Stab sicher nicht vollständig amorph war, sondern aus lauter kleinen Kriställchen — die zum hexagonalen System gehören — bestand, so ist, wie aus dem folgenden erhellt, ein noch kleinerer Ausdehnungskoeffizient zu nehmen. Denn der Jodsilberkristall hat die Eigentümlichkeit, daß er in der Richtung der Hauptachse ein negatives und normal darauf ein positives α hat, nämlich:

$$\alpha_1 = -0 \cdot 000003966, \; \alpha_2 = +0 \cdot 000000647.$$

Hieraus findet man den mittleren linearen Ausdehnungskoeffizienten nach der Formel:[1]

$$\alpha = \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2) = -0 \cdot 000000891.$$

Legt man nun beide Zahlen der Berechnung zu Grunde, so findet man die in der folgenden Tabelle enthaltenen Temperaturänderungen:

P	τ berechnet (amorph)	τ berechnet (kristallinisch)	τ beobachtet
½ *kg*........	0·00008°	0·00007°	0·00006°
1 *kg*.........	0·00017	0·00014	0·00008
1½ *kg*......	0·00025	0·00021	0·00012
2 *kg*.........	0 00033	0·00028	0·00014

[1] Winkelmann, Handbuch der Physik, II, 2, p. 76, 1896. Zu ähnlichen Resultaten kommt man, wenn man den Jodsilberstab als einen kristallinischen Rotationskörper auffaßt und nun die allgemeinen thermodynamischen Formeln von W. Voigt, Thermodynamik, I, p. 300, 1903, anwendet.

Daraus ersieht man also, daß die Erscheinung qualitativ unbedingt nachgewiesen ist, ja sogar quantitativ wenigstens insofern, als bei wachsendem Zuge die Temperaturänderungen regelmäßig ansteigen. Dividiert man die beobachteten Temperaturdifferenzen durch die dazugehörigen Gewichte, so erhält man, wenn die erste Beobachtung nicht berücksichtigt wird, für die 1 *kg* entsprechenden Erwärmungen die Werte: 0·00008, 0·00008, 0·00007.

Eine vollständige Befriedigung der Thomson'schen Formel konnte bei der Kleinheit der zu messenden Temperaturänderungen wohl nicht erwartet werden.

Über den Pohlke'schen Satz

von

Erwin Kruppa.

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Juni 1907.)

Die synthetische Geometrie lehrt den Satz, daß sich alle Maßbegriffe als projektive Beziehungen der geometrischen Gebilde zum absoluten Kegelschnitt I darstellen lassen. So kann der Wert eines Winkels $\widehat{AB}$ durch die Formel ausgedrückt werden:

$$\widehat{AB} = \frac{1}{2i} l_{\text{nat}} (a_u b_u i_1 i_2),$$

welche zeigt, daß er nur von dem Doppelverhältnis abhängig ist, das die unendlich fernen Punkte $a_u b_u$ seiner Schenkel mit I bestimmen.

Prof. Dr. E. Müller (Wien) macht in seinem Berichte: »Die darstellende Geometrie als eine Versinnlichung der abstrakten projektiven Geometrie«[1] darauf aufmerksam, daß der obige Satz fähig ist, eine einheitliche Grundlage für die Lösung sämtlicher Aufgaben über Maßverhältnisse in allen linearen Abbildungsmethoden der darstellenden Geometrie zu liefern und er zeigte in seinen Vorlesungen über die »Abbildungsmethoden der darstellenden Geometrie« im Studienjahr 1905/06 an der Technischen Hochschule in Wien seinen Hörern die konstruktive Verwertung dieses Gedankens.

---

[1] Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 14, 1905.

Der im nachfolgenden gegebene Beweis des Pohlke'schen Satzes und einige sich anschließende Folgerungen sind geeignet, die Fruchtbarkeit dieses Gedankens darzutun.

Wir sprechen den Satz in folgender Form aus:

Ein Viereck $u'x'y'z'$ der Bildebene kann aufgefaßt werden als Parallelprojektion eines Tetraeders $uxyz$, das zu einem gegebenen Tetraeder $u^\times x^\times y^\times z^\times$ ähnlich ist.

Es soll nun gezeigt werden, daß es im ganzen acht Tetraeder $uxyz$ gibt, welche dem Satze genügen, von denen jedoch vier imaginär sind.

Legt man durch den Punkt $u^\times$ den Minimalkegel und schneidet ihn mit der Ebene $\omega^\times$ der übrigen Eckpunkte $x^\times y^\times z^\times$, so erhält man einen nullteiligen Kreis $K^\times$.

Wird das Dreieck $x^\times y^\times z^\times$ dem Dreieck $x'y'z'$ affin zugeordnet, so entspricht dem Kreis $K^\times$ ein nullteiliger Kegelschnitt K' der Bildebene.

Man nehme nun in der Bildebene einen nullteiligen Kreis D_i an, der in u' dieselbe Involution konjugierter Strahlen erzeugt wie K'. D_i und K' entsprechen einander dann in zwei reellen perspektiven Kollineationen; u' ist für beide das Kollineationszentrum und die beiden reellen Sehnen E_1 und E_2 von D_i und K' sind Kollineationsachsen.

Legt man durch D_i einen Minimalkegel, so kann K' aufgefaßt werden als Schrägriß von zwei ebenen Schnitten K_1 und K_2 dieses Minimalkegels, für eine Projektionsstrahlenrichtung, die durch den uneigentlichen Punkt p der Verbindungslinie der reellen Spitze u des Minimalkegels mit u' als Projektionszentrum bestimmt ist. Wir bezeichnen die Ebenen von K_1 und K_2 mit ω_1 und ω_2 und bemerken, daß sie reell sind. Das projizierende Prisma durch das Dreieck $x'y'z'$ der Bildebene schneidet ω_1 und ω_2 in zwei Dreiecken, die $x_1y_1z_1$ und $x_2y_2z_2$ heißen mögen.

Die Ebene $\omega^\times$ wurde affin der Bildebene zugeordnet; durch die eben eingeführte Parallelprojektion ist nun $\omega^\times$ auch mit den Ebenen ω_1 und ω_2 affin verwandt. Beachtet man aber, daß dem Kreise $K^\times$ in $\omega^\times$, der Kreis K_1 in ω_1 und der Kreis K_2 in ω_2 entsprechen, so folgt, daß das Dreieck $x^\times y^\times z^\times$ zu den Dreiecken $x_1y_1z_1$ und $x_2y_2z_2$ ähnlich ist.

Verbindet man nun die Punkte $x_1\, y_1\, z_1$ mit der Spitze u des Minimalkegels, so entstehen daselbst die Winkel α, β, γ, welche mit denen bei $u^\times$ am gegebenen Tetraeder übereinstimmen müssen, weil die Doppelverhältnisse der Punktepaare $x^\times y^\times$, $y^\times z^\times$, $x^\times z^\times$ mit $K^\times$ gleich sind den Doppelverhältnissen der Punktepaare $x_1 y_1$, $y_1 z_1$, $x_1 z_1$ mit K_1. Somit ist das Tetraeder $u x_1 y_1 z_1$ eine Lösung unseres Satzes. Dasselbe gilt für das Tetraeder $u x_2 y_2 z_2$. Da man durch den nullteiligen Kreis D_i zwei Minimalkegel legen kann, so erhält man zwei weitere reelle Lösungen, die zu den bereits gefundenen bezüglich der Bildebene symmetrisch liegen. Das Tetraeder $u x_2 y_2 z_2$ ist das Spiegelbild des Tetraeders $u x_1 y_1 z_1$ bezüglich der durch u gehenden, zum Projektionsstrahl normalen Ebene.

Benützt man an Stelle des nullteiligen Kreises D_i einen reellen Kreis D_r, der in u' dieselbe Involution konjugierter Strahlen erzeugt wie K', und wiederholt genau den gegebenen Gedankengang, so gelangt man zu vier imaginären Lösungen des Pohlke'schen Satzes.

Der durchgeführte Gedankengang läßt sich auch leicht zeichnerisch verfolgen, wodurch man eine recht einfache Konstruktion des Projektionsstrahles und des Spurdreieckes der Bildebene erhält. Gewöhnlich hat man es in der Achsonometrie mit einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreibein zu tun. In diesem Falle ist das Dreieck $x'y'z'$ Polardreieck und sein Schwerpunkt der Mittelpunkt von K'. Zeichnet man in u' das Rechtwinkelpaar der Involution, so enthält der eine Rechtwinkelstrahl die Mittelpunkte aller Kreise D_i, der andere die der Kreise D_r. Der reelle Vertreter D von D_i ist der Distanzkreis des Punktes u und uu' ist der gesuchte Projektionsstrahl. Bei der Konstruktion der reellen Sehnen E_1 und E_2 von D_i und K' wird man beachten, daß D_i und K' perspektiv kollinear liegen.

Zeichnet man die dem Dreieck $x'y'z'$ in den beiden Kollineationen entsprechenden Dreiecke, so erhält man die Spurdreiecke mit der Bildebene. Diese Konstruktion wird man anwenden müssen, wenn das Dreibein eine allgemeine Gestalt hat. Ist es jedoch bei u rechtwinklig, so gelangt man auf folgendem Weg sehr rasch zum Ziele. Man zeichnet die Pole der Geraden ux', uy', uz' in Bezug auf D_i. Zwei Eckpunkte des Spurendreieckes

sind nun dadurch ausgezeichnet, daß sie bezüglich D_i konjugiert sind und ihre Verbindungslinie durch einen bestimmten dieser Pole hindurchgeht.

Die im vorausgehenden beschriebene Konstruktion des Projektionsstrahles und des Spurdreieckes für den allgemeinen Fall kann immer ausgeführt werden, sobald in der Bildebene ein Viereck $u'x'y'z'$ und ein beliebiger Kegelschnitt K' gegeben sind. Jeder Veränderung von K' entspricht eine Veränderung der Gestalt und der Lage des entsprechenden Tetraeders im Raume. Da aber alle Tetraeder des Raumes zueinander affin verwandt sind, so ergibt sich der Satz:

Die achsonometrische Abbildung des Raumes wird projektiv durch das Viereck $u'x'y'z'$ und metrisch durch den Kegelschnitt K' festgelegt.

Wir machen von diesem Satze sogleich Gebrauch. Von einem Ellipsoid sei ein Tripel konjugierter Durchmesser $\overline{ux}$, $\overline{uy}$, $\overline{uz}$ bekannt, sowie eine Parallelprojektion $u'x'y'z'$ desselben. Man konstruiere den Umriß des Ellipsoides. Wir ersetzen das Ellipsoid durch eine Kugel, für die $u'x'y'z'$ die Projektion eines orthogonalen Tripels von Kugelradien ist. Wir konstruieren dieses rechtwinklig-gleichschenklige Dreibein und haben dadurch eine Kugel bestimmt, die zufolge des zuletzt ausgesprochenen Satzes denselben Umriß haben muß wie das gegebene Ellipsoid. Es kann im allgemeinen der Satz von Nutzen sein, wenn sich in der Reihe der zu dem darzustellenden Körper affinen einer befindet, der in Bezug auf die Darstellung einfacher ist.

Durch metrische Spezialisierung der Achsonometrie, das ist also durch Veränderung von K', lassen sich aus der Achsonometrie alle anderen Parallelprojektionen herleiten, was nun von diesem Standpunkte aus gezeigt werden soll.

Die Projektionsstrahlen stehen normal auf der Bildebene, wenn die in u' von K' hervorgerufene Involution eine Rechtwinkelinvolution ist, wenn mithin u' Brennpunkt von K' ist. In diesem Falle fallen zwei Paare reeller und zwei Paare imaginärer Lösungen zusammen. Die gewöhnliche orthogonale Achsonometrie liegt dann vor, wenn u' Brennpunkt und $x'y'z'$ Polardreieck von K' ist.

Geht K' durch die Schnittpunkte der Minimalgeraden durch u' mit $\overline{x'y'}$, so ist der Winkel $x^{\times}u^{\times}y^{\times}$ gleich dem Winkel $x'u'y'$. In diesem Fall ist die Ebene ux_1y_1 parallel zur Bildebene, was natürlich nicht hindert, die Konstruktionsmethoden der Achsonometrie anzuwenden. Faßt man die zur Bildebene parallele Ebene ux_1y_1 als zweite Fundamentalebene auf, so liegt das gewöhnlich als schiefe Projektion bezeichnete Zweispurensystem vor. Es ist klar, wie man von der Methode der schiefen Projektion auf die achsonometrische übergehen wird.

Durch Parallelverschiebung in der Richtung der Projektionsstrahlen kann die Ebene ux_1y_1 mit der Bildebene zur Deckung gebracht werden. Dann ist auch der achsonometrische Grundriß eine direkte Parallelprojektion des Objektes auf die Bildebene. Es handelt sich also hier um ein Zweibildersystem, bei dem das Objekt aus zwei verschiedenen unendlich fernen Projektionszentren direkt auf die Bildebene projiziert wird. Auch hier wird man mit den achsonometrischen Konstruktionsmethoden auskommen.

Um auch zum Auf- und Grundrißverfahren zu gelangen, legen wir wieder K' durch die Schnittpunkte der Minimalgeraden durch u' mit $\overline{x'y'}$ und machen die weiteren Annahmen, daß der reelle Vertreter D von D_i durch u' gehe und z' der Pol von $x'y'$ bezüglich K' sei.

Unter diesen Voraussetzungen ist der achsonometrische Grundriß eine orthogonale Projektion auf die zur Bildebene parallele Ebene ux_1y_1 und das achsonometrische Bild ist eine Parallelprojektion für eine unter 45° gegen die Bildebene geneigte Projektionsstrahlenrichtung. Führt man nun eine zu $\overline{u'z'}$ normale Ebene als Aufrißebene ein, so sieht man ohneweiters, wie man den Aufriß a_2 eines Punktes a konstruieren wird, wenn sein achsonometrisches Bild a'' und sein Grundriß a' gegeben sind.

Umgekehrt wird man, falls a_2 und a' gegeben sind, a'' durch eine einfache Streckenübertragung finden, und somit auch im stande sein, eine Aufgabe, die in Auf- und Grundrißverfahren zu lösen ist, nach der Methode der schiefen Achsonometrie durchzuführen.

Zum Schlusse soll noch einmal der Grundgedanke dieses Aufsatzes hervorgehoben werden, der darin besteht, daß durch die Annahme des Kegelschnittes K' die Parallelprojektion metrisch festgelegt ist.

Meinem geehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Emil Müller (Wien), sage ich für sein freundliches Entgegenkommen bei dieser Arbeit meinen wärmsten Dank.

Die Fehlerflächen topographischer Aufnahmen

von

Prof. **A. Klingatsch** in Graz.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. Mai 1907.)

I.

Das Ergebnis der geodätischen Punktbestimmung bilden die Koordinaten x, y, z, welche als Funktionen jener der gegebenen Fundamentalpunkte sowie der gemessenen und somit mit unregelmäßigen Fehlern behafteten Bestimmungselemente anzusehen sind.

Bedeuten M_x, M_y, M_z die mittleren Fehler in x, y, z, so sind diese und somit auch der mittlere Punktfehler M Funktionen von x, y, z, so daß

$$M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = F(x, y, z) \qquad 1)$$

zu setzen ist.

Hiebei enthält 1) Koeffizienten, welche für dieselben Fundamentalpunkte und dieselben Operationen konstante gegebene Größen sind. Alle Punkte, welchen derselbe mittlere Punktfehler M zukommt, liegen gemäß 1) auf einer Fläche, welche als Fehlerfläche bezeichnet werden soll. Für alle mit den Meßoperationen verträglichen Werte von M erhält man daher, solange die Bedingungen für die Unveränderlichkeit der Koeffizienten in 1) zutreffen, eine Schar von Fehlerflächen, für welche M den Parameter bildet. Jede einzelne derselben begrenzt dann dasjenige Gebiet, in welchem die von den gegebenen Punkten nach dem der Gleichung 1) zu Grunde

liegenden Verfahren vorzunehmenden Punktbestimmungen den durch M definierten Genauigkeitsgrad nicht überschreiten.

Werden von denselben oder aber von anderen Fundamentalpunkten Operationen vorgenommen, welche auf anderen Grundlagen beruhen, so erhält man auch eine andere Schar von Fehlerflächen. Werden dann die demselben M entsprechenden Flächen dieser beiden Scharen zum Schnitt gebracht, so liegen die betreffenden Schnittkurven auf einer neuen Fläche, welche als Grenzfläche bezeichnet werden soll. Sie begrenzt eben dasjenige Gebiet, in welchem das eine oder das andere Verfahren genauer wird, indem die Grenzfläche ihrer Erzeugung gemäß diejenigen Punkte enthält, für deren Bestimmung beide Methoden dieselbe Genauigkeit gewähren.

Die Fehlerflächen haben daher für die räumliche Punktbestimmung dieselbe Bedeutung wie die Fehlerkurven[1] für die Beurteilung der Genauigkeit der Projektion dieser Punkte auf deren Ebene. Sie werden in allen jenen Fällen ihren Zweck, einen Einblick in die Genauigkeitsverhältnisse geodätischer Operationen zu geben, erfüllen, in welchen von einem oder von mehreren gegebenen Punkten zahlreiche neue Punktbestimmungen durchzuführen sind, wie dies bei topographischen Aufnahmen der Fall ist.

In dieser Hinsicht kommen gegenwärtig zwei Methoden zur Anwendung, die tachymetrische und die photographische, wobei die letztere in dem stereophotogrammetrischen Meßverfahren in jüngster Zeit eine wesentliche Vervollkommnung erlangte.

Die Grenzfläche zwischen der tachymetrischen und der Stereoaufnahme, hiebei dieselben der Aufnahme zu Grunde liegenden Punkte vorausgesetzt, wird dann Anhaltspunkte liefern, wie weit die Stereophotogrammetrie die für ziviltechnische topographische Aufnahmen bisher fast ausschließlich angewendete tachymetrische Methode bezüglich der Genauigkeit ersetzen kann.

Mit dem Vorstehenden ist auch der Inhalt dieser Abhandlung angedeutet, welche sich mit den Fehlerflächen für das

[1] Klingatsch, Die Fehlerkurven der photographischen Punktbestimmung. Diese Sitzungsberichte, Bd. CXV, Abt. IIa, Juli 1906.

tachymetrische, das stereophotogrammetrische und das photogrammetrische Aufnahmsverfahren und den betreffenden Grenzflächen beschäftigt.

II.

Zur Entwicklung der Gleichung der Fehlerfläche für die tachymetrische Punktbestimmung aus einem als fehlerfrei gegeben vorausgesetzten Fundamentalpunkte wird der Mittelpunkt O des in diesem Punkte aufgestellten Instrumentes als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems XYZ angenommen, wobei Y mit der Vertikalen durch O zusammenfallen soll.

Sind x, y, z die Koordinaten des zu bestimmenden Punktes P, α der Winkel, welchen $\overline{OP} = \rho$ mit der Projektion E auf XZ bildet, endlich ω der Winkel zwischen E und X, so ist

$$\left.\begin{aligned} x &= E.\cos\omega, \quad y = E.\operatorname{tg}\alpha, \quad z = E.\sin\omega, \\ \text{wo} \quad E &= \sqrt{x^2+z^2}, \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

ist.

Die tachymetrische Punktbestimmung gibt E und y nach den Gleichungen

$$E = CL\cos^2\alpha, \quad y = CL\sin\alpha\cos\alpha, \qquad 3)$$

wenn C die Konstante des Fadendistanzmessers und L den Unterschied der Ablesungen an den Seitenfäden an einer lotrechten durch P gehenden geteilten Latte bedeutet, während α durch die Ablesung am Höhenkreise des Instrumentes erhalten wird.

Bezeichnen ΔC, ΔL, $\Delta\alpha$, $\Delta\omega$ die Änderungen, welche die voneinander unabhängigen C, L, α, ω infolge von Messungsfehlern erfahren, so erhält man aus 2) wegen 3), da lediglich die ersten Ableitungen zu berücksichtigen sind, für die Koordinatenänderungen Δx, Δy, Δz:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= \frac{\partial x}{\partial C}\cdot\Delta C + \frac{\partial x}{\partial L}\cdot\Delta L + \frac{\partial x}{\partial\alpha}\cdot\Delta\alpha + \frac{\partial x}{\partial\omega}\cdot\Delta\omega \\ \Delta y &= \frac{\partial y}{\partial C}\cdot\Delta C + \frac{\partial y}{\partial L}\cdot\Delta L + \frac{\partial y}{\partial\alpha}\cdot\Delta\alpha, \\ \Delta z &= \frac{\partial z}{\partial C}\cdot\Delta C + \frac{\partial z}{\partial L}\cdot\Delta L + \frac{\partial z}{\partial\alpha}\cdot\Delta\alpha + \frac{\partial z}{\partial\omega}\cdot\Delta\omega \end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

Werden die Differentialquotienten mit Benützung von 2) und 3) durch x, y, z, respektive E ausgedrückt, so folgt

$$\left.\begin{array}{llll} \frac{\partial x}{\partial C} = \frac{x}{C}, & \frac{\partial x}{\partial L} = \frac{x}{L}, & \frac{\partial x}{\partial \alpha} = -\frac{2xy}{E}, & \frac{\partial x}{\partial \omega} = -z \\ \frac{\partial y}{\partial C} = \frac{y}{C}, & \frac{\partial y}{\partial L} = \frac{y}{L}, & \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{E^2-y^2}{E}, & \\ \frac{\partial z}{\partial C} = \frac{z}{C}, & \frac{\partial z}{\partial L} = \frac{z}{L}, & \frac{\partial z}{\partial \alpha} = -\frac{2yz}{E}, & \frac{\partial z}{\partial \omega} = x \end{array}\right\} \quad 5)$$

Wird ferner

$$\frac{\Delta C}{C} = m_c, \quad \frac{\Delta L}{L} = m_l + m_\delta . \operatorname{tg} \alpha \,^* \qquad 6)$$

gesetzt, wo m_c und m_l für einen bestimmten Apparat gegebene, von x, y, z unabhängige Fehlerverhältnisse und m_δ die Abweichung der Latte von der Vertikalen durch P bedeuten, so erhält man mit 5) aus 4), wenn hier ΔC, ΔL, $\Delta \alpha$, $\Delta \omega$ und demgemäß in 6) auch m_c, m_l und m_δ in die betreffenden mittleren unregelmäßigen Fehler übergehen, die Koordinatenfehler M_x^2, M_y^2, M_z^2.

Der für unsere Untersuchungen lediglich in Betracht kommende mittlere Punktfehler M läßt sich dann wegen 1) in der Form

$$\left.\begin{array}{l} M^2 = [(m_c^2 + m_l^2 + m_\alpha^2) + (m_\alpha^2 + m_\delta^2) \operatorname{tg}^2 \alpha + m_\omega^2 . \cos^2 \alpha] . \rho^2 \\ \text{oder} \\ \qquad M^2 = f(\alpha) . \rho^2 = F(x, y, z) \end{array}\right\} \quad 7)$$

darstellen.

Die Fehlerflächen sind demnach zu XZ symmetrische Rotationsflächen vierten Grades mit Y als Drehungsachse.

---

* R. Wagner, Über die mit dem Reichenbach'schen Distanzmesser erreichbare Genauigkeit. Z. f. Verm. 1886, p. 103. Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, 3. Aufl., 1888, II. Bd., p. 578.

III.

Von der durch 7) gegebenen Fläche kommt als Fehlerfläche tatsächlich nur diejenige Zone in Betracht, welche mit dem Instrumente noch bestrichen werden kann. Diese Zone ist somit durch die dem größten Winkel $\pm \alpha$ entsprechenden Kreisschnitte begrenzt, längs welcher mit den gebräuchlichen Instrumenten, den Tachymetern, noch Einstellungen und Lattenablesungen möglich sind. Die in 7) auftretenden mittleren Teilfehler, also die Koeffizienten von 1), sind ferner der Größe nach innerhalb angebbarer, von dem verwendeten Apparat und dem Beobachter abhängigen Grenzen bekannt, so daß es naheliegend ist, die Fehlerfläche 7) durch eine einfachere, nämlich eine Rotationsfläche zweiten Grades, zu ersetzen, welche sich innerhalb des Geltungsbereiches jener möglichst anschließt.

Wir setzen zu diesem Zwecke, da gemäß 7) Y die Drehungsachse ist,

$$M'^2 = (A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha) . \rho^2 = \varphi(\alpha) . \rho^2. \qquad 8)$$

Von den verschiedenen Bedingungen, welche zur Ermittlung der die Halbachsen bestimmenden Konstanten A, B gestellt werden können, um die Aufgabe zu bestimmen, benützen wir eine, welche sich aus der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die näherungsweise Darstellung gegebener Funktionen ergibt.

Es sollen nämlich A und B aus der Bedingung hergeleitet werden, daß $[\varepsilon\varepsilon]$ ein Minimum wird, wenn

$$\varepsilon = \varphi(\alpha) - f(\alpha) \qquad 9)$$

der Repräsentant aller Fehlergleichungen ist, wenn man α alle Werte zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ in den Intervallen $d\alpha$ annehmen läßt. Wegen der Symmetrie von 7) genügt es, hiebei die Integrationen auf die Grenzen 0 und α zu beschränken.

Mit 7), 8), 9) lauten dann die beiden zur Bestimmung von A und B dienenden Gauß'schen Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
A\int_0^\alpha \cos^4\alpha\, d\alpha + B\int_0^\alpha \sin^2\alpha \cos^2\alpha\, d\alpha = \\
\quad = (m_c^2 + m_l^2 + m_\alpha^2)\int_0^\alpha \cos^2\alpha\, d\alpha + \\
\qquad + (m_\alpha^2 + m_\delta^2)\int_0^\alpha \sin^2\alpha\, d\alpha + m_\omega^2 \int_0^\alpha \cos^4\alpha\, d\alpha \\
A\int_0^\alpha \sin^2\alpha \cos^2\alpha\, d\alpha + B\int_0^\alpha \sin^4\alpha\, d\alpha = \\
\quad = (m_c^2 + m_l^2 + m_\alpha^2)\int_0^\alpha \sin^2\alpha\, d\alpha + \\
\qquad + (m_\alpha^2 + m_\delta^2)\int_0^\alpha \mathrm{tg}^2\alpha \sin^2\alpha\, d\alpha + m_\omega^2 \int_0^\alpha \sin^2\alpha \cos^2\alpha\, d\alpha
\end{array}\right\} \quad 10)$$

Werden keine größeren Fernrohrneigungen als $\alpha = 30°$ vorausgesetzt, so erhält man aus 10) für die

Annahme *a)*:

$$m_c = 0\cdot0001,\ m_l = 0\cdot001;\ m_\alpha = m_\omega = \frac{60''}{206265},\ m_\delta = 0$$

$$A = 117865.10^{-11},\quad B = 120110.10^{-11}; \qquad 10a)$$

hingegen für die

Annahme *b)*:

$$m_c = 0\cdot001,\ m_l = 0\cdot002;\ m_\alpha = m_\omega = \frac{60''}{206265},\ m_\delta = 0$$

$$A = 516405.10^{-11},\quad B = 525532.10^{-11}. \qquad 10b)$$

Die zweite Annahme entspricht einem mittleren Fehlerverhältnis m_c in der Konstantenbestimmung und einem ebensolchen m_l in der Bestimmung des Lattenabschnittes, wie dies im allgemeinen bei topographischen Arbeiten zu technischen Zwecken vorausgesetzt werden kann.

Die erste Annahme hingegen nähert sich mehr den Verhältnissen, wie sie bei genaueren Arbeiten vorausgesetzt werden

können. Bei *a)* und *b)* wurden die mittleren Fehler m_α und m_ω in den gemessenen Höhen- und Horizontalwinkeln mit einer Minute angesetzt.

Die nachstehende Tabelle gibt für die dort angegebenen α die nach 7) berechneten M, ferner die aus 8) mit 10*a*) und 10*b*) erhaltenen M', endlich die Differenzen $M - M' = \Delta M$.

α	*a)*			*b)*		
°	$10^8 \cdot \frac{M'}{\rho}$	$10^8 \cdot \frac{M}{\rho}$	$10^8 \cdot \frac{\Delta M}{\rho}$	$10^8 \cdot \frac{M'}{\rho}$	$10^8 \cdot \frac{M}{\rho}$	$10^8 \cdot \frac{\Delta M}{\rho}$
0	108556	108592	+36	227246	227359	113
5	108573	108598	+25	227260	227360	100
10	108597	108601	+ 4	227306	227361	55
15	108635	108611	—24	227379	227369	— 10
20	108686	108653	—33	227481	227389	— 92
25	108750	108744	— 6	227604	227432	—172
30	118824	108916	+92	227747	227514	—233

Ersetzt man demnach 7) durch 8), so ist für die beiden Annahmen im allgemeinen $\frac{\Delta M}{M} < \frac{1}{1000}$. Die Abplattung des Rotationsellipsoides 8) ist dann eine geringe; sie wird jedoch wesentlich stärker, wenn auch ein Lattenaufstellungsfehler m_δ vorausgesetzt wird. Weicht beispielsweise die Latte um 30′ von der richtigen, der vertikalen Lage ab, so erhält man, wenn sonst die Werte *b)* beibehalten werden, aus 10)

$$A = 458810.10^{-11}; \quad B = 101696.10^{-9},$$

so daß für $\alpha = 10°$

$$\frac{10^8.M'}{\rho} = 274174, \quad \frac{10^8.M}{\rho} = 274537, \quad \frac{10^8.\Delta M}{\rho} = 363$$

wird.

Für die folgenden Untersuchungen wird als Fehlerfläche die durch 8) gegebene benützt, deren Gleichung mit $M' = K$ in rechtwinkligen Koordinaten

$$A(x^2+z^2)+By^2 = K^2 \qquad 11)$$

ist, wo A und B für gegebene Teilfehler aus 10) zu bestimmen sind und K den Parameter für die ganze Schar bedeutet.

IV.

Die Fehlerfläche für die stereophotogrammetrische Punktbestimmung beziehen wir auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt O_1 mit dem Hauptpunkte des Kameraobjektives des über dem einen — als fehlerfrei vorausgesetzten — der beiden die Standlinie bestimmenden Fundamentalpunkte aufgestellten Instrumentes zusammenfallen soll. Ist O_2 die Projektion des zweiten Fundamentalpunktes auf die durch O_1 gehende Horizontalebene, so nehmen wir $O_1 O_2$ als Richtung der X. Die Bildebene wird bei den Aufnahmen in beiden Standpunkten vertikal und parallel zu $O_1 O_2$ vorausgesetzt; wird schließlich die Vertikale durch O_1 als Richtung der Y angenommen, so ist jene der Z parallel zur optischen Achse des Apparates.

Bezeichnen $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_1 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_2$ die auf das Achsenkreuz der Aufnahmsplatten bezogenen Bilder desselben Punktes, ferner $\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{a}$ die stereoskopische Parallaxe, f die Bilddistanz, $\overline{O_1 O_2} = l$ die Projektion der Standlinie auf X, endlich x, y, z die Koordinaten von P, so gelten die Gleichungen[1]

$$x = \frac{l}{\mathfrak{a}} \mathfrak{x}_1, \quad y = \frac{l}{\mathfrak{a}} \mathfrak{y}_1, \quad z = \frac{l}{\mathfrak{a}} f. \tag{12)}$$

Da $l, f, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{a}$ voneinander unabhängige gemessene Größen sind, hat man aus 12)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial l} &= \frac{x}{l}, & \frac{\partial x}{\partial \mathfrak{x}_1} &= \frac{z}{f}, & \frac{\partial x}{\partial \mathfrak{a}} &= -\frac{xz}{fl} \\
\frac{\partial y}{\partial l} &= \frac{y}{l}, & \frac{\partial y}{\partial \mathfrak{y}_1} &= \frac{z}{f}, & \frac{\partial y}{\partial \mathfrak{a}} &= -\frac{yz}{fl} \\
\frac{\partial z}{\partial l} &= \frac{z}{l}, & \frac{\partial z}{\partial f} &= \frac{z}{f}, & \frac{\partial z}{\partial \mathfrak{a}} &= -\frac{z^2}{fl}
\end{aligned}\right\} \tag{13)}$$

[1] Schell, Die stereophotogrammetrische Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume. Wien, 1904.

Bezeichnet m_b den mittleren Fehler der gemessenen und auf den Horizont von O_1 reduzierten Standlinie, m_f jenen in der Bildweitenbestimmung, m_x, m_y die mittleren Fehler in der Koordinatenausmessung, endlich m_a den mittleren Fehler in der Parallaxenbestimmung, so hat man, da unbeschadet der Allgemeinheit $m_x = m_y = m_f$ gesetzt werden kann, aus 1) mit $M = K$ die Gleichung der Fehlerfläche

$$(x^2+y^2+z^2)(a+bz^2)+cz^2 = K^2, \tag{14}$$

wo

$$a = \frac{m_b^2}{l^2}, \quad b = \frac{m_a^2}{f^2 l^2}, \quad c = \frac{3\,m_x^2}{f^2} \tag{15}$$

ist und K den Parameter für die Flächenschar bedeutet.

Der Ort gleich genauer Punktlagen ist demnach eine zu XY symmetrische Rotationsfläche vierten Grades mit Z als Drehungsachse.

Da 14) auch die Form

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= \frac{\lambda^2-c}{b} \\ a(x^2+y^2)+(a+\lambda^2)z^2 &= K^2 \end{aligned}\right\} \tag{14'}$$

gegeben werden kann, wenn λ einen Parameter bedeutet, so entsteht die einem gegebenen K entsprechende F_4 aus den Schnitten der den Werten λ entsprechenden, mit O_1 konzentrischen Kugeln mit den denselben Werten entsprechenden konzentrischen affinen Rotationsellipsoiden mit Z als Drehungsachse und XY als Affinitätsebene.

V.

Wird für zwei von demselben Fundamentalpunkte vorzunehmende Operationen nach dem tachymetrischen und dem Stereoverfahren der Anfangspunkt O des in II benützten Achsensystems mit jenem O_1 des in IV verwendeten als zusammenfallend angenommen und die X und Y so wie in IV angegeben gewählt, so bestimmen gemäß der in I gegebenen Definition 11) und 14), in welchen K denselben Wert des Punktfehlers bedeutet, die Grenzfläche zwischen den beiden Aufnahmsmethoden.

Die demselben Werte von K entsprechenden Schnittkurven liegen daher auf der zu den drei Koordinatenebenen symmetrischen F_4

$$(x^2+y^2+z^2)(a+bz^2)-A(x^2+z^2)-By^2+cz^2=0. \tag{16}$$

Mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{array}{c} A-a=a',\quad B-a=b',\quad a+c-A=c' \\ B+c-A=d',\quad B-A=e' \end{array}\right\} \tag{17}$$

kann 16) auch durch die folgenden beiden Gleichungen:

$$x^2+y^2+z^2=u \tag{18}$$

$$a'x^2+b'y^2-(c'+bu)z^2=0, \tag{19}$$

in welchen u einen Parameter bedeutet, gegeben werden.

Da 18) eine mit O konzentrische Kugelschar, 19) eine ebensolche Schar von Kegeln zweiter Ordnung, welch letztere durch jede zu Z normale Ebene in konzentrischen ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten geschnitten werden, ausdrückt, so entspricht jedem Werte u ein auf der F_4 gelegener sphärischer Kegelschnitt.

Da andrerseits jede zu Z normale Ebene die F_4 in dem Kegelschnitte

$$\frac{x^2}{\mathfrak{A}^2}+\frac{y^2}{\mathfrak{B}^2}=1, \tag{20}$$

wo

$$\mathfrak{A}^2=\frac{(bz^2+c')z^2}{a'-bz^2},\quad \mathfrak{B}^2=\frac{(bz^2+c')z^2}{b'-bz^2} \tag{21}$$

ist, schneidet, so erhält man mit

$$a+bz^2=v \tag{22}$$

die folgende Parameterdarstellung von 16)

$$\left.\begin{array}{l} x^2=m_1u+n_1u.v+o_1v+p_1 \\ y^2=m_2u+n_2u.v+o_2v+p_2 \\ z^2=\qquad\qquad\qquad o_3v+p_3 \end{array}\right\} \tag{23}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{B}{e'} = 1-m_2, \quad n_1 = -\frac{1}{e'} = -n_2, \\ o_1 &= -\frac{d'}{be'}, \quad o_2 = \frac{c}{be'}, \quad o_3 = -(o_1+o_2) \\ p_1 &= \frac{ad'}{be'}, \quad p_2 = -\frac{ac}{be'}, \quad p_3 = -(p_1+p_2) \end{aligned}\right\} \quad 24)$$

ist.

Jedem konstanten Werte von v, respektive z entspricht sohin als Kurve U ein Kegelschnitt 20). Die Mittelpunkte dieser Kegelschnitte liegen auf Z, ihre Achsen sind parallel zu X und Y.

Jedem konstanten Werte von u entspricht nach 18) und 19) als Kurve V ein sphärischer Kegelschnitt, dessen Projektionen auf die drei Koordinatenebenen die Kegelschnitte

$$\frac{x^2}{\mathfrak{A}^2_{xz}} + \frac{z^2}{\mathfrak{C}^2_{xz}} = 1, \quad \frac{y^2}{\mathfrak{B}^2_{y,z}} + \frac{z^2}{\mathfrak{C}^2_{y,z}} = 1, \quad \frac{x^2}{\mathfrak{A}^2_{xy}} + \frac{y^2}{\mathfrak{B}^2_{xy}} = 1 \quad 25)$$

sind, wo

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}^2_{xz} &= \frac{b'u}{e'}, \quad \mathfrak{C}^2_{xz} = \frac{b'u}{d'+bu}; \\ \mathfrak{B}^2_{yz} &= -\frac{a'u}{e'}, \quad \mathfrak{C}^2_{yz} = \frac{a'u}{c+bu} \\ \mathfrak{A}^2_{xy} &= \frac{(c'+bu)u}{c+bu}, \quad \mathfrak{B}^2_{xy} = \frac{(c'+bu)u}{d'+bu} \end{aligned}\right\} \quad 26)$$

ist.

Wegen 17) gilt die Beziehung

$$\mathfrak{A}^2_{xz}+\mathfrak{B}^2_{yz} = \mathfrak{A}^2_{xy}+\mathfrak{C}^2_{yz} = \mathfrak{B}^2_{xy}+\mathfrak{C}^2_{xz} = u.$$

Da in den Fällen der Anwendung A, B, a, b, c positive Größen sind und ebenso $e' > 0$ und $b' > a' > 0$ vorausgesetzt werden kann, so sind die Projektionen der sphärischen Kegelschnitte auf XZ und XY Ellipsen, auf YZ Hyperbeln.

Da unter den obigen Voraussetzungen die Kegelflächen 19) durch zu Z normale Ebenen in Ellipsen geschnitten werden, deren große Achsen parallel zu X sind, so liegen die Fokalstrahlen dieser den Werten u entsprechenden Kegel in XZ. Diese durch die Brennpunkte der sphärischen Kegelschnitte gehenden Strahlen sind bekanntlich dadurch ausgezeichnet, daß die Summe (Differenz) der Winkel, welche die Erzeugenden desselben Kegels mit diesen beiden Strahlen bilden, konstant ist.

Den Winkel ϕ, den die zu Z symmetrisch liegenden Fokalstrahlen mit Z bilden, erhält man aus der Bedingung, daß die in YZ liegenden Kegelerzeugenden mit den Fokalstrahlen wegen der Symmetrie dieselben Winkel bilden wie die in XZ liegenden Kegelerzeugenden mit Z.

Man erhält dann wegen 19) und 17)

$$\operatorname{tg}^2 \phi = \frac{e'(c'+bu)}{a'(d'+bu)}. \qquad 27)$$

Sind ξ, ζ die Koordinaten der in XZ liegenden Brennpunkte der sphärischen Kegelschnitte, also wegen 18)

$$\xi^2+\zeta^2 = u,$$

so ergibt sich, da

$$\xi^2 = u.\sin^2\phi, \quad \zeta^2 = u.\cos^2\phi$$

ist, durch Elimination von ϕ aus 27) die Gleichung der Kurve, auf welcher die Brennpunkte der den Werten u entsprechenden Kurven V liegen, mit

$$\xi^2 = \frac{(c'+bu)e'}{(c+bu)b'}\cdot u, \quad \zeta^2 = \frac{(d'+bu)a'}{(c+bu)b'}\cdot u, \qquad 28)$$

die wegen 17) auch in der Form

$$\left.\begin{aligned} \xi^2+\zeta^2 &= u \\ \frac{c+bu}{a'u}\zeta^2 - \frac{c+bu}{e'u}\xi^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad 28')$$

geschrieben werden kann.

Die Brennpunkte für die Werte u liegen daher auf der durch 28), respektive 28′) bestimmten C_4, welche sich als Schnitte einer Schar konzentrischer Kreise mit einer ebensolchen ähnlicher und ähnlich gelegener Hyperbeln ergibt, wenn Kreis und Hyperbel zu demselben Parameterwert u gehören.

Zwischen den die C_4 erzeugenden Kegelschnitten 28′) und den Projektionen 25) der Kurven V finden noch folgende Beziehungen statt.

Die Projektion der V auf XZ, also die Ellipse 25), ist bekanntlich affin zu dem Kreise, in welchem die Kugel u die XZ schneidet; die Affinitätsachse ist durch den einen der beiden Durchmesser gegeben, in welchem sich Kreis und Ellipse schneiden.

Die dem Werte u entsprechenden, auf Z liegenden Scheitel der Hyperbel 28′) fallen wegen der vierten der Gleichungen 26) mit den auf Z gelegenen Scheiteln jener Hyperbel zusammen, welche die Projektion der dem Werte u entsprechenden V auf YZ gibt.

VI.

Jede Gleichung zwischen u und v der durch 16) oder 23) dargestellten F_4 gibt mit 23) eine auf der Fläche liegende Kurve.

So entnimmt man beispielsweise aus 23) wegen 24), daß die Parameterbedingung

$$v = bu$$

diejenige auf F_4 gelegene Kurve darstellt, welche sich auf XY orthogonal als mit O konzentrischer Kreis mit dem Halbmesser $\sqrt{\frac{a}{b}}$ projiziert.

Der Schnittwinkel zwischen den Kurven U und V ist veränderlich. Man kann aber jeder U diejenige V als entsprechende zuordnen, für welche dieser Schnittwinkel ein rechter wird. Die entsprechenden U und V schneiden sich dann in einer neuen, auf der F_4 gelegenen Kurve, welche nun bestimmt werden soll.

Da wegen 23) z nur von v abhängt, lautet die bezügliche Parameterbedingung

$$\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = 0, \tag{29)}$$

welche wegen 23) mit Rücksicht auf 24) und 17) die Gleichung

$$m' u v + n' u + o' v + p' = 0 \tag{30)}$$

gibt, wo

$$\left. \begin{array}{l} m' = -\dfrac{b'+c}{b e'^2}, \quad n' = \dfrac{A.b'+ac}{b e'^2}, \quad o' = -\dfrac{cd'}{b^2 e'^2}, \\ \qquad p' = \dfrac{acd'}{b^2 e'^2} \end{array} \right\} \tag{31)}$$

ist.

Die Gleichung der gesuchten Kurve ist demnach durch 23) und 30) gegeben, indem erstere durch v dargestellt werden kann.

Die Gleichung der Projektion auf XZ ist

$$a'' z^4 + b'' x^2 z^2 + c'' x^2 + d'' z^2 = 0 \tag{32)}$$

und diejenige auf YZ

$$a''' z^4 + b''' y^2 z^2 + c''' y^2 + d''' z^2 = 0. \tag{33)}$$

Hiebei ist wegen 31) und 17)

$$\left. \begin{array}{l} a'' = \dfrac{b'd'}{b^2 e'^3}, \quad b'' = \dfrac{b'+c}{b^2 e'^2}, \quad c'' = -\dfrac{a'b'}{b^3 e'^2}, \\ \qquad d'' = \dfrac{b'c'd'}{b^3 e'^3} \\ a''' = -\dfrac{a'c}{b^2 e'^3}, \quad b''' = b'', \quad c''' = c'', \quad d''' = -\dfrac{a'c'c}{b^3 e'^3} \end{array} \right\} \tag{34)}$$

Aus 32) und 33) erhält man durch Elimination von z die Projektionsgleichung bezüglich XY, welche wegen 34)

$$y = \pm x \sqrt{\frac{a'''}{a''}} \tag{35)}$$

gibt.

Die gesuchte Kurve ist demnach der Durchschnitt der beiden durch Z gehenden, zu YZ symmetrisch gelegenen, durch 35) bestimmten Ebenen mit der Fläche. Die Gleichungen der Projektionen auf XZ und YZ können wegen 32) und 33) auch in der Form

$$\left.\begin{aligned} a''z^2+b''x^2 &= \lambda^2 \\ z &= \pm x\sqrt{\frac{-c''}{d''+\lambda^2}} \end{aligned}\right\} \tag{32'}$$

beziehungsweise

$$\left.\begin{aligned} a'''z^2+b'''y^2 &= \lambda^2 \\ z &= \pm y\sqrt{\frac{-c'''}{d'''+\lambda^2}} \end{aligned}\right\} \tag{33'}$$

wo λ einen Parameter bedeutet, geschrieben werden.

Die Projektionen sind demnach Kurven vierter Ordnung, welche sich als Schnitte einer Schar konzentrischer ähnlicher und ähnlich gelegener Kegelschnitte mit einem konzentrischen Strahlenbüschel ergeben.

Da eine reelle Kurve von der durch 29) gegebenen Bedingung auf der F_4 nur dann besteht, wenn in 35) a'' und a''' dasselbe Vorzeichen besitzen, so sind in diesem Falle die Kegelschnitte in 32') und 33') entweder beide Ellipsen oder beide Hyperbeln.

VII.

Die einem konstanten v, respektive z entsprechenden Kurven U sind durch 20) und 21) gegeben. Wir untersuchen die Normalenfläche längs einer U.

Die Gleichung der Normale an die F_4 im Punkte xyz ist, wenn ξ, η, ζ die laufenden Koordinaten bezeichnen,

$$\frac{\xi-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\zeta-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{36}$$

Wegen 16) folgt mit Rücksicht auf 17) und 22)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2(bz^2-a')x = 2(v-A)x \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2(bz^2-b')y = 2(v-B)y \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= C_1+C_2x^2 = C_1'+C_2'y^2 \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

wo

$$C_1 = \frac{b'd'-(B-v)^2}{B-v}\cdot 2z, \quad C_2 = \frac{be'}{B-v}\cdot 2z \tag{38}$$

$$C_1' = \frac{a'c-(A-v)^2}{A-v}\cdot 2z, \quad C_2' = -\frac{be'}{A-v}\cdot 2z \tag{39}$$

für konstantes v, respektive z ebenfalls konstant sind.

Da wegen 37) der Richtungskegel der Normalenfläche, wie man leicht findet, von der vierten Ordnung ist, demnach auch dieselbe Ordnung die unendlich ferne Leitkurve der Normalenfläche besitzt, welche somit gleich der Klasse der Developpablen längs U ist, so ist der Grad der Normalenfläche die Summe der Ordnungen jener unendlich fernen Leitkurve und jener des Leitkegelschnittes U. Die Normalenfläche ist demnach eine F_6. Ihr Schnitt mit XZ ergibt sich aus 36) und 37) mit

$$\eta = 0 \quad \text{und} \quad \zeta - z - \frac{C_1}{2(B-v)} = \zeta' \tag{40}$$

als die Parabel

$$\xi^2 = \frac{e}{bz}\cdot\zeta'. \tag{41}$$

Der Schnitt der Normalenfläche mit YZ folgt ebenso aus 36) und 37) mit

$$\xi = 0 \quad \text{und} \quad z - \zeta + \frac{C_1'}{2(A-v)} = \zeta'' \tag{42}$$

als die Parabel

$$\eta^2 = \frac{c}{bz}\cdot\zeta''. \tag{43}$$

Die beiden Parabeln 41) und 43), welche die gemeinsame Achse Z besitzen, geben die in XZ, respektive YZ liegenden Doppelkurven der Normalenfläche. Jede derselben gibt mit den in der betreffenden Koordinatenebene gelegenen beiden Flächennormalen den vollständigen Durchschnitt der Normalenfläche mit XZ, respektive YZ. Die beiden Doppelkurven sind demnach kongruente Parabeln.

Wird $A = v$ oder wegen 22) und 17) $z = \pm\sqrt{\frac{a'}{b}}$, so genügen 16) die beiden Werte

$$y = \pm\sqrt{\frac{a'c}{be'}}. \tag{44}$$

Die den obigen Werten von z entsprechenden Kegelschnitte degenerieren als Spezialität der Parabeln in die vier zu X parallelen, auf der Fläche liegenden geraden Linien 44). Die Flächennormalen längs derselben sind wegen 37) parallel zu YZ, welche Koordinatenebene in diesem Falle die Richtebene der Normalenfläche gibt.

Wird $B = v$, so genügen 16) die beiden Werte

$$x = \pm\sqrt{-\frac{b'd'}{be'}}. \tag{45}$$

Die entsprechenden Kurven U zerfallen dann in die vier zu Y parallelen, auf der F_4 liegenden geraden Linien 45); die XZ ist dann die Richtebene für die betreffende Normalenfläche.

VIII.

Die Tangentialebenen in den Punkten einer und derselben U bestimmen die developpable Fläche der F_4 längs dieses Kegelschnittes.

Es sei E die im Abstande z zu XY parallele Ebene der U, Ω ihr auf Z gelegener Mittelpunkt.

Sind $\xi\eta\zeta$ die laufenden Koordinaten der Tangentialebene an die F_4 im Punkte x, y, z der U, so ist ihre Gleichung wegen 16)

$$\xi\frac{\partial F}{\partial x}+\eta\frac{\partial F}{\partial y}+\zeta\frac{\partial F}{\partial z}=x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}+z\frac{\partial F}{\partial z}=$$

$$=2bz^2(x^2+y^2+z^2). \qquad 46)$$

Für den Schnitt dieser Tangentialebene mit XZ erhält man mit $\eta=0$ und wegen

$$\xi\frac{\partial F}{\partial x}=2(v-A)x.\xi$$

$$\zeta\frac{\partial F}{\partial z}=2[b(x^2+y^2+2z^2)+c']z.\zeta$$

$$x^2+y^2+z^2=\frac{e'x^2+d'z^2}{B-v}$$

die Gerade

$$f(\xi\zeta x)=f_1x\xi+(f_2x^2+f_3)\zeta+f_4x^2+f_5=0, \qquad 47)$$

wo die f lediglich von z abhängen, demnach konstant sind.

Die Einhüllende der Spuren der den Punkten von U entsprechenden Tangentialebenen ergibt sich, da x in 47) den betreffenden Parameter bildet, aus dieser und der Gleichung

$$\frac{\partial f(\xi\zeta x)}{\partial x}=0 \quad \text{oder} \quad x=\frac{(A-v)(B-v)}{2be'z(\zeta-z)}\cdot\xi.$$

Die Spuren der Tangentialebenen auf XZ umhüllen daher vermöge der Symmetrie der F_4 die beiden zusammenfallenden Kegelschnitte

$$\frac{(v-A)^2.(v-B)^2}{4b.e'.z^2}\cdot\xi^2+$$

$$+(\zeta-z)[\{-bd'z^2+(bz^2+c')(v-B)\}\zeta+bd'z^3]=0. \qquad 48)$$

Den auf Z gelegenen Punkten der einen Achse genügen demnach wegen $\xi=0$ die Koordinaten $\zeta=z$ und $\zeta=\zeta_0$, wo für den letzteren Wert der Ausdruck in der eckigen Klammer Null wird.

Mit

$$\zeta'=\zeta-\frac{1}{2}(z+\zeta_0)$$

ergibt sich die Mittelpunktsgleichung

$$\frac{\xi^2}{\mathfrak{A}'^2}+\frac{\zeta'^2}{\mathfrak{C}'^2}=1, \tag{49}$$

wo

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A}'^2&=\frac{be'z^4(bz^2+c')^2}{(v-A)^2[-bd'z^2+(v-B)(bz^2+c')]},\\ \mathfrak{C}'^2&=\frac{(v-B)^2.z^2(bz^2+c')^2}{4[-bd'z^2+(v-B)(bz^2+c')]^2}\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

ist.

Mit $A=v$ gibt 47)

$$b(\zeta-z)(e'x^2+d'z^2)+(B-v)c.\zeta=0. \tag{47'}$$

Jede durch eine der vier der Gleichung 44) entsprechenden, zu X parallelen Geraden gelegte Ebene ist dann eine Tangentialebene an die F_4; die Schnitte dieser vier Ebenenbüschel mit XZ bilden dort ebensoviele Parallelstrahlenbüschel. Die beiden Berührungspunkte jeder durch eine dieser Geraden gelegten Ebene, einem bestimmten ζ entsprechend, mit der F_4 ergeben sich aus 47'), da diese die Abszisse x gibt, während y aus 44) folgt.

Ebenso führt die Bedingung $B=v$ auf vier Strahlenbüschel in XZ, als Schnitte der durch die vier zu Y parallelen Geraden 45) gelegten Ebenenbüschel mit XZ.

Ist endlich in 21) $bz^2+c'=0$ oder wegen 22) und 17) $v=a-c'=A-c$ und sind die beiden Geraden

$$y=\pm x\sqrt{\frac{v-A}{v-B}}=\pm x\sqrt{\frac{c}{c+e'}},$$

in welche dann 20) zerfällt, reell, so liegen in dem Abstande $z=\pm\sqrt{-\frac{c'}{b}}$ vier zu XY parallele Gerade auf der Fläche, welche sich paarweise auf Z schneiden.

Die Gleichung 47) gibt dann für den Schnitt der Tangentialebene in einem Punkte dieser Geraden mit XZ, wenn $\zeta-z=\zeta'$ gesetzt wird, die Gerade

$$-bc(c+e')x\xi+(be'x^2-e'(c+e'))z.\zeta'=0.$$

Jede durch eine dieser vier Geraden gelegte Ebene ist somit wieder eine Tangentialebene an die F_4 für zwei Punkte derselben als Berührungspunkte, deren x sich aus der oberen Gleichung bestimmt. Hieraus ist auch zu schließen, daß die in VII untersuchte Normalenfläche in diesem Falle zwei Richtebenen besitzt, welche durch Z und durch die beiden Geraden, in welche 20) zerfällt, bestimmt sind.

In analoger Weise wie für XZ erhält man als Einhüllende der Spuren der Tangentialebenen längs U auf YZ Kegelschnitte, deren Gleichung mit 48) der Form nach übereinstimmt, deren Mittelpunkte ebenso auf Z liegen und deren Mittelpunktsgleichung durch

$$\frac{\eta^2}{\mathfrak{B}''^2} + \frac{\zeta''^2}{\mathfrak{C}''^2} = 1 \qquad 51)$$

gegeben ist, wo

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B}''^2 &= -\frac{be'z^4(bz^2+c')^2}{(v-B)^2[-bcz^2+(v-A)(bz^2+c')]}, \\ \mathfrak{C}''^2 &= \frac{(v-A)^2z^2(bz^2+c')^2}{4[-bcz^2+(v-A)(bz^2+c')]^2} \end{aligned}\right\} \qquad 52)$$

bedeutet.

Die Kegelschnitte 49) und 51) haben daher die eine mit Z zusammenfallende Achse der Lage nach gemein; der eine beiden gemeinsame Endpunkt dieser Achse fällt mit dem Mittelpunkte Ω der U zusammen.

Die in YZ und XZ gelegenen Normalen der F_4, welche durch die Achspunkte der U gehen, treffen die Z in den Scheiteln der Parabeln 41), respektive 43). Die Abstände dieser Scheitel von der Ebene E, also auch von Ω, sind wegen 40) und 42) $-\frac{C_1}{2(B-v)}$, beziehungsweise $\frac{C_1'}{2(A-v)}$. Da diese Normalen auf den betreffenden Tangentialebenen senkrecht stehen, so finden zwischen den Abständen $2\mathfrak{C}'$ und $2\mathfrak{C}''$ ihrer Spuren auf XZ, respektive YZ von Ω, ferner den Halbachsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ (21) der U und den erwähnten Abständen der Parabelscheitel von Ω die Relationen statt:

$$\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{C}'' \frac{C_1'}{A-v}, \quad \mathfrak{B}^2 = -\mathfrak{C}' \frac{C_1}{B-v},$$

wie diese auch aus 21), 38), 39), 50), 52) mit Beachtung von 17) hervorgehen.

Eben damit ergeben sich auch die Beziehungen

$$\left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{B}''}\right)^2 = \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{C}''} \cdot \frac{v-B}{v-A} = \left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}\right)^2 \cdot \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{C}''} = -\frac{C_1'}{C_1} \cdot \frac{B-v}{A-v}.$$

IX.

Die in den vorhergehenden Abschnitten untersuchte F_4 gibt, wie bereits bemerkt, die Grenzfläche zwischen dem tachymetrischen und dem stereophotogrammetrischen Aufnahmsverfahren, sofern eben beide Aufnahmen von demselben Punkte aus erfolgen.

Hiebei ist unter diesem Punkte bei der Stereoaufnahme derjenige von den beiden Aufstellungspunkten des photographischen Apparates gemeint, von welchem aus die zur Bestimmung der Koordinatenabmessungen $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_1$ dienende Aufnahme geschieht. Die zweite Aufnahme in dem zweiten Punkte der Standlinie, dessen Projektion auf die Horizontalebene des ersten, beziehungsweise die Horizontalebene des betreffenden Instrumenthorizontes eben die Lage der X bestimmt, bezweckt lediglich die Ermittlung der stereoskopischen Parallaxe $\mathfrak{a}$.

In der Figur ist eine Darstellung der F_4 bezüglich der in Betracht kommenden Hälfte, wobei die XZ als Zeichnungsebene angenommen ist, gegeben.

Der Konstruktion liegen für die Tachymeteraufnahme die Annahmen *a)* von III zu Grunde, so daß sich A und B aus 10*a*) ergaben.

Für die Stereoaufnahme machen wir die nachstehenden, mit den bisherigen praktischen Erfahrungen übereinstimmenden Annahmen. Das Fehlerverhältnis der gemessenen und auf den Horizont von O reduzierten Basis l sei $\frac{m_b}{l} = \sqrt{a} = 0 \cdot 001$, die mittleren Fehler m_x, m_y, m_a der im Stereokomparator zu bewirkenden Abmessungen $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_1, \mathfrak{a}$ wären $m_x = m_y = 0 \cdot 1\, mm$,

$m_a = 0 \cdot 01\ mm$; der mittlere Fehler in der Bildweitenbestimmung $m_f = 0 \cdot 1\ mm$.

Da die Grenzfläche diejenigen Punkte enthält, welche sich durch das tachymetrische und das Stereoverfahren gleich genau ergeben, so dürfen bei dem letzteren auch keine größeren, von demselben Standpunkte zu bewältigenden Entfernungen vorausgesetzt werden als bei dem ersteren, Entfernungen ρ also, welche etwa 600 m nicht überschreiten, womit die Annahme $l = 50\ m$ ihre Begründung findet.

Die Bildweite des Apparates wurde entsprechend der einen der von Zeiß angefertigten neuesten Typen mit $f = 180\ mm$ bei einem Plattenformat 13×18 angenommen.

Da durch diese Angaben die Koeffizienten 17) bestimmt sind, so können für anzunehmende z die $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nach 21) berechnet werden, wodurch die Grundlage für die Darstellung der Fläche gegeben ist.

In 21) wird hiebei

$$a' = bz^2 \text{ für } z_1 = 380 \cdot 4\ m, \quad b' = bz^2 \text{ für } z_2 = 403 \cdot 6\ m,$$

während, da $c' > 0$ stets $bz^2 + c' > 0$ bleibt.

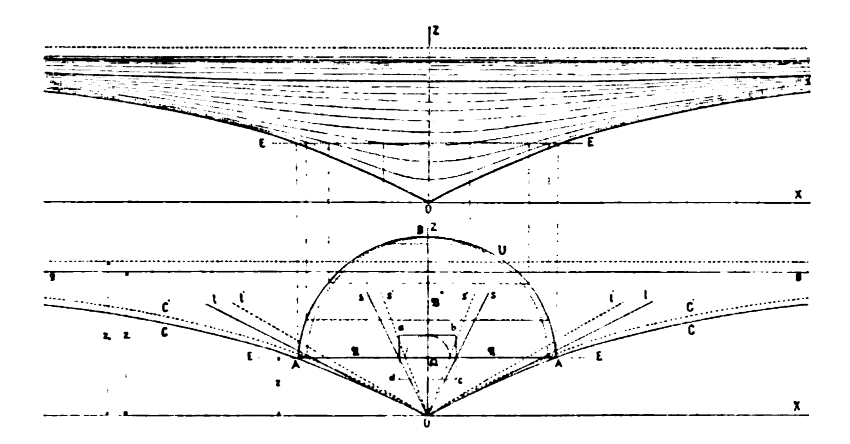
Für $o < z < z_1$ sind daher die Kurven U Ellipsen, für $z_1 < z < z_2$ hingegen Hyperbeln.

Mit $z = z_1$ erhält man, da nur positive z in Betracht kommen, die beiden zu X parallelen, auf der Fläche liegenden Geraden g in dem Abstande $y = \pm 2443\ m$ über XZ. Die beiden zu XY parallelen Ebenen $z = \pm z_2$ werden dann zu den reellen asymptotischen Ebenen der F_4.

Der obere Teil der Figur gibt die Darstellung der Fläche im Maßstab 1:200 durch Schichtenkurven; die Schichtenhöhe ist 100 m für $o < y < 1000\ m$, hingegen 200 m für $1000\ m < y < 2000\ m$. Die Schichtenkurven, welche sich demnach als Schnitte äquidistanter, zu XZ paralleler Ebenen ergeben, sind Kurven vierter Ordnung; die Schnitte ihrer Ebenen mit der Ebene $z = z_1$ geben für die betreffende C_4 die eine von den beiden reellen Asymptoten.

Der untere Teil der Figur zeigt den in der Entfernung $z = 150\ m$ parallel zu XY geführten und in die XZ umgelegten Schnitt, also die Ellipse U, sowie die Bestimmung derjenigen

Punkte ihres Umfanges, welchen gegebene Werte y entsprechen. In der Figur ist ferner C der Schnitt der F_4 mit XZ, C' der in die XZ umgelegte Schnitt der YZ mit der Fläche. Die Schnitte der zu YZ parallelen Ebenen sind C_4, welche im Schnitt ihrer respektiven Ebenen mit $z = z_2$ die eine von den beiden reellen Asymptoten haben.



In dem zwischen der XY und der Grenzfläche gelegenen Raume wäre das Stereoverfahren, in dem übrigen Raume das tachymetrische Verfahren genauer. Nun ist aber jede der beiden Operationen bezüglich ihrer Durchführbarkeit von dem angenommenen Fundamentalpunkt auf eine bestimmte Zone beschränkt. So ist die Tachymeteraufnahme von demselben Punkte aus auf Entfernungen $\rho \gtreqless 600\,m$ und Höhenwinkel $\alpha \gtreqless 30°$ zu beschränken, welch letzterer Umstand eben in III zur Herleitung einer genäherten Fehlerfläche 11) führte. Bei der Stereoaufnahme hingegen sind die von demselben Standpunkte zu beherrschenden Entfernungen wesentlich größer, hingegen kommt hier nur derjenige Raum in Betracht, der durch beide Aufnahmen abgebildet werden kann.

Lediglich diejenigen Teile der Grenzfläche, welche durch die beiden hier in Betracht kommenden Operationen von dem der Grenzfläche zu Grunde liegenden Fundamentalpunkte tatsächlich bestimmt werden können, sind für die Beurteilung der Genauigkeitsverhältnisse maßgebend.

Im vorliegenden Falle schneidet jede durch die Z gehende Ebene die F_4 in einer C_4, welche in O einen Doppelpunkt besitzt.

Für den ebenen Schnitt mit XZ ergeben sich die Richtungen der Tangenten t in O aus

$$\frac{dx}{dz} = \pm \sqrt{\frac{c'}{a'}} = 63° \; 57'$$

und für die Tangenten t' des ebenen Schnittes mit der YZ aus

$$\frac{dy}{dz} = \pm \sqrt{\frac{c'}{b'}} = 60° \; 39'.$$

Da andrerseits für das angenommene Plattenformat und die vorausgesetzte Bilddistanz die äußersten, in XZ gelegenen Strahlen s, welche noch eine Abbildung bewirken können, mit der Z den Winkel 26° 34′, die äußersten in YZ gelegenen Strahlen s' mit der Z den Winkel 19° 51′ bilden, so liegt der von dem photographischen Apparate bestrichene Objektraum ganz in jenem Teile, in welchem das tachymetrische Verfahren genauer ist.

In der Figur bedeutet $abcd$ die Projektion der Aufnahmsplatte aus O auf die Ebene $z = 150\,m$ und sind dort die Strahlen s und s', letztere in der Umlegung in die XZ, eingetragen.

Da die Fehlerflächen 7), respektive 8) Rotationsflächen mit Y als Drehungsachse sind, so gelten dieselben Schlüsse auch für den ganzen Umkreis des Aufstellungspunktes, sofern in diesem Panorama-Aufnahmen nach dem Stereoverfahren unter sonst gleichen Umständen durchgeführt werden.

Die dieser Grenzfläche zu Grunde gelegte Annahme $m_l = 0{\cdot}001$ kann jedoch bei topographischen Arbeiten im allgemeinen nicht eingehalten werden. Hier sind es vielmehr die in III gemachten Annahmen $b)$, welche für den Vergleich mit der Stereoaufnahme in Frage kommen. Werden für die letztere dieselben Voraussetzungen bezüglich der Teilfehler gemacht wie früher, so wird in 21) $c' < 0$ und für alle in Betracht kommenden $z \gtreqless 600\,m$, $a' - bz^2 > 0$, $b' - bz^2 > 0$, $bz^2 + c' < 0$.

Innerhalb des Objektraumes, welcher durch beide Operationen von demselben Standpunkt aus bestimmt werden kann,

liegt dann kein reeller Teil der Grenzfläche, die Stereophotogrammetrie ist dann die genauere Aufnahmsmethode.

In den obigen Beispielen wurde manche Fehlerquelle nicht berücksichtigt; bei der Tachymeteraufnahme der Einfluß einer schiefen Lattenstellung, der nach III den Gesamtfehler wesentlich vergrößert; bei der Stereoaufnahme hingegen wurde von dem Fehler abgesehen, der sich ergibt, wenn die Platten bei beiden Aufnahmen nicht genau in einer Ebene liegen. Die letztere Bedingung ist bei den neuesten Typen von Zeiß infolge der dort getroffenen Einrichtung mit hinreichender Genauigkeit erfüllt.

Während die Bedeutung des von Dr. Pulfrich in Jena begründeten stereophotographischen Meßverfahrens für militärtopographische Zwecke[1] außer Frage steht — wir verweisen auf die von Oberst v. Hübl gemachten Studien und praktischen Erprobungen desselben — wird es sich noch darum handeln, die nach der Theorie zu gewärtigende Überlegenheit der Stereoaufnahme gegenüber der Tachymeteraufnahme für technische Zwecke durch größere praktische Arbeiten zu erproben, womit auch in jüngster Zeit begonnen wurde.[2]

X.

Von der Stereophotogrammetrie verschieden ist die bisher angewandte, die sogenannte Meßtischphotogrammetrie, bei welcher die Abszissen $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2$ und Ordinaten $\mathfrak{y}_1 \mathfrak{y}_2$ der Bilder desselben Raumpunktes den von zwei Standpunkten aufgenommenen Photographien entnommen werden. Für die später zu untersuchende Grenzfläche zwischen dieser und der Stereoaufnahme wird zunächst die Fehlerfläche für das ältere Verfahren entwickelt, wobei die optischen Achsen des Apparates bei den beiden Aufnahmen zueinander parallel und senkrecht zu der durch die beiden Aufstellungspunkte gelegten Vertikalebene vorausgesetzt werden.

---

[1] Scheimpflug, Die Herstellung von Karten und Plänen auf photographischem Wege. Diese Sitzungsberichte, Bd. CXVI, Abt. IIa, Februar 1907.

[2] Truck, Die stereophotogrammetrische Meßmethode und ihre Anwendung auf Eisenbahnvorarbeiten. Zeitschr. für Verm., Stuttgart 1906, Heft 12, 13.

So wie in IV soll der Koordinatenanfangspunkt in den Hauptpunkt O_1 des Kameraobjektives des über dem einen als fehlerfrei angenommenen Fundamentalpunkt aufgestellten Instrumentes verlegt werden. O_2 bezeichnet dann die Projektion des zweiten Standpunktes auf die Horizontalebene durch O_1. Wird die Richtung $O_1 O_2$ als X, die Vertikale in O_1 als Y, somit die Z parallel zur optischen Achse genommen, so wird mit $O_1 O_2 = l_1$ nach 12)

$$x = \frac{l_1}{\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2}\mathfrak{x}_1, \quad y = \frac{l_1}{\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2}\mathfrak{y}_1, \quad z = \frac{l_1}{\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2}\cdot f. \qquad 53)$$

Da nunmehr $l_1 f, \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_1$ die voneinander unabhängig gemessenen Größen sind, so hat man aus 53)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial l_1} &= \frac{x}{l_1}, & \frac{\partial x}{\partial \mathfrak{x}_1} &= -\frac{(x-l_1)z}{fl_1}, & \frac{\partial x}{\partial \mathfrak{x}_2} &= \frac{xz}{fl_1} \\
\frac{\partial y}{\partial l_1} &= \frac{y}{l_1}, & \frac{\partial y}{\partial \mathfrak{y}_1} &= \frac{z}{f}, & \frac{\partial y}{\partial \mathfrak{x}_1} &= -\frac{yz}{fl_1}, & \frac{\partial y}{\partial \mathfrak{x}_2} &= \frac{yz}{fl_1} \\
\frac{\partial z}{\partial l_1} &= \frac{z}{l_1}, & \frac{\partial z}{\partial \mathfrak{x}_1} &= -\frac{z^2}{fl_1}, & \frac{\partial z}{\partial \mathfrak{x}_2} &= \frac{z^2}{fl_1}, & \frac{\partial z}{\partial f} &= \frac{z}{f}
\end{aligned}\right\} \qquad 54)$$

Nennt man wieder $m_x m_y$ die mittleren Fehler in der Ausmessung der Platten, m_f jenen in der Bestimmung der Bildweite, endlich m_b den mittleren Fehler in l_1, so hat man mit $m_x = m_y = m_f$ und $M = K$ aus 1) die Gleichung der Fehlerfläche

$$(x^2+y^2+z^2)(a_1+b_1 z^2)+c_1 z^2+d_1 x z^2 = K^2, \qquad 55)$$

wo

$$a_1 = \frac{m_b^2}{l_1^2}, \quad b_1 = \frac{2m_x^2}{f^2 l_1^2}, \quad c_1 = \frac{3m_x^2}{f^2}, \quad d_1 = -\frac{2m_x^2}{f^2 l_1} \qquad 56)$$

ist.

Die Fehlerfläche für die oben angegebene Stellung der optischen Achsen ist demnach eine F_4. Da 55) auch in der Form

$$\left.\begin{aligned}
b_1(x^2+y^2+z^2)+d_1 x &= \lambda^2 - c_1 \\
a_1(x^2+y^2)+(a_1+\lambda^2)z^2 &= K^2
\end{aligned}\right\} \qquad 55')$$

geschrieben werden kann, wo λ einen Parameter bedeutet, so entsteht die F_4 im Schnitt einer konzentrischen Kugelschar, deren Mittelpunkt M in den Halbierungspunkt der Strecke $\overline{O_1 O_2}$ fällt und einer Schar konzentrischer, affiner Rotationsellipsoide mit Z als gemeinsamer Drehungsachse und XY als Affinitätsebene.

Jedem λ entspricht als Schnittkurve der beiden zusammengehörigen F_2 55') eine sphärische, auf der F_4 liegende C_4, deren Projektion auf die XZ die Parabel

$$z^2 = Px + Q$$

und deren Projektion auf die XY der Kreis

$$x^2 + y^2 + (P - l_1)x = \frac{\lambda^2 - c_1}{b_1} - Q$$

ist, wenn

$$P = \frac{a_1 d_1}{b_1 \lambda^2}, \quad Q = \frac{b_1 K^2 - a_1(\lambda^2 - c_1)}{b_1 \lambda^2}$$

gesetzt wurde.

Mit $\lambda = 0$ ergibt sich die diesem Werte entsprechende, auf der F_4 liegende Kurve als Schnitt der beiden Kugelflächen 55') als ein Kreis, dessen Ebene im Abstande

$$x = -\frac{b_1 K^2 + a_1 c_1}{a_1 d_1}$$

parallel zu YZ ist.

Da mit

$$z^2 = -\frac{2 a_1 v}{d_1 + 2 b_1 v} \tag{57)}$$

die Gleichung 55) auch in der Form

$$(x - v)^2 + y^2 = r^2 = f(z) \tag{55'')}$$

gegeben werden kann, so gehört die F_4 zu jenen zyklischen Flächen, welche durch die Bewegung eines Kreises mit veränderlichem Halbmesser r, dessen Ebene parallel zu XY bleibt, erzeugt werden. Der Mittelpunkt des Kreises durchläuft in diesem Falle die durch 57) bestimmte Kurve, eine in XZ

gelegene, zu X symmetrische C_3; die eine reelle Asymptote ist im Abstande $v = \frac{1}{2} l_1$ parallel zu Z, die zu X symmetrischen Wendepunkte haben die Abszisse $x = \frac{1}{8} l_1$.

Die Mittelpunktskurve läßt sich mit dem Parameter λ' auch in der Form

$$\left. \begin{aligned} 2b_1 v + d_1 &= \lambda' \\ z^2 &= -\frac{2a_1}{\lambda'} \cdot v \end{aligned} \right\} \qquad 57')$$

geben, daher im Schnitt einer Schar zu Z paralleler Geraden mit einer Parabelschar mit gemeinsamer Achse und Scheitel erzeugen.

Die den Werten K entsprechende Flächenschar 55) hat daher eine gemeinsame C_3 als Mittelpunktskurve der erzeugenden Kreise.

Wird $m_b = 0$, also auch $a_1 = 0$ gesetzt, mithin von dem Fehler in der Bestimmung der Projektion l_1 der Standlinie abgesehen, so sind O_1 und O_2 als fehlerfrei anzusehen; aus 55) wird dann, wie unmittelbar klar ist, eine Rotationsfläche, deren Achse durch den Halbierungspunkt M der Strecke $\overline{O_1 O_2}$ parallel zu Z hindurchgeht, nämlich eine der 14) analoge Fläche, wenn auch dort $a = 0$ gesetzt wird.

XI.

Im Anschluß an das Vorhergehende untersuchen wir zunächst die Normalenfläche längs eines Kreisschnittes.

Da für diese zyklische Fläche die erzeugenden Kreise in parallelen Ebenen liegen, so umhüllen die Tangentialebenen längs eines solchen Kreises an die Fläche einen diese berührenden Kegel.[1] Da die Kegelspitze S in XZ liegt, diese Koordinatenebene also eine Hauptebene des Kegels ist, so gibt die durch den Mittelpunkt Ω des erzeugenden Kreises k gehende, zur Kreisebene E senkrechte, also in XZ liegende Gerade eine Doppelgerade der Regelfläche vierten Grades, als

[1] Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. III, 3, Heft 2/3, p. 281.

welche sich die Normalenfläche ergibt, da diese für den Kreisschnitt des berührenden Kegels identisch ist mit der gesuchten.

Der Rest der Doppelkurve der Normalenfläche ist dann bekanntlich ein Kegelschnitt, dessen Ebene zur Hauptebene XZ des Kegels senkrecht steht und diese nach einer Achse schneidet. Die orthogonale Projektion dieses Doppelkegelschnittes auf die Ebene des Leitkreises k ist dann ein Kreis. Die Projektionen der Flächennormalen längs k auf die XZ umhüllen eine Parabel.

Um S zu bestimmen, gehen wir von der Gleichung der Tangentialebene im Punkte x, y, z der Fläche

$$(\xi - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

aus, wo ξ, η, ζ die laufenden Koordinaten der Ebene bezeichnen. Für die F_4 erhält man aus 55)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= a''x + b'' \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= a'x + b' \\ x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} &= a'''x + b''' \end{aligned}\right\} \quad 58)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} a' = \frac{2a_1 d_1}{a_1 + b_1 z^2} \cdot z, \quad a'' &= 2(a_1 + b_1 z^2), \\ a''' = \frac{(a_1 - b_1 z^2) d_1 z^2}{a_1 + b_1 z^2} & \end{aligned}\right\} \quad 59)$$

$$\left.\begin{aligned} b' = \frac{b_1 K^2 + [a_1 c_1 + (a_1 + b_1 z^2)^2]}{a_1 + b_1 z^2}\, 2z, \quad b'' &= d_1 z^2, \\ b''' = \frac{2(a_1 + 2b_1 z^2)K^2 - 2b_1 c_1 z^4}{a_1 + b_1 z^2} & \end{aligned}\right\} \quad 60)$$

gesetzt wurde.

Die Gleichung der Spur der Tangentialebene auf XZ ist dann wegen $\eta = 0$ die Gerade

$$(a'x+b')\zeta+(a''x+b'')\xi = a'''x+b'''. \tag{61}$$

Für dieselbe Fläche, also dasselbe K, und für denselben Kreis k, also konstantes z, sind gemäß 59) und 60) in 61) a und b ebenfalls konstant.

Die Spuren der Tangentialebenen gehen demnach für alle Werte von x, entsprechend den Punkten des Leitkreises, durch denselben in XZ gelegenen, die Kegelspitze bezeichnenden Punkt S, dessen Koordinaten sich gemäß 61) im Schnitte der beiden Geraden

$$\zeta = -\frac{a''}{a'}\xi + \frac{a'''}{a'} \tag{62}$$

$$\zeta = -\frac{b''}{b'}\xi + \frac{b'''}{b'} \tag{63}$$

ergeben.

Der Gleichung 62) genügen wegen 57) und 59) die Koordinaten $\zeta = z$ und $\xi = v$; diese Gerade, in der Folge mit g bezeichnet, enthält demnach die Kegelspitze S und geht auch durch den Mittelpunkt Ω des Kreises k. Mit $z-\zeta = \zeta'$ und $v-\xi = \xi'$, wo also ζ' und ξ' die Koordinaten von g in Bezug auf Ω als Anfangspunkt bezeichnen, wird

$$\zeta' = -\frac{a''}{a'}\xi'. \tag{64}$$

Da sich andrerseits aus 57) wegen 59) und 64)

$$\frac{dz}{dv} = -\frac{(a_1+b_1z^2)^2}{a_1d_1z} = -\frac{a''}{a'} = \frac{\zeta'}{\xi'}$$

ergibt, so berührt die g die Mittelpunktskurve C_8 in Ω.

Da ferner $a'a''a'''$ wegen 59) unabhängig von K sind und jede im Abstande z zu XY parallele Ebene die Flächenschar 55) in konzentrischen Kreisen mit Ω als Mittelpunkt schneidet, so liegen auch die Spitzen S der berührenden Kegel längs dieser konzentrischen Kreise an die Flächen auf der Geraden g 62).

Wegen

$$b' = c'K^2+d'; \quad b'' = d''; \quad b''' = c'''K^2+d''',$$

wo $c'\ldots$ und $d'\ldots$ die aus 60) ersichtliche Bedeutung haben, also für konstantes z ebenfalls konstant sind, gehen für alle K die entsprechenden Geraden 63) durch einen und denselben in XZ gelegenen Punkt

$$\zeta = \frac{c'''}{c'}; \quad \xi = \frac{c'd'''-c'''d'}{c'd''}. \tag{65}$$

Einem bestimmten Werte von K entsprechen zwei Kegelerzeugende s, deren Projektion auf XZ eben die diesem Werte entsprechende Gerade 63) ist. Für alle Werte von K, hiebei wie immer z konstant vorausgesetzt, schneiden die Erzeugenden s der diesen Werten von K entsprechenden Kegel, demnach zwei feste Gerade, die eine g, auf welcher dem Früheren gemäß die Kegelspitzen liegen, und die zweite g_1, welche im Punkte 65) normal zu XZ ist.

Es sei ferner σ der Schnitt der zu XY parallelen Ebene E des Kreises k mit XZ.

Ist ξ_0 die Abszisse für den Schnittpunkt der Geraden 63) mit σ, so hat man aus 63) mit $\zeta = z$

$$\xi_0 = \frac{b'''-b'z}{b''}. \tag{66}$$

Zwischen ξ_0, ferner der Abszisse v des Kreismittelpunktes Ω, endlich dem Halbmesser r des Kreises k, besteht dann die aus 55), respektive 55''), 57) und 66) mit Rücksicht auf 60) leicht ableitbare Beziehung

$$r^2 = v(v-\xi_0). \tag{67}$$

Hiebei bezeichnet ξ_0 auch die Abszisse für die einem gegebenen Werte K entsprechenden, auf dem Kreise k gelegenen Berührungspunkte Q der vorhin erwähnten Kegelerzeugenden s mit der Fläche.

Ist endlich $\pm y_0$ die Ordinate der beiden auf k gelegenen Punkte Q, so ist auch

$$y_0^2 = r^2-(v-\xi_0)^2. \tag{68}$$

Aus 67) und 68) folgt dann

$$y_0^2 = \xi_0(v - \xi_0), \tag{69}$$

also eine Beziehung zwischen den Koordinaten der den Werten K entsprechenden Q. Diese liegen demnach auf einem festen, in der Ebene E gelegenen, durch Ω gehenden Kreise k', dessen auf σ gelegener Mittelpunkt die Abszisse $\frac{v}{2}$ hat.

Die Kegelerzeugenden s schneiden daher für alle Werte von K zwei feste Gerade g und g_1 und einen festen, die Gerade g in Ω schneidenden Kreis k'. Die Geraden s, deren Projektionen auf XZ der Strahlenbüschel 63) ist, erzeugen sohin eine Regelfläche dritten Grades. Hiebei ist g eine Doppelgerade, g_1 eine einfache Gerade der Regelfläche. Die beiden Tangentialebenen durch g_1 an k' schneiden dann die g in den beiden Kuspidalpunkten, deren Verbindungslinien mit den Berührungspunkten auf k' die Torsallinien der Regelfläche geben.

Ebenso folgt hieraus ohne weiteres, daß je zwei in der zu XZ senkrechten Ebene gelegene Erzeugende s die g_1 in Punktpaaren einer Involution schneiden, deren sich selbst entsprechende Punkte auf den Torsallinien liegen. Die auf g gelegene Reihe der Kegelspitzen S ist dabei projektiv zu den entsprechenden Punktpaaren der Involution, wenn jedem Scheitel das Punktpaar auf seinen Erzeugenden entspricht.

XII.

Sowie sich aus den Fehlerflächen 11) und 14) die Grenzfläche 16) ergab, so lassen sich aus 11) und 55), dann aus 14) und 55) die Grenzflächen zwischen der photographischen Punktbestimmung mit parallel und senkrecht zur Standlinie gestellten Achsen und dem tachymetrischen Aufnahmsverfahren, beziehungsweise zwischen jener und der Stereoaufnahme entwickeln.

Die erstere, hervorgehend aus 11) und 55), führt auf eine F_4, welche durch die Bewegung eines veränderlichen Kegelschnittes mit konstanten Achsenrichtungen, dessen Mittelpunkt in XZ

eine C_3 beschreibt und dessen Ebene parallel zu XY bleibt, erzeugt wird. Die Normalenflächen längs der Kegelschnitte sind auch hier Regelflächen 6. Grades, welche von der XZ in je einer Parabel als Doppelkurve geschnitten werden, welch letztere mit den in XZ liegenden Flächennormalen den vollständigen Durchschnitt der Regelfläche mit dieser Koordinatenebene gibt. Eine durch den Mittelpunkt des Leitkegelschnittes gehende, zu YZ parallele Ebene wird jedoch dann von der Normalenfläche in einer C_4 geschnitten, welche mit den in der Schnittebene liegenden beiden Normalen die C_6 als Schnittkurve gibt.

Die Verbindung von 14) und 55) gibt die zweite der oben erwähnten Grenzflächen unter der Voraussetzung, daß wieder der eine als fehlerfrei vorauszusetzende Aufstellungspunkt beiden Operationen gemeinsam ist und die beiden anderen Standpunkte, je einer nämlich für das betreffende Verfahren, mit dem ersten in derselben vertikalen Ebene liegen.

Mit

$$a_1 - a = a_2, \quad b_1 - b = b_2, \quad c_1 - c = c_2, \quad d_1 = d_2 \tag{70}$$

erhält die Grenzfläche die Form

$$(x^2+y^2+z^2)(a_2+b_2z^2)+c_2z^2+d_2xz^2 = 0. \tag{71}$$

Die Fläche ist demnach eine der 55) analoge F_4, wenn dortselbst $K = 0$ gesetzt wird.

Da die Vorzüge der einen oder der anderen Methode insbesondere dann zur Geltung kommen, wenn bei beiden dasselbe Instrument vorausgesetzt wird, überhaupt die Operationen unter sonst gleichen Umständen stattfinden, so machen wir die Annahme $a_2 = 0$, $c_2 = 0$, setzen also die Fehlerverhältnisse in den Basismessungen, respektive ihren Reduktionen, ebenso wie die Ergebnisse der Plattenausmessungen bei den beiden Methoden als gleichwertig voraus.

Die durch 71) gegebene F_4 zerfällt dann in $Z^2 = 0$ und in die Kugel

$$x^2+y^2+z^2 - \frac{d_1}{b-b_1}x = 0. \tag{71'}$$

Wird $l_1 = nl$ gesetzt, so sind die Grenzflächen für verschiedene n Kugelflächen, welche die YZ im Koordinatenanfangspunkt berühren; der Halbmesser ergibt sich aus 15), 56) und 71') mit

$$r = \frac{m_x^2 . l . n}{2 m_x^2 - m_a^2 n^2}. \qquad 72)$$

Innerhalb der einem bestimmten Werte von n entsprechenden Kugel als Grenzfläche ist die Photogrammetrie genauer, außerhalb derselben das Stereoverfahren.

Bisher wurde von der Realisierung der Abbildung abgesehen. Man kann bei gegebenen Plattendimensionen unter der Annahme, daß die drei Aufstellungspunkte in demselben Horizonte, nämlich auf X gelegen sind, jenen Wert von n bestimmen, bei welchem durch das gewöhnliche photogrammetrische Verfahren nur ein auf der zugehörigen Grenzfläche gelegener Punkt wirklich abgebildet wird.

Die rechteckige Aufnahmsplatte bestimmt mit dem Hauptpunkte des Objektives für jede der beiden Aufnahmen, wie bereits bemerkt, die für die Abbildung maßgebende Pyramide. Die beiden Vertikalebenen, welche durch die Hauptpunkte und durch diejenigen vertikalen Seiten der Aufnahmsplatten, welche für die Abbildung aus den beiden Standpunkten in Betracht kommen, gelegt werden und mit X den Winkel ω bilden sollen, schneiden sich in einer zu XZ senkrechten Geraden g, welche demnach diejenigen Raumpunkte enthält, die von den beiden in der Entfernung l_1 befindlichen Standpunkten auf beiden Platten eben noch dargestellt werden können.

Da wegen $n > 1$ bei der Stereoaufnahme mit der Basis $l < l_1$ auch eine Abbildung von g auf beiden Platten erfolgt, so wird für jenen Wert von $n = n_1$, für welchen g die zugehörige Grenzfläche, also die Kugel 71') berührt, dieser Berührungspunkt der einzige sein, welcher sich nach beiden Methoden gleich genau ergibt. Für jeden Wert $n < n_1$ ist das Stereoverfahren — von rein praktischen Erwägungen abgesehen — bezüglich aller von dem betreffenden Standpunkte zu bestimmenden Punkte genauer. Für $n > n_1$ hingegen ist die Meßtischphotogrammetrie bezüglich derjenigen innerhalb der Kugel

gelegenen Punkte, welche tatsächlich durch die beiden Aufnahmen abgebildet werden, vom Standpunkte der Genauigkeit im Vorteil.

Da der Berührungspunkt der g mit der betreffenden Grenzfläche in XZ liegt, dieser daher die Koordinaten $x = \frac{1}{2} l_1 = \frac{1}{2} nl$, $z = \frac{1}{2} nl . \text{tg}\, \omega$ besitzt, welche andrerseits auch der Gleichung 71') genügen sollen, so erhält man mit Rücksicht auf 72) n_1 aus

$$n_1^2 = \frac{2 m_x^2 (1 - 2 \cos^2 \omega)}{m_a^2}.$$

Nimmt man gemäß der in IX vorausgesetzten Bildweite und Plattenabmessung $\omega = 63° \, 26'$, ferner $m_x = 0 \cdot 1 \, mm$, $m_a = 0 \cdot 01 \, mm$, so folgt $n_1 = 10 \cdot 95 \div 11$.

Es ist demnach mit den obigen Einschränkungen die Meßtischphotogrammetrie nur dann im Vorteil, wenn $l_1 > 11\, l$ ist.

XIII.

Während die Schar der Fehlerflächen die Fehlerverteilung für die einzelnen Punkte des Raumes gibt, kann für einen gegebenen Punkt nach den mittleren Fehlern in verschiedenen Richtungen gefragt werden. Man gelangt dann zu einer neuen Fläche, welche als Verschiebungsfläche bezeichnet werden soll.

Obwohl mit dem Bisherigen nicht in unmittelbarem Zusammenhange stehend, soll anhangsweise die Verschiebungsfläche für die stereophotogrammetrische Punktebestimmung untersucht werden.

Es bezeichnen x, y, z die Koordinaten eines Punktes P bezüglich des in IV angenommenen Achsensystems.

Für eine durch den Ursprung O gehende Achse X' ist dann

$$x' = \alpha x + \beta y + \gamma z, \tag{73)}$$

wo α, β, γ die Richtungscosinus der X' mit X, Y, Z bedeuten.

Sind M_x, M_y, M_z die mittleren Fehler in den Richtungen X, Y, Z, hingegen M'_x für die neue Richtung X', so ist wegen 12) und 73)

$$M'^2_x = \left(\frac{\partial x'}{\partial l}\right)^2 m_{\mathfrak{d}}^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial \mathfrak{x}_1}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial \mathfrak{y}_1}\right)^2 m_y^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial x'}{\partial f}\right)^2 m_f^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial \mathfrak{a}}\right)^2 m_a^2. \quad 74)$$

Da wegen 13)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial l} &= \alpha \frac{x}{l} + \beta \frac{y}{l} + \gamma \frac{z}{l} \\ \frac{\partial x'}{\partial \mathfrak{x}_1} &= \alpha \frac{z}{f}, \quad \frac{\partial x'}{\partial \mathfrak{y}_1} = \beta \frac{z}{f}, \quad \frac{\partial x'}{\partial f} = \gamma \frac{z}{f} \\ \frac{\partial x'}{\partial \mathfrak{a}} &= -\alpha \frac{xz}{fl} - \beta \frac{yz}{fl} - \gamma \frac{z^2}{fl} \end{aligned}\right\} \quad 75)$$

ist, so wird, wenn wieder $m_x = m_y = m_f$ gesetzt wird, mit

$$\left.\begin{aligned} M_x^2 = a_{11}, \quad M_y^2 = a_{22}, \quad M_z^2 = a_{33} \\ m_{\mathfrak{d}}^2 + m_a^2 \frac{z^2}{f^2} = \frac{l^2}{xy} a_{12} = \frac{l^2}{xz} a_{13} = \frac{l^2}{yz} a_{23} \end{aligned}\right\} \quad 76)$$

wegen 74)

$$M'^2_x = a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2 + 2a_{12}\alpha\beta + 2a_{13}\alpha\gamma + 2a_{23}\beta\gamma. \quad 77)$$

Die Richtungen für die größte und kleinste Verschiebung mit der Nebenbedingung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

bestimmen sich dann aus den drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - M'^2_x)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{12}\alpha + (a_{22} - M'^2_x)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{13}\alpha + a_{23}\beta + (a_{33} - M'^3_x)\gamma = 0 \end{aligned}\right\} \quad 78)$$

Für die Richtung OP wird mit $\overline{OP} = \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\alpha = \frac{x}{\rho}, \quad \beta = \frac{y}{\rho}, \quad \gamma = \frac{z}{\rho} \tag{79}$$

und damit aus 77) wegen 76) und 13)

$$M_1^2 = \left(m_b^2 + m_a^2 \frac{z^2}{f^2}\right)\frac{\rho^2}{b^2} + \frac{z^2 m_x^2}{f^2}. \tag{80}$$

Da aber die zusammengehörigen Werte 79) und $M_x' = M_1$ den drei Gleichungen 78) genügen, so wird für die Richtung OP die Verschiebung einen ausgezeichneten Wert M_1, und zwar ihren größten, erreichen.

Wird von P die der Richtung X' zukommende Verschiebung als Strecke aufgetragen, so liegen, wenn u, v, w die Koordinaten des Endpunktes dieser Strecken für ein Achsensystem bezeichnen, dessen Anfangspunkt P ist und dessen Achsen parallel sind zu XYZ, für alle Richtungen X' diese so erhaltenen Punkte u, v, w auf der Verschiebungsfläche, deren Gleichung wegen

$$\alpha = \frac{u}{M_x'}, \quad \beta = \frac{v}{M_x'}, \quad \gamma = \frac{w}{M_x'} \quad \text{und} \quad M_x' = \sqrt{u^2+v^2+w^2}$$

sich aus 77) als die F_4

$$(u^2+v^2+w^2)^2 = a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + \\ + 2a_{13}uw + 2a_{23}vw \tag{81}$$

ergibt.

Legt man die Achse U' eines neuen rechtwinkeligen Koordinatensystems in die Richtung OP, also in jene der größten Verschiebung, so lautet 81)

$$M_1^2 u'^2 + M_2^2(u'^2 + w'^2) = (u'^2 + v'^2 + w'^2)^2, \tag{82}$$

wo $u'v'w'$ die neuen Koordinaten, M_1 den aus 80) folgenden größten, $M_2 = \frac{z^2}{f^2} m_x^2$ die kleinsten Punktfehler, respektive Verschiebungen bedeuten, welche demnach in einer durch P gehenden zu OP senkrechten Ebene auftreten.

Die Verschiebungsfläche ist gemäß 82) die Fußpunktfläche eines Rotationsellipsoides, dessen Halbachsen die größte und kleinste Verschiebung angeben.

Der gesamte, der sogenannte mittlere Punktfehler M genügt dann der Gleichung

$$M^2 = M_1^2 + 2 M_2^2$$

in Übereinstimmung mit 14) und 15), wenn dort $K = M$ gesetzt wird.

Versuche im elektrostatischen Wechselfelde

von

Viktor v. Lang,

w. M. k. Akad.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. Juni 1907.)

Charles Borel[1] hat 1893, angeregt durch die Versuche von François Borel[2] über die Rotation einer Eisenscheibe im magnetischen Wechselfelde durch Nähern eines Eisenstabes, eine ähnliche Erscheinung für das elektrostatische Wechselfeld nachgewiesen. Er zeigte, daß in einem solchen Feld eine Papierscheibe durch Nähern von Isolatoren und Leitern in Rotation versetzt werden kann, wobei der Sinn dieser Rotation für verschiedene Körper in verschiedenem Sinn erfolgt.

Ch. Borel benützte zu seinen Versuchen eine Influenzmaschine und mußte daher noch einen Kommutator einschalten, welcher die nötigen Wechsel besorgte. Ich versuchte dieselben Erscheinungen einfacher mit Hilfe des Wechselstromes der hiesigen internationalen Elektrizitätsgesellschaft zu wiederholen, so wie ich auch mit derselben Stromquelle vor kurzem die Versuche im elektrostatischen Drehfelde ausführte.[3]

Schon bei Beginn der Versuche zeigte es sich, daß dieselben, selbst was den Sinn der Drehung der Papierscheibe

---

[1] Arch. des Sc. phys. et nat. *3*, t. 30, Genève 1893, p. 45. Im Auszuge: Compt. rend. de l'Acad. d. Sc., t. 116, p. 1192.

[2] La Lumière éléctrique, t. 29, 1888, p. 53.

[3] Diese Sitzungsber., Bd. 115, Abt. IIa. (1906), p. 211.

betrifft, sehr durch die Natur des Wechselfeldes bedingt sind. Ich habe mich daher im Gegensatze zu Borel auf den einfachsten Fall, den eines parallelen Wechselfeldes, beschränkt. Auch habe ich der zu untersuchenden Substanz statt der Kugelform die Gestalt eines runden Stabes gegeben, und zwar wurden immer zwei gleiche Stäbe zu beiden Seiten der Scheibe angewendet.

Mein Apparat sah folgendermaßen aus. Der Wechselstrom wird zuerst durch einen Transformator[1] auf die Spannung von beiläufig 9200 Volt gebracht; die Mitte der sekundären Wickelung des Transformators ist geerdet, die Enden derselben führen zu zwei Polplatten P, P' (siehe Tafel), welche aus Zink 200×100 *mm* groß in der Entfernung von 170 *mm* einander gegenüberstehen.[2] Die Stärke des Feldes zwischen den Platten hat also eine Amplitude von etwa 1·8 elektrostatischen Einheiten. In der Mitte des Feldes befand sich die Papierscheibe S an einem 880 *mm* langen Seidenfaden aufgehängt. Die Natur des Papiers ist wohl ziemlich gleichgültig, um aber möglichst durchsichtige Versuchsbedingungen zu haben, verwendete ich ein Papier, das ich Dr. v. Hoor[3] verdanke und das aus reiner Pflanzenfaser bestand.

Die zumeist benutzte Scheibe hatte 45·2 *mm* Durchmesser und trug eine Bleistiftteilung in 90 Teile, so daß ihre Drehung bis auf 2° leicht abgelesen werden konnte. Als Index diente hiezu der Aufhängefaden, wobei die Stellung des Auges dadurch fixiert wurde, daß der Faden sich mit einer auf der anderen Seite angebrachten Marke decken mußte.

Die Versuche gewannen sehr an Reinheit, als die Scheibe S von einem Becherglase G umgeben wurde, wie dies in Fig. 1 dargestellt ist. Dieses Glas hatte, nachdem sein oberer Rand abgeschnitten worden war, eine Länge von 150 *mm* und einen äußeren Durchmesser von 60 *mm*.

Im Falle stärkerer Wirkungen wurden statt der Scheibe auch Papierzylinder benützt, die sich mittels eines Achat-

[1] Ich überzeugte mich, daß die Versuche auch mit einem großen Funkeninduktor ausgeführt werden können.

[2] Sämtliche Maße sind in Millimeter angegeben.

[3] Siehe M. v. Hoor, Elektrot. Zeitschr., Bd. 22 (1901), p. 170.

hütchens auf der Spitze einer Nähnadel drehten, wie ich sie bei meinen Versuchen im elektrostatischen Drehfelde benutzte (l. c.).

Zu dem Apparate gehört noch ein schwerer Fuß, welcher in seiner Mitte durchbohrt ist, wodurch ein auf einen Hartgummistab befestigte Hartgummischeibe höher und niedriger gestellt werden kann. Hierauf kommt nun das erwähnte Becherglas oder der Träger mit der Nähnadel zu stellen, auf welcher sich die Papierzylinder drehen.

Auf dem Fuße dreht sich ferner eine Holzscheibe von 150 *mm* Durchmesser, welche eine gleich große Paraffinscheibe trägt und zur Aufstellung der zu untersuchenden Stäbe bestimmt ist. Dickere Stäbe konnten einfach auf die Paraffinscheibe gestellt werden, zur Aufstellung von dünneren Stäben dienten Glasgefäße, die ebenfalls in Fig. 1 abgebildet sind, und aus einem Glasrohr, in dessen unteres Ende ein flacher Glasstoppel mit Paraffin eingekittet war, bestanden. Man überzeugte sich, daß diese Glasfüße für sich keine Wirkung auf die Scheibe ausüben, wenigstens in der gezeichneten tiefen Lage.

Eine zweite Art, dünnere Stäbe in vertikaler Stellung zu erhalten, war die, daß ihr unteres Ende in kleine, viereckige oder kreisrunde Stücke einer etwa 10 *mm* dicken Hartgummiplatte mittels passender Löcher gesteckt wurde.

Um die Mitte der Stäbe, die ja nicht alle dieselbe Länge hatten, in die Mitte des Wechselfeldes zu bringen, waren noch Paraffinscheiben verschiedener Dicke vorhanden, welche unter die Stäbe gelegt wurden.

Die beiden zu untersuchenden Stäbe wurden nach einer der angegebenen Arten immer symmetrisch auf einen Durchmesser der Paraffinscheibe möglichst nahe dem Becherglase aufgestellt, so daß nur ein freier Raum von etwa 3 *mm* blieb. Die Entfernung der Mitte der beiden Stäbe ergibt sich also, wenn man zu dem Durchmesser eines Stabes die Zahl $60+6 = 66$ addiert.

Die Verbindungslinie der Stäbe wurde immer unter 60° gegen die Ebene der Polplatte gestellt, die beiden möglichen Stellungen AB und $A'B'$ (Fig. 2) unterscheiden sich daher um einen Winkel von 60°.

Nach Erregung des Feldes wurde dann in diesen beiden Stellungen der Stand der Papierscheibe abgelesen; die halbe Differenz dieser Ablesungen ist die von den Stäben bewirkte Drehung der Scheibe.

Diese Drehung wird als positiv bezeichnet, wenn der spitze Winkel zwischen dem der Feldrichtung parallelen Durchmesser der Papierscheibe und der Verbindungslinie der Stäbe größer wird.

I. Isolatoren.

Mit isolierenden Körpern wurden folgende Resultate erhalten:

	d	l	φ
Schwefel	13·2	217	—1°2
Rotes Siegellack	13·0	223	—1·1
Wallrat	13·8	128	—1·4
Paraffin	13·5	210	—1·1
Stearin	13·5	190	—1·3
Ebonit	12·1	200	—0·2
Grünes Glas	12·1	280	—1·4

d bedeutet hier den Durchmesser der betreffenden zwei Stäbe, l ihre Länge, φ die durch sie bewirkte Drehung in der angegebenen Lage.

Die Länge der Stäbe ist allerdings ziemlich verschieden, doch dürfte dies bei Isolatoren im Gegensatze von Leitern nicht viel bedeuten, so daß vielleicht nur bei Wallrat die Stäbe bei einer Länge von etwa 210 *mm* einen geänderten Wert von φ zeigen würden.

Die Durchmesser können wohl als gleich angesehen werden. Allerdings hat derselbe einen Einfluß, aber erst bei größeren Unterschieden. Dies ergibt sich an zwei Beobachtungen, die ich an Siegellack und Paraffin anstellte. Ich fand:

	d	l	φ
Siegellack	17·0	182	—2°7
Paraffin	36·8	197	—4·7

Die Vergleichung mit den früheren Angaben lehrt, daß in beiden Fällen die Ablenkung mit dem Durchmesser wächst.

Es würde sich daher empfehlen, um eventuelle Unterschiede im Verhalten verschiedener Isolatoren zu konstatieren, Stäbe von größerem Durchmesser zu benützen: nach den vorstehenden Zahlen ist dies aber nicht aussichtsreich, sie sprechen mehr für gleiches Verhalten der Isolatoren.

Was aber die Ursache der drehenden Wirkung der Isolatoren betrifft, so dürfte diese wohl in der Polarisation liegen, welche die Isolatoren parallel den Kraftlinien des Feldes erfahren. Da durch die isolierenden Stäbe die Kraftlinien des Feldes jedenfalls nur eine unbedeutende Störung erleiden, so dürfte die Verteilung der positiven und negativen Elektrizität in einem bestimmten Moment auf den Polplatten, Stäben und Scheibe wohl die in Fig. 2 durch + und — angedeutete sein. Die Elektrizitäten + und — der Stäbe A, B wirken nun anziehend auf die — und + Elektrizität der Scheibe und setzen sie in negativem Sinne in Drehung.

Für diese Erklärung spricht wohl auch der Umstand, daß die Versuche ebenso vor sich gehen, wenn die Scheibe S aus leitendem Material, Aluminium, besteht. Eine solche Scheibe von derselben Abmessung wie die Papierscheibe und mit ähnlicher Teilung gab für die Paraffinstäbe, $d = 36 \cdot 8$, eine Drehung von $-4^\circ 4$, wobei freilich die Einstellung nicht so scharf wie früher war und um etwa 2° um die Ruhelage schwankte.

Eine ähnliche Glimmerscheibe ($d = 44 \cdot 5$) gab nur $-3^\circ 2$.

II. Gute Leiter.

Ich gebe zuerst die Beobachtungen, die an runden Messingstäben angestellt wurden, um die Abhängigkeit ihrer Wirkung von Durchmesser und Länge festzustellen. Mit Bezug auf letztere wurde beobachtet:

Messingstäbe $d = 12 \cdot 1$

Länge	φ
100	$= +2^\circ 4$,
176	$2 \cdot 6$,
210	$4 \cdot 4$,
250	$5 \cdot 0$.

Hier fällt vor allem auf, daß die Drehung positiv ist. Diese Drehung wird aber mit wachsendem Durchmesser immer kleiner und geht endlich ins negative wie bei den Isolatoren über. Es ergibt sich dies aus folgenden zwei Beobachtungen:

Länge 157	$d = 8$	$\varphi = +\ 4{^\circ}4$	beobachtet
	$12 \cdot 1$	$+\ 2 \cdot 5$	interpoliert
Länge 91·5	$d = 12 \cdot 1$	$\varphi = +\ 2 \cdot 4$	interpoliert
	$40 \cdot 0$	$-13 \cdot 0$	beobachtet

Die interpolierten Werte ergeben sich aus den zuvor angegebenen Messungen.

Die Erklärung dieser Erscheinung ist wohl darin zu suchen, daß Metallstäbe im Gegensatze von isolierenden Stäben das parallele Feld stark deformieren, so daß sie nicht mehr im Sinne des ursprünglichen Feldes polarisiert werden. Die Kraftlinien werden vielmehr eine Drehung von der Verbindungslinie der beiden Stäbe weg erfahren, wodurch (Fig. 2) die negative Elektrizität des Stabes der negativen Elektrizität der Scheibe näher rückt als die positive, so daß eine Abstoßung zwischen dem Stab und der Scheibe eintritt, wo wir bei Isolatoren eine Anziehung hatten. Überhaupt dürfte die freie positive Elektrizität des Stabes A mehr nach den Enden desselben gedrängt werden, so daß die Wirkung der negativen Elektrizität auf die Scheibe desto mehr zur Geltung kommt, je länger die Stäbe. Dies stimmt auch mit den Zahlen, die zu Beginn dieses Abschnittes angeführt sind.

Im Einklange hiemit steht die Erscheinung, daß, wenn man die beiden Stäbe oben oder unten durch Leiter oder Halbleiter verbindet, die positive Drehung der Scheibe sehr große Werte annimmt. So wurde für die beiden Stäbe $l = 250$, $d = 12 \cdot 1$ bei gleichzeitiger Berührung mit den Händen

$$\varphi = +23^\circ,$$

bei Verbindung durch dünne Kupferstreifen

$$\varphi = +25^\circ$$

beobachtet. Durch die Verbindung beider Stäbe verschwindet nämlich die freie Elektrizität beider Stäbe vollkommen.

Nachstehende Beobachtungen wurden an Messingröhren ausgeführt. e bedeutet hiebei die Wandstärke und d den äußeren Durchmesser der Röhren.

d	e	l	φ
10	0·7	162	+3·8
13·6	0·7	201	+2·2
20·5	0·55	192	+1·8
36·2	0·55	231	—4·9

Auch hier geht mit wachsendem Durchmesser die Drehung aus dem Positiven ins Negative über. Ebenso wurde die Drehung stark positiv, wenn die beiden Röhren leitend oder halbleitend verbunden wurden. Dies gilt auch für den Fall, daß die ursprüngliche Drehung negativ ist. So gab die letzte Röhre bei Verbindung durch die Hände oder durch Metall

$$\varphi = +42°.$$

Mitunter geriet bei den letzten Versuchen die Scheibe sogar in Rotation nach der positiven Seite. Dies fand nämlich dann statt, wenn der verbindende Metallstreifen nicht gut auflag und zwischen demselben und der betreffenden Röhre kleine Fünkchen übersprangen. Nachdem die Ursache erkannt war, konnte die Rotation der Scheibe auch mit den Händen erzielt werden, indem die eine Hand der Röhre nur soweit genähert wurde, daß kleine Entladungen vor sich gingen.

III. Halbleiter.

Bei diesen werden die Verhältnisse noch komplizierter, da ihre Wirkung sehr von dem Grade ihrer Trockenheit abhängt. Untersucht wurden Zylinder aus weichem Holze und Röhren, die aus aufgerolltem Schreibpapier hergestellt worden waren.

Die ersteren wurden unter anderen untersucht, einmal, nachdem sie über Winter in einem ungeheizten Vorzimmer aufbewahrt worden waren, dann nachdem sie während einer Nacht in Wasser gelegen waren, wodurch sie um beiläufig 11% schwerer wurden.

d	l	trocken	feucht
13·4	220	+17°6	+ 1°5
24	210	+ 1·8	— 3·8
36·5	210	—10·0	—10·3
47	215	—19·8	—11·6

Die Papierzylinder bestanden, wie erwähnt, aus grauem Schreibpapier, indem ein halber Bogen (210×340) nach der schmalen Seite um einen passenden Dorn aufgewickelt und das Ende mit Kleister festgemacht wurde.

Ist d wieder der äußere Durchmesser dieser Zylinder, so ist $340 : d\pi$ beiläufig die Anzahl der übereinandergerollten Lagen und die Dicke e der Zylinder beiläufig

$$0 \cdot 07 \times 340/d\pi = \frac{7 \cdot 58}{d},$$

da 0·07 für die Dicke des Papiers gefunden wurde. Die Beobachtungen gaben für die zimmertrockenen Zylinder, deren Länge immer gleich 210 war:

	d	e	φ
1.....	13·4	0·57	+ 7°9
2.....	17·5	43	— 7
3.....	20	38	— 7·5
4.....	22	34	— 9·7
5.....	24	28	—12·6
6.....	30	25	—16·4
7.....	44	17	— ∞

Bei den weitesten Zylindern wurde die Drehung größer als 180° und die Scheibe geriet in Rotation, welche erst nach vielen Umdrehungen durch die entgegenwirkende Torsion des Fadens zum Stillstande kommt. Diese Ablenkung hängt sehr von der geringen Wandstärke ab, wie man aus folgenden Messungen sieht.

Nach dem vorstehenden Werte von e müssen die Zylinder sämtlich ineinander passen; dies war in der Tat der Fall, obwohl natürlich die einzelnen Windungen der Zylinder nicht vollkommen dicht aneinander lagen und die Querdimension hiedurch vergrößert wurde.

Es wurden nun folgende Kombinationen untersucht:

6+5+4+3+2+1	$\varphi = -2 \cdot 7$
6+5+4+3+2	$-4 \cdot 9$
6+5+4	$-10 \cdot 5$
6 (wie oben)	$-16 \cdot 4$

Ebenso:

3+2+1	$\varphi = +5$
3 (wie oben)	$-7 \cdot 5$

Auch bei den Halbleitern wird die Ablenkung nach rechts größer, wenn man sie durch Metall oder feuchte Halbleiter (Holz, Kork, Pappe etc.) verbindet oder sie mit der Hand zur Erde ableitet. Bei den Holzzylindern war diese Wirkung so stark, daß die Scheibe immer in positive Rotation geriet. Dies scheint auch für die Papierzylinder zu gelten.

Die großen Ablenkungen der Holzstäbe können benutzt werden, um die verschiedenen störenden Einflüsse auf die Beobachtungen zu untersuchen. So ergab sich in betreff der Torsion des Fadens folgendes.

Die Holzstäbe (*d* 47, *l* 215) bewirkten bei einem gewissen Feuchtigkeitszustande

$$\varphi = -14^\circ 2,$$

nach einer ganzen Umdrehung der Scheibe nach rechts

$$\varphi = -13^\circ 2,$$

nach einer weiteren Umdrehung der Scheibe in demselben Sinne

$$\varphi = -12^\circ 7.$$

Es kann daher der Umstand wohl vernachlässigt werden, daß die Ruhelage der Scheibe meistens etwas von der Lage der Scheibe abwich, in welche sie sich im Wechselfeld einstellte.

Der ebenfalls sehr geringe Einfluß eines Fehlers in der Entfernung des Becherglases von den Stäben ergibt sich aus folgenden Beobachtungen mit den Holzstäben *d* 13·4, *l* 220:

Entfernung der Mitte der Zylinder....	79	89	112
Abstand derselben vom Becherglas ...	3·2	8·2	19·2
Beobachtete Drehung	+18°7	16°3	14°0

Auch eine nicht vollkommen diagonale Stellung der Holzstäbe ist nicht von großer Bedeutung. Die letzten Stäbe gaben bei einer gewissen konstanten Entfernung vom Becherglase bei einer Distanz von

	180°	150°	120°
φ	+17°2	14°6	10°

Schließlich wurde noch der Einfluß des Winkels zwischen der Richtung des Feldes und der Verbindungslinie der Holzstäbe untersucht. Nach dem früheren ist für

$$\alpha = 30° \ldots\ldots \quad \varphi = 18°7,$$

während für

$$\alpha = 45° \ldots\ldots \quad \varphi = \ 8°5$$

gefunden wurde. Hier sind die Unterschiede schon bedeutender und es ist für die Genauigkeit der mitgeteilten Beobachtung nicht günstig, daß die Einstellung der Stäbe gegen die Kraftlinien unter 30° nur nach dem Augenmaße mit Hilfe einer verzeichneten Figur vorgenommen wurde.

IV. Flammen.

Energische Rotationen erhält man mit Hilfe zweier isolierter Flammen, die an die Stelle der Ablenkungsstäbe gebracht werden. Hiezu dienten zwei Stearinkerzen, die so weit verkürzt wurden, daß, wenn sie auf dem Tisch in irgend einer Weise zum Stehen gebracht wurden, ihre Flammen in die Höhe der Papierscheibe kamen: die Verbindungslinie der Flammen machte hiebei wieder einen Winkel von 30° mit der Richtung des Feldes.

Die durch die zwei Flammen bewirkte Rotation ist negativ und so kräftig, daß auch die erwähnten Papierzylinder in lebhafte Bewegung geraten, eine Bewegung, die nicht gestört wird, wenn über die Papierzylinder ein Glaszylinder gestülpt wird.

Übrigens findet diese Erscheinung auch im konstanten elektrischen Felde statt, dasselbe wurde durch eine kleine Influenzmaschine erzeugt, deren Pole mit den Polplatten P, P' leitend verbunden wurden. Die beiden Flammen werden alsdann unsymmetrisch, da ihre Spitzen bekanntlich nach der negativen Platte hinzielen. Ein Unterschied mit dem Wechselfelde findet sich nur darin, daß jetzt der Glaszylinder fortbleiben muß, da der Papierzylinder sich sofort an denselben mit dem unteren Ende anlegt, wodurch natürlich die weitere Drehung unmöglich wird.

Mit den Flammen können aber auch leitende Zylinder in Drehung versetzt werden, und zwar sowohl im Wechselfelde, als auch im konstanten Felde. Dies wurde an Zylindern von sehr dünnem Kupferblech nachgewiesen, die ähnliche Formen wie die Papierzylinder hatten.

Die Ursache dieser Rotation liegt wohl darin, daß die Flammen mit der zunächst gelegenen Polplatte gleichnamig elektrisch werden und so die benachbarten ungleichnamig elektrischen Teile der Zylinder anziehen.

Ich will hier die Bemerkung einschalten, daß sich mit Hilfe einer Flamme der horizontale Verlauf der Kraftlinien eines elektrischen Wechselfeldes gut demonstrieren läßt. In einem solchen Felde nimmt nämlich die Flamme die Form einer vertikalen Fläche an, welche parallel zu den Kraftlinien an der betreffenden Stelle ist.

V. Elektrostatisches Drehfeld.

Wir haben gesehen, daß die Wirkung der Halbleiter bedeutend stärker ist als die der Leiter und Isolatoren. Dies dürfte wohl eben von ihrem schlechten Leitungsvermögen herrühren, infolgedessen die Ablenkungsstäbe noch nicht ihre Ladung verloren haben, wenn auch die Polplatten unelektrisch geworden sind. Diese Überlegung führte darauf, an die beiden Polplatten zwei Holzbrettchen zu hängen, wie dies in Fig. 3 dargestellt ist, um vielleicht auf diese Weise ein Drehfeld zu erzielen.

In der Tat erhält man ein solches, wobei die Dimensionen der Holzbrettchen innerhalb weiter Grenzen variieren können.

Der Sinn des Drehfeldes ist, von der Verbindungslinie der Holzbrettchen gerechnet, negativ. In diesem Felde konnten unter anderen auch die Holz- und Pappeschachteln in Rotation versetzt werden, die ich bei meinen Versuchen im elektrostatischen Drehfelde (l. c.) benützt hatte. Ebenso konnte gezeigt werden, daß auch auf der äußeren Seite der Holzbrettchen ein Drehfeld von entgegengesetztem Sinne herrscht, wie dies in Fig. 3 angedeutet ist, wo die so vorhandenen drei Drehfelder durch Papierzylinder ersichtlich gemacht werden.

Die Entstehung dieser Drehfelder dürfte wohl in dem schlechten Leitungsvermögen des Holzes zu suchen sein, wodurch die Ladung und Entladung der Holzbrettchen sich gegen die der Polplatten etwas verzögert.

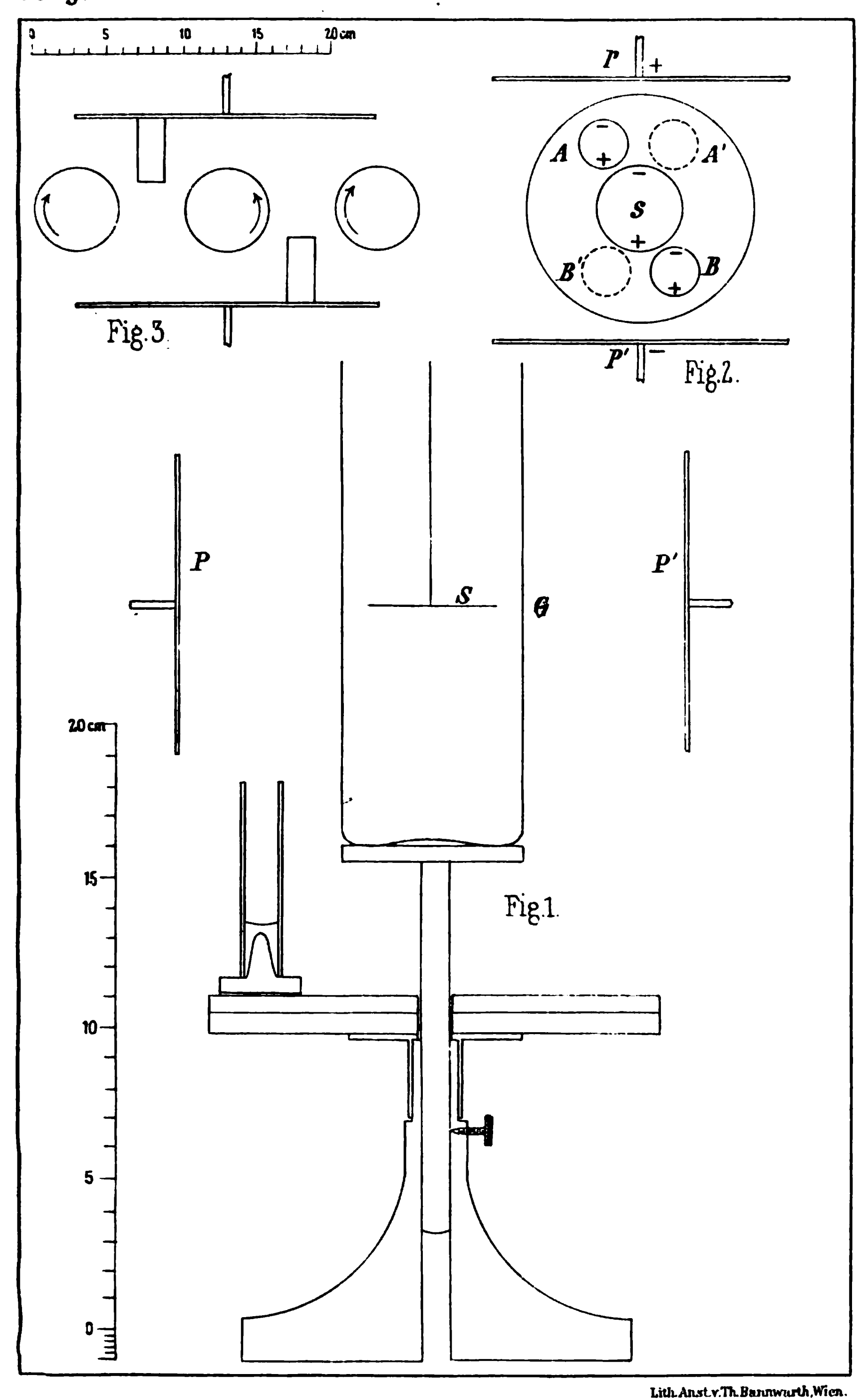
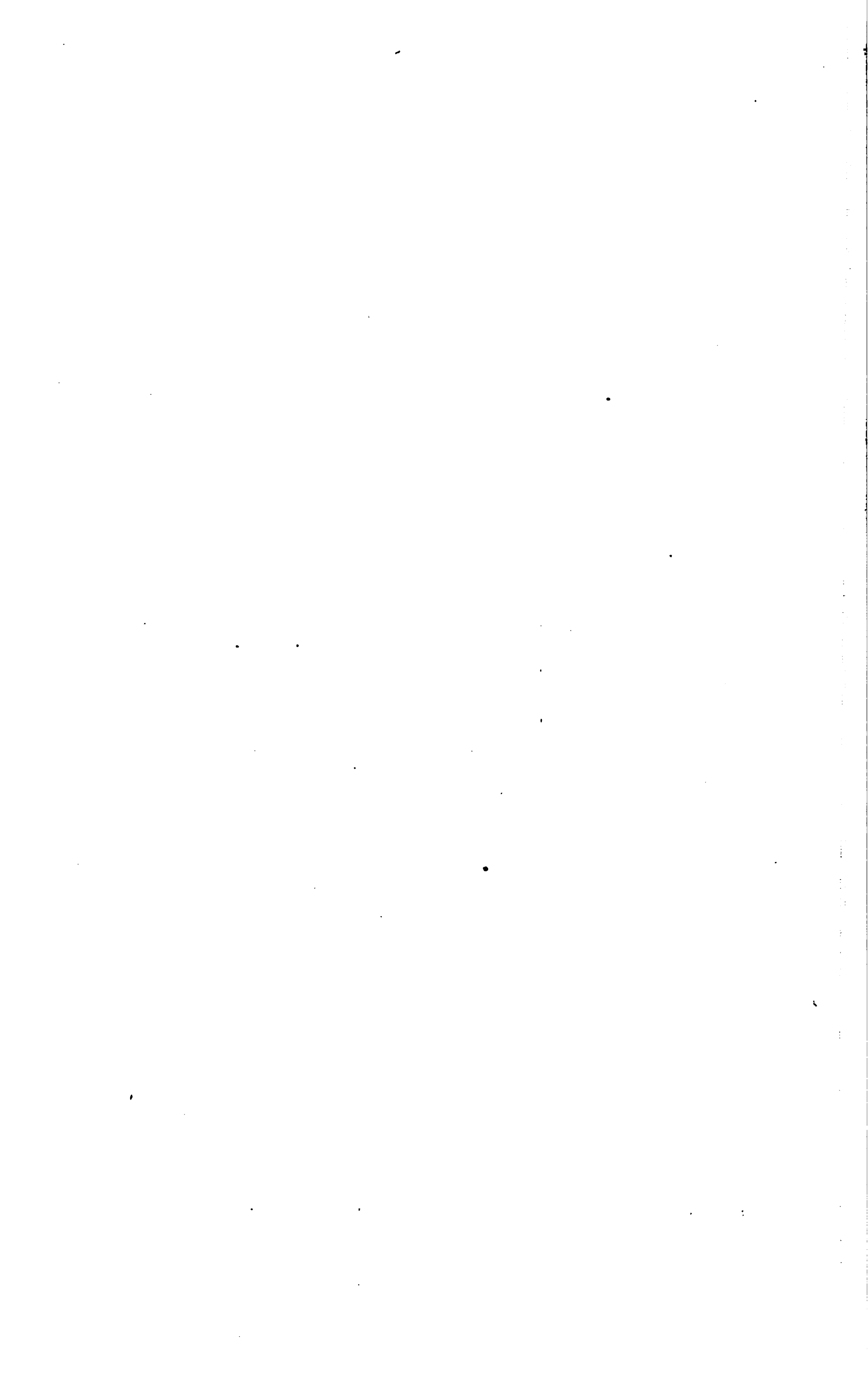


Fig. 3.

Fig. 2.

Fig. 1.

Lith. Anst. v. Th. Bannwarth, Wien.



Über eine einfache Anordnung zur Herstellung eines elektrostatischen Drehfeldes

von

Anton Lampa.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. Juni 1907.)

Herr v. Lang hat eine eigenartige Anordnung zur Erzeugung eines elektrostatischen Drehfeldes angegeben.[1] Er befestigt an dem einen Rande einer jeden Platte eines Kondensators eine in den Innenraum des Kondensators hineinragende Holzplatte, derart, daß Kondensator- und Holzplatten längs der Seiten eines Rechteckes angeordnet erscheinen; werden die Kondensatorplatten an die Pole der Sekundärspule eines Wechselstromtransformators angeschlossen, so erhält man ein Drehfeld. Diese Anordnung brachte mich auf den Gedanken, ob nicht auch die gewöhnliche Drehfeldanordnung mit vier Metallplatten zur Erzeugung eines Drehfeldes mit Wechselstrom allein benützt werden könne, indem man das eine Plattenpaar an die Pole des Transformators anschließt und je eine Platte des anderen Paares mit je einer Platte des ersten durch einen schlechten Leiter verbindet. Der Versuch entsprach den gehegten Erwartungen. Diese Anordnung läßt sich theoretisch folgendermaßen behandeln:

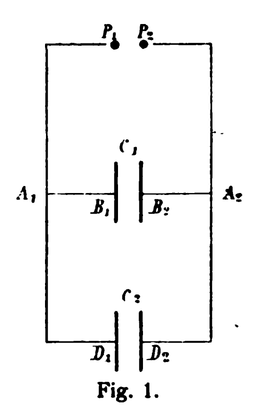


Fig. 1.

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CXVI, Abt. IIa, Mai 1907.

Es seien (Fig. 1) P_1 und P_2 die Pole der Sekundärspule eines Transformators, welcher die elektromotorische Kraft E liefert. An dieselben seien zwei Kapazitäten C_1 und C_2 in Parallelschaltung durch induktionslose Widerstände angeschlossen. Es sei der Widerstand der Leiterstücke

$$P_1A_1 + P_2A_2 = W$$
$$A_1B_1 + A_2B_2 = w_1$$
$$A_1D_1 + A_2D_2 = w_2$$

und die durch die Ladung des Kondensators C_1 hervorgerufene elektromotorische Kraft e_1, jene durch die Ladung des Kondensators C_2 hervorgerufene e_2. Bezeichnen wir den Strom in W mit I, den Strom in w_1 mit i_1, den Strom in w_2 mit i_2, so geben die Kirchhoff'schen Sätze die Gleichungen

$$I = i_1 + i_2$$
$$IW + i_1 w_1 = E - e_1$$
$$IW + i_2 w_2 = E - e_2.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$(i_1 + i_2)W + i_1 w_1 = E - e_1$$
$$(i_1 + i_2)W + i_2 w_2 = E - e_2$$

und

$$i_1 = \frac{Ew_2 - e_1(W + w_2) + e_2 W}{W(w_1 + w_2) + w_1 w_2}$$

$$i_2 = \frac{Ew_1 - e_2(W + w_1) + e_1 W}{W(w_1 + w_2) + w_1 w_2}$$

oder, indem wir $W(w_1 + w_2) + w_1 w_2 = N$ setzen:

$$Ni_1 = Ew_2 - e_1(W + w_2) + e_2 W$$
$$Ni_2 = Ew_1 - e_2(W + w_1) + e_1 W.$$

Nun ist weiter $i_1 = C_1 \frac{de_1}{dt}$ und $i_2 = C_2 \frac{de_2}{dt}$, womit die beiden letzten Gleichungen übergehen in:

$$NC_1 \frac{de_1}{dt} = Ew_2 - e_1(W + w_2) + e_2 W$$

$$NC_2 \frac{de_2}{dt} = Ew_1 - e_2(W + w_1) + e_1 W.$$

Die Auflösung dieses Gleichungssystems erfolgt in bekannter Weise. Nehmen wir, unserem Falle entsprechend, die Kapazitäten der beiden Kondensatoren gleich groß an, $C_1 = C_2 = C$, so erhält man zur Bestimmung der elektromotorischen Kräfte e_1 und e_2 die Gleichungen:

$$\frac{d^2 e_1}{dt^2} + \frac{2W + w_1 + w_2}{NC} \frac{de_1}{dt} + \frac{1}{NC^2} e_1 = \frac{w_2}{NC} \frac{dE}{dt} + \frac{1}{NC^2} E$$

$$\frac{d^2 e_2}{dt^2} + \frac{2W + w_1 + w_2}{NC} \frac{de_2}{dt} + \frac{1}{NC^2} e_2 = \frac{w_1}{NC} \frac{dE}{dt} + \frac{1}{NC^2} E.$$

Nun sei w_1 unendlich klein ($w_1 = 0$); wir können dann die Gleichungen schreiben:

$$N \frac{d^2 e_1}{dt^2} + \frac{2W + w_2}{C} \frac{de_1}{dt} + \frac{1}{C^2} e_1 = \frac{w_2}{C} \frac{dE}{dt} + \frac{1}{C^2} E$$

$$N \frac{d^2 e_2}{dt^2} + \frac{2W + w_2}{C} \frac{de_2}{dt} + \frac{1}{C^2} e_2 = \frac{1}{C^2} E.$$

Ist der erste Kondensator unmittelbar an die Pole des Transformators angeschlossen, d. h. durch einen unendlich kleinen Widerstand ($W = 0$) mit denselben verbunden, so ist wegen $W = 0$ und $w_1 = 0$ auch $N = 0$. Schreiben wir jetzt statt w_2 einfach w, so erhalten wir schließlich für diesen Fall:

$$\frac{de_1}{dt} + \frac{1}{wC} e_1 = \frac{dE}{dt} + \frac{1}{wC} E$$

$$\frac{de_2}{dt} + \frac{1}{wC} e_2 = \frac{1}{wC} E.$$

E ist eine harmonische Funktion der Zeit. Setzen wir demnach $E = E \sin \alpha t$. Zur Bestimmung von e_1 dient dann die Gleichung:

$$\frac{de_1}{dt} + \frac{1}{wC} e_1 = \alpha E \cos \alpha t + \frac{E}{wC} \sin \alpha t. \qquad (1)$$

Ihre Lösung ist $e_1 = a_1 \sin \alpha t$. Die Einsetzung dieses Wertes in die Gleichung (1) liefert:

$$a_1 \alpha \cos \alpha t + \frac{a_1}{wC} \sin \alpha t = \alpha E \cos \alpha t + \frac{E}{wC} \sin \alpha t.$$

Diese Gleichung soll für beliebige t gelten. Dies erfordert $a_1 = E$, womit sich $e_1 = E \sin \alpha t$ ergibt. Die Potentialdifferenz des ersten Kondensators hat dieselbe Amplitude und dieselbe Phase wie die ladende, vom Transformator gelieferte elektromotorische Kraft.

Für e_2 hat man die Gleichung

$$\frac{de_2}{dt} + \frac{1}{wC} e_2 = \frac{1}{wC} E \sin \alpha t. \tag{2}$$

Setzt man

$$e_2 = a_2 \sin (\alpha t - \varphi),$$

so liefert die Substitution dieses Wertes in (2) die Gleichung:

$$\left(a_2 \alpha \sin \varphi + \frac{a_2}{wC} \cos \varphi - \frac{E}{wC}\right) \sin \alpha t + \\ + \left(a_2 \alpha \cos \varphi - \frac{a_2}{wC} \sin \varphi\right) \cos \alpha t = 0.$$

Die Forderung, daß diese Gleichung für beliebige t erfüllt sei, gibt die Gleichungen:

$$a_2 \alpha \sin \varphi + \frac{a_2}{wC} \cos \varphi = \frac{E}{wC} \tag{3}$$

$$a_2 \alpha \cos \varphi - \frac{a_2}{wC} \sin \varphi = 0. \tag{4}$$

Aus Gleichung (4) folgt $\operatorname{tg} \varphi = \frac{wC}{\alpha}$ und mit diesem Werte aus (3):

$$a_2 = \frac{E}{\alpha} \frac{\sqrt{\alpha^2 + w^2 C^2}}{1 + w^2 C^2} = \frac{E}{\alpha w C} \frac{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{w^2 C^2}}}{1 + \frac{1}{w^2 C^2}},$$

und hiemit

$$e_2 = \frac{E}{\alpha w C} \frac{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{w^2 C^2}}}{1 + \frac{1}{w^2 C^2}} \sin \left(\alpha t - \operatorname{arc\,tg} \frac{wC}{\alpha}\right).$$

Die Potentialdifferenz des zweiten Kondensators hat bei endlichem w eine kleinere Amplitude als die treibende elektromotorische Kraft und ist in ihrer Phase gegen dieselbe verzögert. Die Phasenverschiebung ist Null und $e_2 = E$, wenn $w = 0$ ist, die beiden Kondensatoren also durch einen unendlich kleinen Widerstand verbunden werden. Die Phasenverschiebung würde 90° betragen, wenn $\operatorname{tg} \varphi = \frac{wC}{a} = \infty$, d. h. also $w = \infty$ wäre. Dann wäre aber auch $a_2 = \frac{E}{\infty} = 0$.

Aus den vorstehenden Überlegungen geht hervor, daß man bei einer Anordnung der beiden Kondensatoren, wie sie in Fig. 2 dargestellt ist, ein Drehfeld erhält, wenn man die Platten a_1, a_2 an den Transformator anschließt und je eine der Platten b mit je einer der Platten a durch einen passenden Widerstand verbindet. Verbindet man a_1 mit b_1, a_2 mit b_2, so ist der Drehungssinn des Feldes, von oben gesehen, gleich dem Sinne der Uhrzeigerbewegung; verbindet man a_1 mit b_2 und a_2 mit b_1, so ist sein Drehungssinn entgegengesetzt. Diese Drehungsrichtungen entsprechen der Theorie. Das Drehfeld ist nicht »homogen«, indem weder seine Feldstärke einen konstanten Wert hat, noch auch seine Winkelgeschwindigkeit konstant ist. Zur Demonstration eines elektrostatischen Drehfeldes reicht aber die angegebene Anordnung vollkommen aus; gerade für diesen Zweck dürfte sie sich durch ihre Einfachheit besonders eignen.

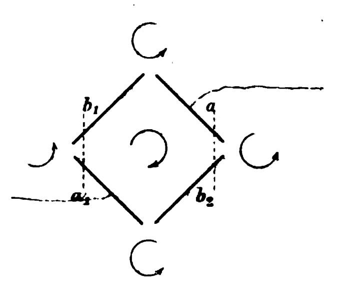


Fig. 2.

Als Widerstand w zur Verbindung der Kondensatorplatten verwendete ich zunächst Holzstäbe, zum Nachweis des Drehfeldes dienten Papierzylinder, wie sie von v. Lang benützt benützt wurden.[1] Der Versuch gelang, wie bereits erwähnt wurde, vollständig. Sowohl im Innenraum zwischen den Platten

[1] v. Lang, Versuche im elektrostatischen Drehfelde. Diese Sitzungsber., Bd. CXV, Abt. IIa, März 1906.

als auch außerhalb derselben erhält man, wie dies in Fig. 2 angedeutet ist, eine Rotation der Papierzylinder. Außerhalb der Platten ist die Rotationsrichtung entgegengesetzt der Rotationsrichtung im Inneren. Die Lage der Überbrückungswiderstände ist nicht von Belang; man kann die Stäbe direkt auf die Platten auflegen oder die metallenen Träger der Platten durch sie verbinden.

Wie ich bei mehrfacher Wiederholung der Versuche fand, war es ein freundlicher Zufall, welcher den ersten Versuch mit den Holzstücken sogleich gelingen ließ. An einem Tage, der sich durch einen besonders hohen Wert der Luftfeuchtigkeit auszeichnete — an diesem Tage isolierte, wie ich nachträglich erfuhr, keines der in unserem Institutsgebäude bei den Untersuchungen über Radioaktivität gebrauchten Elektroskope —, mißlangen die Versuche mit den Holzstäben. Die Theorie gab mir den Fingerzeig, dieses Mißlingen auf den hohen Feuchtigkeitsgrad zurückzuführen und ich fand in der Tat, daß die Feuchtigkeit, d. h. mit anderen Worten, die Leitfähigkeit des Holzes von maßgebendem Einfluß ist. Dieser Einfluß erstreckt sich aber auch auf die Indikatoren des Drehfeldes, die Papierzylinder. Und dies ist wichtig zu wissen, wenn die Versuche mit Sicherheit gelingen sollen. Trocknet man die Papierzylinder vollkommen aus, etwa indem man sie längere Zeit über eine durch eine Bunsenflamme erhitzte Metallplatte hängt, so rotieren sie in dem Drehfelde **nicht**. Sie rotieren aber ebensowenig, wenn sie sehr feucht sind, also eine zu große Leitfähigkeit haben. Man braucht einen solchen Papierzylinder nur einige Minuten in ein Becherglas zu hängen, auf dessen Boden sich siedendes Wasser befindet, um ihn als Indikator für das Drehfeld unbrauchbar zu machen. Daß die Papierzylinder nicht rotieren, wenn sie vollkommen trocken sind, weist darauf hin, daß ihre Rotation nicht durch dielektrische Hysteresis, sondern bloß durch ihre Leitfähigkeit bedingt ist. Für das Drehungsmoment ϑ, welches eine hysteresisfreie leitende dielektrische Kugel mit der Dielektrizitätskonstante D_i und der Leitfähigkeit λ_i in einem homogenen Drehfeld von der Periode τ erfährt, das von einem Medium von der Dielektrizitätskonstante D_a

und der Leitfähigkeit λ_a erfüllt ist, habe ich den Ausdruck abgeleitet:[1]

$$\vartheta = a^2 R \frac{4\pi}{\alpha} \frac{3(D_a\lambda_i - D_i\lambda_a)}{\frac{16\pi^2}{\alpha^2}(2\lambda_a+\lambda_i)^2+(2D_a+D_i)^2};$$

hierin ist $\alpha = \frac{2\pi}{\tau}$, R der Radius der Kugel und $\frac{a}{R}$ das Potentialgefälle des Feldes. Ist das äußere Medium Luft gewöhnlicher Dichte, so können wir $D_a = 1$ und $\lambda_a = 0$ setzen (die Ionisierungsspannung wird bei der getroffenen Versuchsanordnung lange nicht erreicht) und erhalten:

$$\vartheta = a^2 R \frac{4\pi}{\alpha} \frac{3\lambda_i}{\frac{16\pi^2}{\alpha^2}\lambda_i^2+(2+D_i)^2}.$$

Dieses Drehungsmoment ist Null für $\lambda_i = 0$, aber auch für $\lambda_i = \infty$. Das Maximum des Drehungsmomentes erhält man für $\lambda_i = \frac{\alpha}{4\pi}(2+D_i)$. Dies macht verständlich, daß der nasse Papierzylinder in dem Drehfeld ebensowenig rotiert wie ein Zylinder aus dünnem Kupferblech.

Daß die Leitfähigkeit der Materialien, welche als Widerstand w verwendet werden, für das Zustandekommen des Drehfeldes von Bedeutung ist, geht aus der oben entwickelten Theorie hervor. Glas, Siegellack, Paraffin wirken nicht, ihre Leitfähigkeit ist zu klein, w also zu groß; aus demselben Grunde wirkt auch sehr gut getrocknetes Holz nicht. Metalle, Bogenlampenkohle und nasses Holz wirken nicht wegen zu hoher Leitfähigkeit, w ist in diesem Falle sehr klein und zwischen den Platten a und b kommt dann keine nennenswerte Phasenverschiebung zu stande. Als ein sehr geeigneter Überbrückungswiderstand, dessen Größe von der Luftfeuchtigkeit unabhängig ist, erweisen sich Geißler'sche Röhren. Ich fand

---

[1] Über Rotationen im elektrostatischen Drehfelde. Ein Beitrag zur Frage der dielektrischen Hysteresis. Diese Sitzungsber., Bd. CXV, Abt. IIa, Dezember 1906.

Röhren mit kapillarem Mittelteil, die zur Beobachtung der Spektra der Füllungsgase dienen, gut brauchbar. Die Überbrückung durch Geißler'sche Röhren wird man zweckmäßig, ehe man die anderen Versuche unternimmt, vornehmen, um sich von dem guten Zustande des Indikators, des Papierzylinders, zu überzeugen. Auch Zigarren sind als Überbrückungswiderstand geeignet.

Gelegentlich macht sich eine Störung im Verhalten des außerhalb der Platten aufgestellten Papierzylinders bemerklich. Dieselbe rührt, wenn dieser Zylinder sonst im richtigen Zustand ist, von Ladungen her, die auf ihn — da er ja ziemlich nahe an den Zwischenraum zwischen zwei Platten, also ziemlich nahe an die Ränder derselben gestellt werden muß — von den Platten übergegangen sind. Abstreifen der Oberfläche des Zylinders mit der Hand behebt diese Störung.

Zur Ausführung der vorstehend geschilderten Versuche konnte ich die Apparate benützen, welche Herr v. Lang für seine Versuche im elektrostatischen Drehfelde gebaut hatte. Ich bin Herrn Hofrat v. Lang für die freundliche Überlassung seiner Apparate zu aufrichtigem Danke verbunden, den ich an dieser Stelle zum Ausdruck bringen möchte.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Klasse erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abteilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abteilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Kristallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.

Abteilung II a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abteilung II b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abteilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Tiere sowie aus jenem der theoretischen Medizin.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichnisse ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Alfred Hölder, k. u. k. Hof- und Universitätsbuchhändler (Wien, I., Rothenthurmstraße 13), zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Teile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Teile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 14 K — 14 M.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Originalauszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird wie bisher acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 5 K — 5 M.



SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVI. BAND. VI. HEFT.

JAHRGANG 1907. — JUNI.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 7 TAFELN UND 16 TEXTFIGUREN.)

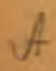


WIEN, 1907.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN KOMMISSION BEI ALFRED HÖLDER,

K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER.
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.



INHALT

des 6. Heftes, Juni 1907, des CXVI. Bandes, Abteilung IIa, der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Klasse.

Preis des ganzen Heftes: 3 K 15 h — 3 M 15 pf.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVI. BAND. VI. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



Die Phasenverschiebung durch Reflexion an den Jamin'schen Platten

von

E. Mach,

w. M. k. Akad.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Juli 1907.)

Stellt man ein exakt geschliffenes rechtwinkliges Parallelepiped von schlierenfreiem Glas, etwa 75 *mm* lang, 23 *mm* hoch, 13 *mm* dick, so auf, daß die Ebene der 75 *mm* langen vertikalen Grenzfläche sehr nahe an einer vertikalen engen Fensterladenspalte vorbeigeht, welche sich in dieser Grenzfläche spiegelt, so kann man, die Lupe auf die von der Lichtquelle fernere vertikale Kante dieser Fläche einstellend, die Hälfte eines Interferenzstreifensystems beobachten, dessen mittlerer dunkler Streifen mit der eben genannten Kante zusammenfällt. Dies ist der bekannte Lloyd'sche Versuch mit einem Spiegel, welcher gewöhnlich als Beleg der von der Theorie geforderten Phasenverschiebung von einer halben Schwingung bei Reflexion am optisch dichteren Medium (Glas) angeführt wird. Es ist mir nicht bekannt, daß jemals eine Umkehrung dieses Experiments versucht worden wäre. Mit dem genannten Parallelepiped gelingt die Umkehrung sehr leicht, indem man, die Lichtquelle und deren Spiegelbild vertauschend, durch das Glas auf die Spalte hinblickt und dieselbe an der das Glas begrenzenden Luft sich spiegeln läßt. Dann erhält man aber ein Interferenzbild von genau demselben Charakter wie in dem vorigen Falle, wobei wieder ein dunkler Streifen in der Spiegelebene liegt. Radiert man mit der Teilmaschine zwei feine Spalten von $^1/_8$ *mm* Abstand in die Versilberung einer Glasplatte, so kann man diese so an der vom Licht zuerst

getroffenen Fläche des Parallelepipeds befestigen, daß jede Spalte in den Ort des Spiegelbildes der anderen Spalte fällt. Dann sieht man, die Lupe oder das Mikroskop auf die von den Lichtquellen fernere Kante einstellend, ein vollständiges Interferenzstreifensystem mit durchaus gleich breiten Streifen, dessen mit der Spiegelebene zusammenfallende Symmetrale dunkel ist. Die Hälfte des Streifensystems liegt im Glas, die andere Hälfte in der Luft. Schon der bloße Anblick läßt hierüber keinen Zweifel und ein schwach vergrößerndes Mikroskop mit Okularmikrometer zeigt alle Abstände zwischen zwei benachbarten Minimis gleich groß. Anwendung von Licht mit vertikaler oder horizontaler Polarisationebene ändert diesen Befund nicht.[1]

Der Lloyd'sche Versuch ergibt also für beide Fälle dasselbe Resultat, was man verständlich findet, wenn man bedenkt, daß bei streifender Inzidenz sowohl die Luft- als auch die Glasgrenze eine für den Lichtprozeß undurchdringliche Wand vorstellt. Darum hat aber auch diese auf den speziellen Fall der streifenden Inzidenz beschränkte Versuchsform keinen besonderen Wert.

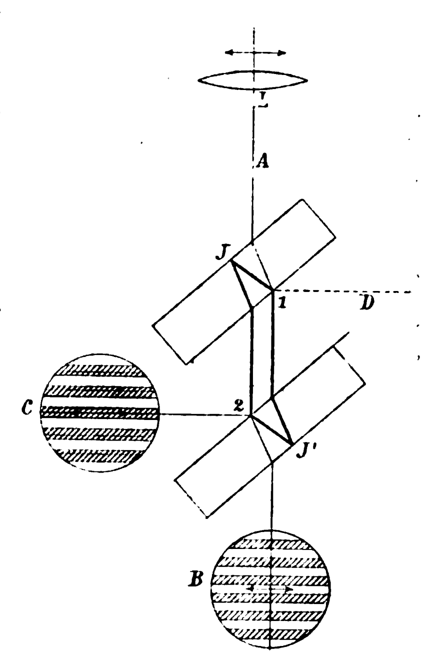
Die Frage der Phasenverschiebung bei der Reflexion trat zuerst bei dem genaueren Studium der Erscheinungen am Newton'schen Glase auf und dieser Fall bot auch die erste Gelegenheit, derselben experimentell näher zu treten. Eine vollständige Analogie zu dem Newton'schen Glase bilden die Jamin'schen Platten, welche jedoch bei dem Umstande, daß die interferierenden Strahlen weit getrennte gesonderte Wege verfolgen, eine viel bequemere Prüfung und Änderung der Versuchsumstände gestatten.

Sonnenlicht falle auf die Linse L, deren Brennpunkt zwischen den nahe aneinander gerückten Jamin'schen Platten J und J' liegt, so daß die Bündel, soweit sie innerhalb der Platten verlaufen, kleinen Querschnitt behalten und, abgesehen von der Überdeckung in 1 und 2, reinlich getrennt bleiben. Nur

---

[1] Wie das Ergebnis des umgekehrten Lloyd'schen Versuches mit Fresnel's Auffassung zu vereinigen ist, mag hier einstweilen dahin gestellt bleiben. Vergl. Fresnel, Oeuvres, T. I, p. 767 bis 799, insbesondere Verdet's, Anmerkung p. 789.

der Achsenstrahl ist in nebenstehender Figur dargestellt. Bei 1 trennen sich die Bündel; das eine verläuft über J, das andere über J'; in 2 findet wieder Vereinigung statt. Beide Bündel gehen nun wieder sich überdeckend bis B, wo der Schnitt des Strahlenkegels durch einen Projektionsschirm die Strahlen verschiedener Neigung in verschiedener Interferenzfarbe zeigt. Da beide Strahlenbündel genau dieselben Reflexionen und Brechungen durchmachen, ist der kleinste Gangunterschied Null. Wir erhalten einen mittleren weißen Interferenzstreifen, auf welchen wir den Schatten einer vor L gestellten, durch den Doppelpfeil angedeuteten Nadel fallen lassen. Fassen wir nun das von A ausgehende Licht bei C ab, so erscheint jetzt der Schatten der Nadel auf einem dunklen mittleren Interferenzstreifen. Bezeichnen wir die Phasenverschiebung durch äußere Reflexion mit a, jene durch innere Reflexion mit i und messen wir beide durch Bruchteile der ganzen Schwingung (1), so erfährt der über J' nach C verlaufende Strahl die Phasenverschiebung i, der über J nach C gelangende Strahl aber $a+2i$. Demnach entspricht das Interferenzbild bei C der Gleichung $a+i = {}^1/_2$.



Übertragen wir nun die Linse L mit der Nadel nach D und lassen wir das Licht von D nach 1 einfallen, wo sich die Bündel trennen, um sich bei 2 wieder zu vereinigen und bei C ein Interferenzbild mit mittlerem weißen Streifen zu liefern, auf welchen wir den Schatten der Nadel einstellen. Der Schatten erscheint aber sofort auf einem dunklen mittleren Streifen, wenn wir etwa bei J die Reflexion an Wasser, welches

schwächer als Glas, bei J' an Schwefelkohlenstoff, der stärker als Glas bricht, stattfinden lassen.[1] Nach unserer Bezeichnung entspricht der ersteren Reflexion die Phasenverschiebung i, der zweiten aber die Phasenverschiebung a. Der zweite Doppelversuch liefert also die Gleichung $a - i = {}^1/_2$. Aus allen vier Versuchen, beziehungsweise aus den beiden Gleichungen folgt $a = {}^1/_2$ und $i = 0$.

Bei dem ersten Doppelversuch kann man die beiden Bilder B und C bequem nebeneinander zugleich sehen; der zweite Doppelversuch zeigt natürlich die beiden Bilder C nacheinander. Der Schatten der Nadel bleibt in beiden Versuchen auch in schwarzen Streifen vollkommen deutlich, weil mit der Änderung der Phasenverschiebung zugleich eine Intensitätsverschiedenheit der interferierenden Strahlen eingeführt wird.

Die beschriebenen sehr einfachen Versuche[2] bestätigen die Folgerungen, welche Fresnel aus seiner mechanischen Theorie der Reflexion gezogen und die Stokes[3] schon aus der allgemeinen einfachen Voraussetzung abgeleitet hat, daß man (mit umgekehrtem Bewegungssinn) den einfallenden Strahl (und nur diesen) zurück erhält, wenn man den aus diesem hervorgehenden reflektierten und gebrochenen Strahl synchron mit Umkehrung der momentanen Schwingungsgeschwindigkeit in sich zurückleitet. Mit den entsprechenden Modifikationen — Einführung polarisierten Lichtes und spektraler Auflösung — dürften sich diese Versuche auch zur Erprobung der genaueren Cauchy'schen Reflexionstheorie eignen.

---

[1] Vergl. Lieben-Festschrift, Leipzig 1906, p. 295.

[2] Es ist zwar recht bequem, mikrometrische Bewegungen zur Verfügung zu haben, meinem Sohn Ludwig gelangen aber sämtliche hier beschriebenen Versuche auch aus freier Hand mit durch Wachs auf einem Brettchen befestigten mäßigen Planplatten.

[3] Mathematical and Physical Papers, Cambridge 1883, Vol. II, p. 90.

Zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit nach Fizeau und akustische Analogien

von

Mathias Cantor in Würzburg.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Juni 1907.)

§ 1. Sieht man von den astronomischen Messungen ab, so beruht die Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit auf den Überlegungen, welche von Fizeau angestellt worden sind; denn dieselben Überlegungen liegen auch der Methode von Foucault zu Grunde. Bei der fundamentalen Bedeutung, welche der Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit zukommt, erscheint eine exakte Begründung der Fizeau'schen Methode von beträchtlicher Wichtigkeit. Der Mangel einer solchen zeigte sich aber auf das deutlichste bei der Diskussion jener Versuche, welche einen Einfluß der Farbe auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes ergaben.

Young und Forbes[1] hatten durch Messungen, welche im wesentlichen nach der Fizeau'schen Methode angestellt worden waren, gefunden, daß das blaue Licht sich um 1·8% schneller fortpflanzt als das rote.

Lord Rayleigh[2] führte dieses Ergebnis darauf zurück, daß bei der Fizeau'schen Methode nicht die »Lichtgeschwindigkeit«, sondern eine »Gruppengeschwindigkeit« bestimmt werde.

Die Gruppe entsteht durch Übereinanderlagerung zweier Wellenzüge von gleicher Richtung und gleicher Amplitude,

---

[1] Young und Forbes, Nature, *24*, 303 (1881).

[2] Rayleigh, ibid., *24*, 382 (1881).

deren Perioden sich ein wenig voneinander unterscheiden. Lord Rayleigh[1] hatte früher solche Wellengruppen untersucht und gezeigt, daß deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der eines einfachen Wellenzuges verschieden ist, und er nimmt an, daß bei der Fizeau'schen Methode die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer solchen Gruppe gemessen wird.

W. H. Macaulay[2] hat auf die Schwierigkeit hingewiesen, welche der Erklärung von Lord Rayleigh anhaftet, und denselben zu einer weiteren Darstellung[3] veranlaßt. Indes geht auch aus diesen Betrachtungen in keiner Weise hervor, wie durch das Fizeau'sche Experiment veranlaßt wird, daß Wellen von verschiedener Periode auftreten, in welcher Beziehung die Perioden der einzelnen Wellen, welche die Gruppe bilden sollen, zu der Periode des Lichtes stehen, mit dem der Fizeau'sche Versuch angestellt wird, und warum endlich gerade die Geschwindigkeit der Gruppe bei diesem Versuch bestimmt wird.

Spätere Auseinandersetzungen[4] beziehen sich auf die Methode von Foucault und brauchen deshalb hier nicht näher besprochen zu werden. Es geht aber aus ihnen hervor, daß sowohl über die Grundlage der physikalischen Methoden zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit als auch über die Bedeutung der mit diesen Methoden ausgeführten Messungen eine ziemliche Unsicherheit besteht und der Zusammenhang zwischen der nicht direkt meßbaren Lichtgeschwindigkeit und den Beobachtungen, durch welche ihre Größe bestimmt wird, nicht streng hergestellt ist. Unter diesen Umständen schien es angemessen, zunächst festzustellen, was bei dem Fizeau'schen Experiment eigentlich beobachtet wird.

§ 2. Die Fizeau'sche Anordnung läßt sich im Schema durch die Fig. 1 darstellen.

Ein Bündel paralleler Strahlen durchsetzt das rotierende Zahnrad R, wird vom Spiegel S reflektriert und nach noch-

---

1 J. W. Strutt, Baron Rayleigh, Theorie des Schalles. Deutsch von Neesen, Braunschweig 1880, 1. Bd., p. 327, und 2. Bd., p. 385.

2 W. H. Macaulay, Nature, *24*, 556 (1881).

3 Rayleigh, Nature, *25*, 52 (1881/82).

4 Vergl. F. Auerbach im Handbuch der Physik, herausgegeben von A. Winkelmann, 2. Aufl., Bd. VI, p. 480 (1906).

maligem Durchgange durch das Zahnrad durch das Auge bei A wahrgenommen.

Die Beobachtung ergibt, daß die Intensität der wahrgenommenen Lichter sich mit wachsender Rotationsgeschwindigkeit periodisch ändert. Eine exakte Theorie der Erscheinung wird die Frage zu beantworten haben: Wie hängt die beobachtete Lichtintensität von den Abmessungen der Apparate und der Geschwindigkeit des Rades ab?

§ 3. Um zu einer Lösung dieser Frage zu gelangen, kann zunächst der Spiegel in der Fizeau'schen Anordnung ersetzt werden durch ein zweites Zahnrad, welches dem ersten ganz gleich ist, sich am Orte des Spiegelbildes des ersten befindet und mit demselben vollkommen synchron bewegt wird.

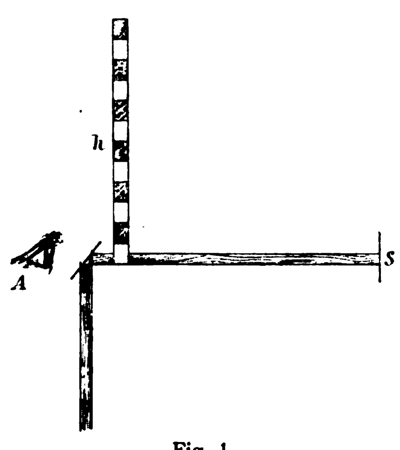


Fig. 1.

Dies vorausgesetzt, soll der Durchgang eines Bündels paralleler Strahlen durch die beiden rotierenden Räder untersucht werden. Das Bündel sei normal zu den Rädern — diese Richtung wird zur x-Achse gewählt — und sei so schmal, daß es an allen Stellen als von gleicher Intensität betrachtet werden kann.

Der Lichteindruck, den das aus dem zweiten Zahnrad austretende Licht in einem dort befindlichen Auge bewirkt, wird dann durch den zeitlichen Mittelwert der Amplitudenquadrate bestimmt. Der Raum zwischen den Zahnrädern sei erfüllt von einem homogenen Medium, in welchem die Maxwell'schen Gleichungen gelten, so daß für den Lichtvektor E die Gleichung

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \tag{1}$$

besteht, wo ω die Lichtgeschwindigkeit in dem Medium bezeichnet. Zur Bestimmung von E ist dann weiter der Anfangs-

zustand und das Verhalten an der Stelle $x=0$, wo sich das erste Zahnrad befindet, gegeben.

Durch das Zahnrad wird der hinter ihm befindliche Raum abwechselnd beleuchtet und vollständig verdunkelt. Ist N die Schwingungszahl des einfallenden Lichtes und ν die Zahl der Verdunkelungen in der Sekunde, so hat man für $x=0$

$$E = S \sin 2\pi N t, \tag{2}$$

wo

$$S = A\left[1 + \frac{4}{\pi}\left(\cos 2\pi\nu t - \frac{1}{3}\cos 6\pi\nu t + \ldots\right)\right].$$

Dabei bezeichnet $2A$ die Amplitude des einfallenden Lichtes.

Bis zur Zeit $t=0$ soll das Zahnrad sich in einer Stellung befinden, in welcher das Licht ungestört durchgeht, so daß bis $t=0$

$$E = 2A \sin 2\pi\left(Nt - \frac{x}{\omega}\right). \tag{3}$$

Die Differentialgleichung (1) kann nun entsprechend den Nebenbedingungen (2) und (3) nach der von Riemann[1] angegebenen Methode, welche schon bei einer früheren Gelegenheit[2] benützt worden ist, integriert werden. Die dort angewendete Bezeichnung und Darstellung wird auch hier gebraucht.

Die Rechnung wird sehr vereinfacht, wenn die Verdunkelungen nicht sprungweise, sondern stetig erfolgen. Dies wird erreicht, wenn man statt der Zahnräder Schirme benützt, welche den Zähnen entsprechende Sektoren tragen, durch die das Licht stetig bis zur vollständigen Abblendung geschwächt wird. Auch mit einem rotierenden Spiegel oder Nichol'schen Prisma ließe sich eine stetige Abschwächung des Lichtes ausführen. Im folgenden soll eine solche vorausgesetzt werden und dann kann S in (2) ersetzt werden durch

$$S' = 2A \cos^2 \pi\nu t.$$

---

[1] Heinrich Weber, Die partiellen Differentialgleichungen. Braunschweig 1901, 2. Bd., p. 224.

[2] M. Cantor, Annalen der Physik, 4. Folge, 20. Bd., p. 333 (1906).

Setzt man noch $y = \omega t$ und stellt E in der xy-Ebene dar (Fig. 2), so hat man für E im Punkte (xy) : $\mathfrak{b}$

$$2E = E_{\mathfrak{a}} + E_{\mathfrak{b}} + \int_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}} \frac{\partial E}{\partial y} dx + \frac{\partial E}{\partial x} dy. \tag{I}$$

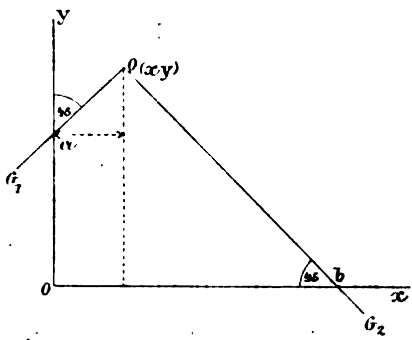


Fig. 2.

Aus (3) folgt dann für $y = 0$

$$\left.\begin{aligned} E &= -2A \sin \beta x \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= -2A\beta \cos \beta x \\ \frac{\partial E}{\partial y} &= 2A\beta \cos \beta x, \end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist $\beta = \frac{2\pi N}{\omega}$.

Es folgt hieraus, daß $\left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y}\right)$ längs den zu G_2 parallelen Geraden verschwindet, und man erhält deshalb für $x = 0$

$$\left.\begin{aligned} E &= 2A \cos^2 \alpha y \sin \beta y \\ \frac{\partial E}{\partial y} &= 2A\beta \cos^2 \alpha y \cos \beta y - 2A\alpha \sin 2\alpha \sin \beta y \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= -2A\beta \cos^2 \alpha y \cos \beta y + 2A\alpha \sin 2\alpha \sin \beta y, \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

wo $\alpha = \frac{\pi \nu}{\omega}$.

Bei Ausführung der in (I) angedeuteten Integration ist zu berücksichtigen, daß

$$dx = 0 \text{ längs } \mathfrak{a}0$$
$$dy = 0 \text{ längs } 0\mathfrak{b}$$

und daß die Koordinaten von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, wie in Fig. 2 ersichtlich, durch $(y-x)$, beziehungsweise $(y+x)$ angegeben werden. Für E im Punkte (xy) folgt dann

$$2E = 2A\cos^2\alpha(y-x)\sin\beta(y-x) - 2A\beta\int_{y-x}^{0}\cos^2\alpha y\cos\beta y\, dy +$$
$$+ 2A\alpha\int_{y-x}^{0}\sin 2\alpha\sin\beta y\, dy + 2A\beta\int^{y+x}\cos\beta x\, dx$$

und daraus nach einfacher Umformung

$$2E = 2A\sin\beta(y-x) + A\sin(\beta+2\alpha)(y-x) +$$
$$+ A\sin(\beta-2\alpha)(y-x) \qquad (\mathrm{I}a)$$

oder, wenn y, α, β durch t, ν und N ersetzt werden,

$$2E = 2A\sin 2\pi N\left(t-\frac{x}{\omega}\right) + A\sin 2\pi(N+\nu)\left(t-\frac{x}{\omega}\right) +$$
$$+ A\sin 2\pi(N-\nu)\left(t-\frac{x}{\omega}\right). \qquad (\mathrm{I}b)$$

Hienach erhält man drei fortschreitende Wellenzüge; einen mit der ursprünglichen Periode N und zwei neue, deren Schwingungszahlen um die der Verdunkelung vermehrt, beziehungsweise vermindert sind.

Setzt man voraus, daß, wie es beim Fizeau'schen Experiment der Fall ist, ν sehr klein gegen N ist, so kann das Auge die neu auftretenden Farben nicht als solche wahrnehmen, sondern erhält einen Lichteindruck, welcher der ursprünglichen Periode entspricht. Die Intensität dieses Lichteindruckes wird erhalten, wenn man die drei Wellenzüge zu einem mit der Periode N und zeitlich veränderlicher Amplitude B zusammenfaßt.

Aus (Ia) folgt nun

$$E = A[\cos\beta x + \cos\beta x\cos 2\alpha(y-x)]\sin\beta y -$$
$$- A[\sin\beta x + \sin\beta x\cos 2\alpha(y-x)]\cos\beta y,$$

woraus man findet

$$B = 2A \cos^2 \alpha(y-x). \tag{II}$$

Dieses Licht wird nun durch den zweiten rotierenden Schirm beobachtet und durch diesen geschwächt im Verhältnis

$$\cos^2 \alpha y.$$

Der im Auge entstehende Lichteindruck wird bestimmt durch den Mittelwert des Amplitudenquadrates während der Dauer einer Verdunkelungsperiode, also während der Zeit $T = \frac{1}{\nu}$. Bezeichnet also i die wahrgenommene Lichtstärke, so hat man

$$i = \frac{1}{T}\int_0^T B^2 \cos^4 \alpha y \, dt$$

oder, wenn statt t und T y und α eingesetzt wird,

$$i = \frac{4\alpha A^2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos^4 \alpha(y-x) \cos^4 \alpha y \, dy.$$

Man erhält hieraus

$$i = \frac{3}{32} A^2 \left[1 + 8 \cos^2 \alpha x + \frac{8}{3} \cos^2 \alpha x\right] \cdot$$

Es ändert sich hienach die wahrgenommene Lichtstärke periodisch mit wachsendem α, d. i. mit wachsender Rotationsgeschwindigkeit der Schirme und erhält immer gleiche Werte für

$$\alpha x = \alpha_0 x + k\pi,$$

wenn k eine ganze Zahl bedeutet.

Die Lichtstärke verschwindet nie völlig, aber sie hat ein sehr deutliches Minimum für

$$\alpha x = k\frac{\pi}{2} \cdot$$

Die kleinste verhält sich zur größten Lichtstärke, welche ceteris paribus durch Veränderung der Rotationsgeschwindigkeit entsteht, wie 3 : 35. Die kleinste Geschwindigkeit, welche

ein Minimum von i, also die möglichst vollständige Verdunkelung des Gesichtsfeldes ergibt, ist bestimmt durch

$$\alpha x = \frac{\pi}{2} \cdot \tag{III}$$

Hiebei bedeutet x den Abstand der beiden Schirme.

Bei dem Fizeau'schen Versuch entspricht $x = 2l$, wenn mit l der Abstand des Zahnrades vom Spiegel bezeichnet wird. Setzt man für α seinen Wert und bezeichnet mit ν_0 die Zahl der Verdunkelungen pro Sekunde bei der kleinsten Geschwindigkeit, die ein Minimum von i ergibt, so muß

$$4 l \nu_0 = \omega.$$

Beim Fizeau'schen Zahnrade würde ν_0 ausgedrückt durch

$$\nu_0 = z n,$$

wenn z die Anzahl der Zähne, n die Tourenzahl des Rades angibt, bei welcher die erste Verdunkelung eintritt, und man erhält

$$\omega = 4 l z n,$$

die bekannte Relation, nach welcher die Lichtgeschwindigkeit bestimmt wurde.

§ 4. In der Maxwell'schen Gleichung (1) bedeutet ω eine durch die Natur des Mediums bestimmte Konstante. Die Anwendung dieser Gleichung setzt voraus, daß in dem Medium keine Dispersion stattfindet. Nimmt man aber an, daß diese Gleichung auch noch auf dispergierende Medien angewendet werden kann, wenn man ω für verschiedene Schwingungszahlen verschiedene Werte beilegt, so läßt sich der experimentell beobachtete Einfluß der Farbe auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes zum Ausdruck bringen.

Wie (I b) zeigt, treten neben der ursprünglichen Schwingung mit der Periode N noch solche mit den Perioden $N + \nu$ und $N - \nu$ auf. Wenn nun in einem dispergierenden Medium ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bedeutet für Licht von der Schwingungszahl N, so müssen den beiden anderen Wellen-

zügen davon verschiedene Werte ω' und ω'' beigelegt werden. Dies vorausgesetzt, erhält man aus (Ib):

$$2E = 2A \sin 2\pi N\left(t - \frac{x}{\omega}\right) + A \sin 2\pi(N+\nu)\left(t - \frac{x}{\omega'}\right) +$$
$$+ A \sin 2\pi(N-\nu)\left(t - \frac{x}{\omega''}\right). \qquad (\mathrm{I}c)$$

Nun ist ν sehr klein gegen N — bei den Versuchen von Fizeau war $\frac{\nu}{N}$ etwa 10^{-9} — und man kann deshalb setzen

$$\omega' = \omega + \frac{\partial \omega}{\partial N}\nu = \omega(1+\varepsilon)$$
$$\omega'' = \omega - \frac{\partial \omega}{\partial N}\nu = \omega(1-\varepsilon),$$

wo

$$\varepsilon = \frac{\nu}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial N}$$

auch ein sehr kleiner Bruch ist.

Führt man dies in (Ic) ein und vernachlässigt die Glieder zweiter Ordnung, so erhält man

$$2E = 2A \sin 2\pi N\left(t - \frac{x}{\omega}\right) + A \sin 2\pi N\left(t - \frac{x}{\omega} + \frac{m}{\omega}\right) +$$
$$+ A \sin 2\pi N\left(t - \frac{x}{\omega} - \frac{m}{\omega}\right),$$

wo

$$m = \varepsilon x + \frac{\omega t \nu}{N} - \frac{x\nu}{N}$$

gesetzt ist.

Drückt man t, ν, N wieder durch y, α, β aus, so wird

$$2E = 2A \sin \beta(y-x) + A \sin \beta(y-x+m) + A \sin \beta(y-x-m).$$

Für die Amplitude des resultierenden Wellenzuges erhält man

$$B = A(1 + \cos \beta m)$$

oder, wenn man für m seinen Wert setzt, nämlich

$$m = \left(\frac{x}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial N}N + y - x\right)\frac{\nu}{N},$$

wird

$$B = A\left[1 + \cos 2\alpha\left(y - x + \frac{x}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial N}N\right)\right].$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\xi = x\left(1 - \frac{N}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial N}\right),$$

so wird

$$B = 2A\cos^2\alpha(y - \xi). \tag{IIa}$$

Man erhält also denselben Ausdruck wie in (II), wenn dort x durch ξ ersetzt wird.

Die Bedingung für die erste möglichst vollständige Verdunkelung des Gesichtsfeldes wird also wie in (III) gegeben sein durch

$$\alpha\xi = \frac{\pi}{2}. \tag{IIIa}$$

Wenn wieder ν_0 die dem ersten Minimum entsprechende Anzahl von Verdunkelungen pro Sekunde bedeutet und $x = 2l$ gesetzt wird, so erhält man

$$4\nu_0 l \frac{\omega - N\frac{\partial\omega}{\partial N}}{\omega^2} = 1$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{N}{\omega}\right) = \frac{1}{4\nu_0 l}. \tag{IV}$$

Nicht wesentlich verschieden davon ist die Relation

$$4\nu_0 l = \frac{\partial}{\partial N}(N\omega).$$

$$U = \frac{\partial}{\partial N}(N\omega)$$

ist die von Lord **Rayleigh** als Gruppengeschwindigkeit bezeichnete Größe, welche durch die Beobachtung von ν_0

bestimmt wird. Ist die Dispersion des Mediums bekannt, so kann hienach ω berechnet werden.

§ 5. Im vorstehenden ist gezeigt, daß neben der ursprünglichen Welle mit der Schwingungszahl N neue mit den Schwingungszahlen $N+\nu$ und $N-\nu$ auftreten. Es bedeutet das, daß bei der Beleuchtung durch den rotierenden Schirm eine Erscheinung auftritt, wie sie nach dem Doppler'schen Prinzip bei der Reflexion an einen oszillierenden Spiegel zu erwarten ist.

Würde mit monochromatischem Licht beleuchtet und das Licht nach Durchgang durch den ersten Schirm spektral zerlegt, so würde man drei äquidistante Linien erhalten. Die Intensität der mittleren wäre viermal so groß als die der beiden äußeren. Vielleicht steht das häufig beobachtete Vorkommen von Triplets[1] hiemit im Zusammenhang.

Wenn das Licht nicht streng monochromatisch ist, so würde man eine Verbreiterung der entsprechenden Spektrallinie beobachten können. Wenn die Verdunkelung nicht stetig, wie hier vorausgesetzt wurde, sondern sprungweise durch ein Zahnrad erfolgt, so würden außer den erwähnten noch Wellen mit anderen von N weiter entfernten Schwingungszahlen entstehen. Die Intensität, die diesen entspricht, nimmt aber rasch ab, so daß auch dann die Erscheinung nicht wesentlich geändert würde.

Indes scheint es mit mechanischen Mitteln nicht erreichbar, die Zahl der Unterbrechungen so weit zu steigern, um eine merkbare Verbreiterung zu erhalten.

Günstiger liegen die Verhältnisse bei akustischen Beobachtungen, für welche sich dieselben Folgerungen ergeben.

Es ist in der Tat wiederholt beobachtet worden, daß ein einfacher Ton beim Durchgang durch eine rotierende durchlochte Scheibe in einen Dreiklang aufgelöst wird.[2] Es würde ferner die der Rechnung zu Grunde gelegte Modifikation des Fizeau'schen Versuches die Möglichkeit bieten, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles zu bestimmen.

---

[1] Vergl. H. Kayser im Handbuch der Physik, herausgegeben von A. Winkelmann, 2. Aufl., Bd. VI, p. 717 (1906).

[2] Vergl. J. Stefan, diese Sitzungsberichte, Bd. 54 (2), p. 598, 1866.

§ 6. Zum Schlusse möchte ich darauf hinweisen, daß mit Hilfe des Fizeau'schen Versuches die Messung der Zeit auf die der Länge zurückgeführt werden kann.

Wird nämlich dieser Versuch im Vakuum ausgeführt und der Umlauf des Zahnrades auf das erste Minimum eingestellt, so beschreibt dieses Rad direkt eine Uhrenbewegung. Die Anzahl der Zähne, welche von einem als Nullpunkt der Zeitmessung gewählten Augenblick an durch eine bestimmte Stelle hindurchgehen, würde unmittelbar die Maßzahl der Zeit angeben.

Zur Reproduzierbarkeit dieser physikalischen Zeitmaße wäre bloß erforderlich, daß eine Längenmessung — die von l — möglich sei und daß Helligkeitsgrade unterschieden, beziehungsweise daß solche als unverändert beurteilt werden können.

Statt des Vakuums könnte auch ein anderes Medium als Normalmedium benützt werden, wenn dasselbe und die Farbe des Lichtes eindeutig bestimmbar sind. Dies vorausgesetzt ist dann nach Michelson eine reproduzierbare Längeneinheit festgelegt.

Die Schallenergie des elektrischen Funkens

von

Rudolf Wagner.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck.

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Juli 1907.)

Für eine Schallwelle, welche auf eine vollkommen reflektierende Wand normal auffällt, ist nach Rayleigh[1] die Größe des auftretenden Druckes p durch die Gleichung

$$p = \frac{2E}{v}$$

bestimmt, wo E die in der Sekunde auffallende Energie und v die Schallgeschwindigkeit bedeutet. p ist direkt zu messen, und zwar für harmonische Schwingungen entweder nach einer Methode von Boltzmann, welche von Toepler und Boltzmann[2] ausgeführt und von Raps[3] weiter ausgearbeitet wurde oder nach einer zweiten manometrischen Methode von M. Wien.[4] Auch wurde eine Methode von W. Altberg[5] angegeben, welche gestattet, mittels Drehwage und Spiegelablesung den Druck für beliebige Komplexe von Schallwellen zu bestimmen. Der Zweck dieser Arbeit ist, nach demselben Prinzipe die Abhängigkeit der Schallenergie, die im elektrischen Funken auftritt, vom verwendeten Material der Elektrodenkugeln zu untersuchen.

---

[1] Lord Rayleigh, Phil. Mag. (6), 3, p. 383 (1902).

[2] M. Toepler und L. Boltzmann, Pogg. Ann., 141, p. 321 (1870).

[3] A. Raps, Wied. Ann., 50, p. 193 (1893).

[4] M. Wien, Wied. Ann., 36, p. 384 (1889).

[5] W. Altberg, Ann. d. Physik, 11, p. 405 (1903).

An einer stark mittels Paraffinöl gedämpften Wage, deren Empfindlichkeit passend geregelt worden war, wurde eine Halbkugelschale aus Glas äquilibriert. Schalen aus Metall eigneten sich nicht, weil sie infolge der in ihnen induzierten elektrischen Schwingungen eine ziemlich starke Anziehung gegen die Funkenstrecke zeigten. Letztere war vertikal verschiebbar und wurde so eingestellt, daß sie sich im Momente der Ablesung genau im Mittelpunkte der Halbkugel befand. Zeigt die Wage infolge des Schalldruckes des Funkens ein gewisses Übergewicht g an, so ist, weil hier nur die vertikale Komponente des Druckes zum Ausdrucke kommt,

$$P = 4r^2\pi p = 4g = \frac{2E}{v}$$

der Gesamtdruck, den die Schallwelle auf einer Kugelfläche vom Radius r hervorbringt. v ändert sich mit der Entfernung. Verwendet man jedoch immer gleich große Kugelschalen, so ist jedenfalls g ein relatives Maß für die ausgesandte Schallenergie E. Übrigens ergaben Versuche mit Glasschalen verschiedener Größe ($r = 7 \cdot 5$, 6, 5 und 4 *cm*) quantitativ gleiche Resultate.

Die Wage wurde, um kleine Unregelmäßigkeiten der Dämpfung zu beseitigen, von Teilstrich zu Teilstrich geeicht. Über derselben war, um Luftströmungen zu vermeiden, Gaze gespannt, welche nur vorn zum Zwecke der Ablesung ein Glasfenster freiließ. Der Strom wurde einem Ducretet-Transformator mit angeschaltetem Kondensator (141 *m*) entnommen, welcher durch den Straßenstrom (110 Volt, 84 Wechsel) gespeist wurde. Bei jeder Messung wurde die Spannung des Sekundärstromes und die Stärke des primären beobachtet, letztere bei allen Versuchen konstant auf 4 Ampère gehalten. Die Funkenstrecke betrug 1 *mm*, der Durchmesser der Elektrodenkugeln 8 *mm*.

Fehler entstehen vor allem dadurch, daß sich die Funkenstrecke im Momente der Messung nicht genau im Mittelpunkte der Halbkugel befindet. Bezeichnet man mit a die vertikale Entfernung der als punktförmig angenommenen Schallquelle

vom Mittelpunkte der Kugel, mit P den so erhaltenen Druck, mit P_0 den Druck, den der Funke vom Mittelpunkte der Schale aus ausüben würde, so findet man:

$$P = \frac{\pi . p}{a}\left[2a - r\sqrt{1+\frac{a^2}{r^2}} + \frac{r^2-a^2}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{r^2}}}\right] =$$

$$= P_0 . \left(1 - \frac{a}{r} + \frac{a^3}{2r^3} - \ldots\right).$$

In unserem Falle war der Halbmesser der Glasschale 7·5 *cm*, so daß dieser Fehler sicher unter 3% herabsinkt, sobald man auf $a < 2$ *mm* genau einstellt.

Eine weitere Fehlerquelle bilden die Luftströmungen, die durch die Erwärmung der Elektrodenkugeln entstehen. Diese Wirkung ist aber sicher klein (< 3 *mg*), was man erkennt, wenn man in die Funkenstrecke eine kleine Spirale aus Platin einschaltet und durch einen hindurchgeschickten Strom zum Glühen bringt. Übrigens vermindert sich dieser Fehler noch dadurch, daß hier nicht die absolute Größe des Druckes, sondern nur dessen Abhängigkeit vom Material untersucht wurde.

Messungen, bei welchen sich infolge von kleinen Stromschwankungen eine Unregelmäßigkeit im Funken zeigte, was man am besten an größeren Schwankungen des eingeschalteten Hochspannungselektrometers erkennen konnte, wurden unberücksichtigt gelassen.

Unvermeidliche Fehler entstehen außerdem durch unrichtiges Einstellen der Funkenstrecke auf 1 *mm* und durch die Erosion der Kugeln.

Trotzdem stimmen die Resultate ziemlich gut überein. Es wurde nämlich aus einer Reihe von sechs aufeinanderfolgenden Messungen der Mittelwert g_1 genommen, dann die Kugeln abgeschraubt, gereinigt und nochmals das Mittel g_2 aus einer zweiten Serie von sechs Messungen gebildet. t bedeutet die Schmelztemperatur des betreffenden Metalls, V die beobachtete Spannung im Sekundärkreis.

	g_1	g_2	V	t
Platin	25 *mg*	—	c. 550 Volt	1780°
Elementenkohle	30 »	31 *mg*	950 »	—
Silber	34 »	30 »	c. 3000 »	1000
Messing	40 »	37 »	1500 »	912
Aluminium	44 »	41 »	1100 »	c. 700
Gaskohle	43 »	41 »	1100 »	—
Reines Zink ...	41 »	48 »	c. 1200 »	415
Käufl. Zink ...	46 »	48 »	c. 1000 »	412
Kadmium	56 »	51 »	c. 1300 »	320
Blei	65 »	63 »	800 »	325
Zinn	69 »	62 »	1200 »	230
Eisen	c. 48 »	44 »	—	c. 1300
Antimon	c. 71 »	62 »	800 »	630
Messing, amalgamiert	59			
Silber, amalgamiert	44			

Die Tabelle zeigt eine Abhängigkeit des Schalldruckes und also auch der Schallenergie des elektrischen Funkens vom Material, und zwar ist letztere um so größer, je niedriger die Schmelztemperatur desselben ist. Vielleicht findet dies seine Erklärung darin, daß mit steigender Schmelztemperatur auch die zum Verdampfen des Metalls verbrauchte Stromenergie wächst, die hervorgebrachte Schallenergie also abnimmt. Eisen und Antimon allein machen eine Ausnahme. Letztere Messung ist jedoch wenig zuverlässig, da wegen der Sprödigkeit dieses Metalls die Kugeln nicht präzise hergestellt werden konnten. Der ungewöhnlich hohe Wert für Eisen

dürfte auf die sich sofort bildenden Oxydschichten zurückzuführen sein.

Um die Abhängigkeit des Druckes von der im Sekundärkreis eingeschalteten Kapazität zu untersuchen, wurde dieselbe bis zu 705 *m* gesteigert. Nach einem kurzen Anstieg erfolgte ein deutliches Sinken des gemessenen Druckes, wie folgende Tabelle zeigt, in welcher *g* der direkt an der Wage abgelesene Druck in Milligramm, *C* die Kapazität in Metern bedeutet. Auch hier wurde der Primärstrom konstant auf 4 Ampère gehalten.

g	30	45	50	47	42	42	40	45	41	43	40	37	35	34	32
C	47	94	141	188	235	282	329	376	423	470	517	564	611	658	705

Die Elektrodenkugeln waren aus Aluminium. Die Funkenstrecke blieb in dieser Reihe ungeändert auf c. 1·2 *mm*, so daß hier der Fehler wegen falscher Einstellung derselben fortfällt. Doch machte sich hier die Erosion des Metalls unangenehm bemerkbar.

Eine Vergrößerung der Funkenstrecke führte, wie zu erwarten, eine bedeutende Steigerung des Druckes herbei. Es ergaben sich folgende Werte:

Funkenstrecke	0·5 *mm*	1 *mm*	2·1 *mm*
Druck	9 *mg*	37 *mg*	c. 90 *mg*

Ferner wurde der Schalldruck des Funkens in Kohlensäure gemessen, wobei als Elektroden Messingkugeln verwendet wurden. Es zeigte sich der Schalldruck in Kohlensäure um c. 40% größer als der in Luft.

Schlüsse aus den erhaltenen Werten auf den im Funken selbst herrschenden Druck zu ziehen, geht bei der hier verwendeten Methode schon deshalb nicht an, weil die zur Verfügung stehende Wechselzahl gering war und hier im offenen Raume eine jede Welle nur einmal auf die Kugel trifft. Das Zeitintegral des Druckes ist also kein Maß für den in jeder einzelnen Schallwelle herrschenden Druck, und zwar offenbar um vieles kleiner. Immerhin zeigt sich in einigen Punkten — Abhängigkeit von der Natur des Gases, Funkenlänge und

Kapazität — eine bemerkenswerte Übereinstimmung mit den von Haschek und Mache[1] durch manometrische Messung innerhalb einer geschlossenen Kugel erhaltenen Resultaten.

Als wesentlich neues Ergebnis erscheint somit hauptsächlich der Zusammenhang zwischen der akustischen Energie des Funkens und der Schmelztemperatur des Elektrodenmaterials.

---

[1] Wied. Ann., 68, p. 740 (1899).

Studien über die Anomalien im Verhalten der Dielektrika

von

Prof. **Egon** Ritter v. **Schweidler.**

Mit dem Baumgartner-Preise ausgezeichnete Arbeit.

(Mit 7 Tafeln und 6 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Juni 1907.)

Einleitung.

Vom Standpunkt der allgemeinen Theorie der elektrischen Erscheinungen ist ein homogenes und isotropes Dielektrikum durch zwei Materialkonstanten ausreichend zu charakterisieren: durch seine Dielektrizitätskonstante und durch sein spezifisches Leitvermögen.

Viele Dielektrika zeigen nun Anomalien ihres Verhaltens, die sich nicht ohneweiters in den Rahmen der allgemeinen Theorie fassen lassen, ähnlich wie dies auf dem Gebiet des Magnetismus bei den ferromagnetischen Substanzen der Fall ist. Da sich ohne spezielle Hypothesen nachweisen läßt, daß die verschiedenen Arten der Anomalien in gegenseitigem Zusammenhange stehen, sind sie hier auch im Zusammenhange behandelt.

Die hier gegebene Darstellung zerfällt in drei Hauptteile.

Im I. Teile werden die Hauptformen des anomalen Verhaltens der Dielektrika auf Grund der bisher vorliegenden experimentellen Ergebnisse ohne Anwendung einer speziellen Hypothese oder Theorie zusammengestellt; als solche Hauptformen werden unterschieden:

1. die Rückstandsbildung, das ist das Auftreten nach bestimmten Gesetzen zeitlich variabler Ströme in Dielektrikas

unter der Einwirkung eines konstanten oder sehr langsam veränderlichen elektrischen Feldes;

2. die Energieverluste (Umwandlung elektrischer Energie in Wärme) in Dielektrikas unter dem Einfluß eines Wechsel- oder Drehfeldes;

3. die ponderomotorischen Kräfte, die ein Dielektrikum im elektrischen Drehfeld erfährt;

4. die scheinbare Abhängigkeit der Kapazität eines Kondensators und somit auch der Dielektrizitätskonstante seines Dielektrikums von der Ladungsdauer bei konstanter Spannung, beziehungsweise Periodendauer bei Wechselspannung.

Der Ausdruck »Hysteresis«, der für die unter 2. und 3. genannten Erscheinungen häufig gebraucht wird, ist hier vorläufig vermieden, da er bereits eine nicht allgemein angenommene Voraussetzung über die Natur dieser Phänomene zur Grundlage hat.

Der II. Teil behandelt die Theorie der anomalen Erscheinungen. Es wird zunächst der oben erwähnte gegenseitige Zusammenhang der vier Hauptformen abgeleitet; hierauf wird die Unvereinbarkeit der Anomalien mit den einfachen Annahmen der allgemeinen Theorie nachgewiesen; es folgt eine Diskussion der verschiedenen Möglichkeiten, diese Anomalien theoretisch zu behandeln durch Zurückführung auf Anomalien der Struktur des Mediums (Inhomogenität, Maxwell'sche Theorie der geschichteten Dielektrika) oder der Leitungsvorgänge (Ionenleitung) oder endlich des dielektrischen Verhaltens (Nachwirkung, Hysteresis, Viskosität).

Der Versuch einer Modifikation der einzigen bisher vorliegenden präzisen Formulierung einer solchen Theorie (der Pellat'schen Theorie) bildet zusammen mit dem Nachweis, daß aus den Gesetzen der Rückstandsbildung die übrigen Formen des anomalen Verhaltens der Dielektrika quantitativ darstellbar sind, den wesentlichsten Bestandteil dieser Studien.

Der III. Teil enthält die Resultate experimenteller Untersuchungen des Verfassers. Da nach seiner Ansicht die bisher vorliegenden, im I. Teile besprochenen Ergebnisse ausreichen, um die im II. Teile dargelegten theoretischen Folgerungen zu

stützen, bieten sie nichts prinzipiell Neues, sondern dienen bloß zur Erläuterung, Bestätigung und Ergänzung jener Ergebnisse und zur Aufstellung eines Schemas für die Charakterisierung eines Dielektrikums durch Angabe seiner Materialkonstanten.

Eine Zusammenfassung der Ergebnisse schließt die vorliegenden Studien ab.

Der Anhang enthält ein Verzeichnis der einschlägigen Literatur, auf das die Zitate innerhalb des Textes bezogen sind.

I. Teil.

Die Hauptformen des anomalen Verhaltens der Dielektrika.

1. Die Rückstandsbildung.

Werden die Belegungen eines Kondensators mit den Polen einer Stromquelle konstanter elektromotorischer Kraft verbunden, so tritt in den Zuleitungen ein Strom auf, dessen Intensität mit der Zeit abnimmt. Bei einem idealen nichtleitenden Dielektrikum gilt nach der allgemeinen Theorie für den »normalen Ladungsstrom« die Differentialgleichung:

$$S\frac{d^2 i}{dt^2} - W\frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0,$$

wobei C die Kapazität des Kondensators, S den Selbstinduktionskoeffizienten und W den Widerstand des äußeren Leitungskreises darstellt. Je nach dem Verhältnis der numerischen Werte dieser drei Konstanten erfolgt die Ladung des Kondensators gedämpft oszillatorisch oder aperiodisch gedämpft. Bei nicht sehr großem Widerstande des äußeren Leitungskreises sinkt die Stromstärke in jedem der beiden Fälle sehr rasch ab, so daß in den praktisch realisierbaren Fällen der normale Ladungsstrom nach Zeiten von der Größenordnung eines kleinen Bruchteiles einer Sekunde gleich Null gesetzt werden kann.

Falls das Dielektrikum nicht vollkommen isolierend ist, so ist dem normalen Ladungsstrom ein »normaler Leitungsstrom« a übergelagert, der gegeben ist durch die Formel

$$a = \frac{4\pi\lambda}{K} CE,$$

wobei λ das spezifische Leitvermögen, K die Dielektrizitätskonstante des Mediums, C die Kapazität des Kondensators und E die elektromotorische Kraft der Stromquelle bezeichnet (alle Größen sind in absoluten elektrostatischen Einheiten gemessen gedacht).

Tatsächlich nun beobachtet man bei vielen Dielektrikas, daß dem normalen Ladungsstrom i_1 und dem normalen Leitungsstrom a noch ein »anomaler Ladungstrom« y_1 übergelagert ist, so daß der gesamte Strom darstellbar ist durch:

$$J_1 = i_1 + y_1 + a.$$

Dabei ist y_1 eine Funktion der Zeit, die asymptotisch auf Null absinkt, aber viel langsamer als der normale Ladungsstrom i_1.

Werden die Belegungen des Kondensators, nachdem sie durch ein Zeitintervall δ auf konstanter Potentialdifferenz gehalten wurden, miteinander leitend verbunden, so sind bezüglich der Gesetze des Entladungsstromes zwei Typen zu unterscheiden:

a) Der Entladungsstrom J_2 entspricht dem normalen Entladungsstrom i_2, der durch eine ganz analoge Differentialgleichung wie der normale Ladungsstrom i_1 bestimmt ist;

b) analog wie bei der Ladung ist ein »anomaler Entladungsstrom« y_2 übergelagert und es ist y_2 wieder eine mit wachsender Zeit auf Null absinkende Funktion dieser. Dabei gilt noch die Bezeichnung zwischen y_1 und y_2:

$$\int_0^\delta y_1\,dt = -\int_0^\infty y_2\,dt,$$

d. h. die gesamte Elektrizitätsmenge, die infolge des anomalen Entladungsstromes einen Querschnitt der Leitung passiert, ist

entgegengesetzt gleich derjenigen, die während der Ladungsdauer δ durch den anomalen Ladungsstrom transportiert wurde. Während im Falle *a*), der besonders bei verschiedenen schlecht leitenden Flüssigkeiten realisiert ist (Koller, IV, 3; Schweidler, IV, 7, 8, 10; Gädeke, IV, 9), der Ladungsprozeß so verläuft, als ob das Leitvermögen des Mediums durch den Stromdurchgang zeitliche Änderungen erfahren würde, ist im Falle *b*) der Ladungsprozeß ein reversibler; das Medium verhält sich, als ob die dem Zeitintegral des anomalen Ladungsstromes $\int_0^\delta y_1\,dt$ entsprechende Elektrizitätsmenge absorbiert wäre, um bei der Entladung allmählich wieder frei zu werden.

Diesen reversiblen Prozeß bezeichnet man gewöhnlich als Bildung, beziehungsweise Freiwerden des »Rückstandes« und das Integral $\int_0^\delta y_1\,dt$ als die in der Zeit δ gebildete »Rückstandsladung«.

Prinzipiell weniger einfach sind die Verhältnisse, wenn die Belegungen des Kondensators nicht auf konstanten Potentialen gehalten werden, sondern eine von ihnen isoliert ist; doch ist gerade diese Form der Rückstandserscheinungen die historisch primäre und bei dieser wurde man auf die oben erwähnte Bezeichnungsweise geführt. Wird ein Kondensator geladen und dann die eine der beiden Belegungen isoliert, so nimmt die Potentialdifferenz V der Belegungen und damit die durch das Produkt CV gegebene sogenannte »disponible Ladung« ab. Diese Abnahme erfolgt rascher, als es dem stationären Leitungsstrom a entsprechen würde. Wird umgekehrt der geladene Kondensator durch vorübergehende leitende Verbindung der Belegungen entladen und hierauf die eine Belegung isoliert, so tritt allmählich eine neuerliche Ladung vom gleichen Vorzeichen wie die ursprüngliche auf, wächst bis zu einem Maximum an, um dann wieder (infolge der Leitung des Dielektrikums) asymptotisch auf Null zu sinken.

Bezüglich der Gesetze, die für den zeitlichen Verlauf der Rückstandserscheinungen sowie für ihre Abhängigkeit von anderen Nebenbedingungen gelten, haben die experimentellen Untersuchungen zu folgenden Resultaten geführt:

Der anomale Ladungsstrom oder rückstandsbildende Strom y_1 ist an einem gegebenen Kondensator bei gegebener elektromotorischer Kraft als Funktion der Zeit darstellbar durch:

$$y_1 = B.t^{-n}.$$

Dabei ist $n < 1$.

Diese Formel kann nur als Annäherung betrachtet werden. Zunächst erhält man für $t = 0$, $y_1 = \infty$, wobei allerdings $\int_0^\delta y_1 dt = \frac{B.t^{1-n}}{1-n}$ für endliches δ endlich bleibt. Ferner wird für $t = \infty$, $\int_0^\infty y_1 dt = \infty$, was ebenfalls aus später zu besprechenden Gründen unwahrscheinlich ist. Der Verlauf des Stromes innerhalb des ersten unendlich kleinen Zeitelementes sowie nach unendlich langer Zeit läßt sich natürlich nicht empirisch bestimmen. Innerhalb der der Beobachtung zugänglichen Zeitintervalle hat sich aber obige Formel gut bestätigt gezeigt (Kohlrausch, I, 1; Hopkinson, I, 9, 10, 11; Giese, I, 15; J. Curie, I, 21 u. a.). Versuche, welche über weit längere Zeiträume als in den zitierten Arbeiten die Gültigkeit dieser Formel prüfen, sind im III. Teile angeführt.

Wird derselbe Kondensator unter der Einwirkung verschiedener elektromotorischer Kräfte untersucht, so ergibt sich, daß der Rückstandsstrom y_1 der elektromotorischen Kraft E proportional ist bei unveränderter Form des zeitlichen Verlaufes. Also

$$y_1 = B.t^{-n} = b.E.t^{-n}$$

(Kohlrausch, I, 1; J. Curie, I, 21).

Wird ein bestimmtes Dielektrikum in verschiedenen Schichtdicken untersucht, so ist nach Hopkinson (I, 9, 10, 11) der Rückstandsstrom y_1 der Dicke umgekehrt proportional, wieder bei unveränderter Form des zeitlichen Verlaufes. Da Proportionalität des Stromes mit dem Querschnitt (Flächengröße der Belegung) selbstverständlich ist, kann man auch den Strom proportional der Kapazität des Kondensators setzen und man erhält die Formel:

$$y_1 = b.E.t^{-n} = \beta.C.E.t^{-n},$$

wo jetzt β und n Konstanten des Mediums als solchen sind.

Bezüglich des Entladungsstromes y_2 gelten folgende Gesetze: Nach sehr langer Ladungsdauer des Kondensators ist der Entladungsstrom dem Ladungsstrom entgegengesetzt gleich:

$$y_2 = -y_1,$$

bei kürzerer Ladungsdauer δ ist $y_2 < y_1$, zeigt rascheren zeitlichen Abfall, und zwar darstellbar durch die Formeln:

$$y_1 = f(t) = B.t^{-n}$$
$$y_2 = -f(t) + f(t+\delta),$$

wobei t die vom Beginn der Ladung (bei y_1), respektive Entladung (bei y_2) gerechnete Zeit, δ die Ladungsdauer bezeichnet.

Dieses Ergebnis kann so interpretiert werden: Der beobachtete Entladungsstrom y_2 entsteht aus der Superposition des dem Ladungsstrom $y_1 = f(t)$ entgegengesetzt gleichen Stromes $-f(t)$ und eines Stromes $f(t+\delta)$, der einfach als ungestörte Fortsetzung des Ladungsstromes auch nach der Entladung aufgefaßt werden kann.

Dieses sogenannte Superpositionsprinzip wurde experimentell gefunden von Hopkinson (I, 9, 10, 11) und J. Curie (I, 21).

Die oben erwähnte Formel:

$$\int_0^\infty y_2\, dt = -\int_0^\delta y_1\, dt$$

ist eine Konsequenz desselben.

Das Superpositionsprinzip kann noch erweitert werden: Bei mehrmaligen sprungweisen Änderungen der Spannungsdifferenz der Belegungen superponieren sich die jeder Änderung entsprechenden Ströme, als ob sie unabhängig voneinander wären. Wenn also zu den Zeiten

$$t = \delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots \delta_k$$

Sprünge in der Potentialdifferenz um die (positiven oder negativen) Beträge:

$$E_1, E_2, E_3 \ldots E_k$$

eintreten, so ist der resultierende Strom:

$$y = E_1 f(t-\delta_1) + E_2 f(t-\delta_2) + \ldots E_k f(t-\delta_k).$$

Eine Verallgemeinerung dieses empirisch gefundenen und bestätigten Superpositionsprinzipes führt zur Darstellung des Stromes bei beliebig variierender Spannungsdifferenz

$$E = \varphi(t)$$

durch die Formel

$$y_t = \int_{-\infty}^{t} \frac{d\varphi(\vartheta)}{d\vartheta} \cdot f(t-\vartheta)\, d\vartheta.$$

Darin ist $f(t)$ die Funktion, die den Verlauf nach einer einzigen sprungweisen Änderung im absoluten Betrage 1 darstellt, also nach dem oben Mitgeteilten:

annähernd $f(t) = \beta . C . t^{-n}$.

Wie alle Materialkonstanten sind auch die den Verlauf der Rückstandsbildung bestimmenden Konstanten β und n als Funktionen der Temperatur zu betrachten. Die Angaben verschiedener Beobachter (Bedell und Kinsley, I, 26; Hopkinson und Wilson, I, 34; Naccari, IV, 6 und I, 37, Schweidler, I, 46) über den Einfluß der Temperatur zeigen Widersprüche, die aber vielleicht nur scheinbare sind. Gewöhnlich wird angegeben, daß der Rückstand mit steigender Temperatur abnehme; andere Beobachter geben an, daß mit steigender Temperatur die Konstante β zunehme, während der Exponent n nicht wesentlich von der Temperatur beeinflußt werde. Aus dieser letzteren Angabe würde folgen, daß die in gegebener Zeit δ gebildete Rückstandsladung $R = \beta . C . E \cdot \frac{t^{1-n}}{1-n}$ mit der Temperatur wachse.

Wird aber nach längerer Ladungsdauer der Kondensator momentan entladen, hierauf die eine Belegung isoliert und nun mittels einer elektrometrischen Methode die bis zu einem Maximum ansteigende, dann wieder abnehmende Rückstandsladung messend verfolgt, so kann bei höherer Temperatur das beobachtete Maximum erniedrigt sein, wenn nämlich das Leitvermögen des Dielektrikums mit der Temperatur rascher

ansteigt als die Größe β. Einige Versuche über diese Frage sind im III. Teile besprochen.

Erwähnenswert sind noch zwei Beobachtungen über die Beeinflussung der Rückstandsbildung durch mechanische und elektrische Zustandsänderungen.

Nach Hopkinson (I, 10) werden die anomalen Ladungs- und Entladungsströme bei einer Leydnerflasche verstärkt durch gleichzeitige mechanische Erschütterungen.

Nach v. Hoor (VI, 2) kann die Rückstandsbildung eines Kondensators verringert werden durch oft wiederholtes »Formieren«, d. i. abwechselndes Laden und Entladen.

2. Energieumwandlung im Wechsel- oder Drehfelde.

Kondensatoren mit flüssigem oder festem Dielektrikum zeigen häufig eine Erwärmung, wenn ihre Belegungen durch Verbindung mit einer Wechselstromquelle alternierend geladen werden (Siemens, II, 1; Naccari und Bellati, II, 2; Borgmann, II, 3; Steinmetz, II, 6; Janet, II, 8; Kleiner, II, 11; Fritz, II, 14; Düggelin, II, 21; Benischke, II, 24; Eisler, II, 25; Rosa und Smith, II, 35; Mercanton, II, 41; Moscicki und Altenberg, II, 49). Dasselbe findet statt, wenn ein Dielektrikum sich in einem elektrischen Drehfelde befindet (Guye und Denso, II, 50).

Bezüglich der verschiedenen Stärke dieser Wärmeproduktion in verschiedenen Substanzen sind besonders die Untersuchungen von Kleiner (II, 11), Fritz (II, 14) und Düggelin (II, 21) zu nennen. Kautschuk, Ebonit, Glas, Siegellack und Guttapercha zeigen diese Erscheinung in besonderer Intensität, Glimmer, Paraffin und viele isolierende Flüssigkeiten in schwachem bis unmerklichem Grade.

Eine Reihe von Untersuchungen betrifft die Abhängigkeit von der Effektivspannung des Wechselfeldes; die meisten Beobachter finden Proportionalität zwischen der pro Zeiteinheit entwickelten Wärmemenge W und dem Quadrat der Effektivspannung $E: W = aE^2$ (Borgmann, II, 3; Steinmetz, II, 6; Hess, II, 23; Benischke, II, 24; Eisler, II, 25; Houllevigue, II, 29); doch finden andere Beobachter (Mercanton, II, 41;

Moscicki und Altenberg, II, 49) auch Abweichungen von diesem Gesetze.

Weitere Resultate betreffen die Abhängigkeit von der Periodenzahl n des angewandten Wechselstromes. Im allgemeinen steigt die Wärmemenge W mit der Periodenzahl an (Hess, II, 23; Eisler, II, 25, Beaulard, II, 36 und 37; Moscicki und Altenberg, II, 49; Guye und Denso, II, 50). Wird die entwickelte Wärmemenge auf die Dauer der Periode des Wechselstromes τ bezogen statt auf die Zeiteinheit, so ergibt sich, daß die Funktion $\tau W = f(n)$ bei einem gewissen Werte von n ein Maximum besitzt (Mercanton, II, 41; Rosa und Smith, II, 35).

Analog wie beim Rückstand kann bisweilen die Wärmeproduktion im Dielektrikum durch wiederholte Beanspruchung (»Formieren«) herabgedrückt werden (Kleiner, II, 20; v. Hoor, VI, 2).

3. Ponderomotorische Kräfte im elektrischen Drehfelde.

Diese Erscheinungen treten auf bei relativer Rotation des Dielektrikums zu einem elektrischen Felde, also entweder wenn ein ruhendes Dielektrikum sich in einem elektrischen Drehfelde befindet oder wenn ein Dielektrikum in einem ruhenden Felde rotiert. Es zeigt sich, daß in diesen Fällen Drehungsmomente auf das Dielektrikum ausgeübt werden, auch wenn es die Form eines Rotationskörpers mit zur Feldrichtung senkrechter Achse hat, also aus Symmetriegründen bei relativer Ruhe keine Drehungsmomente entstehen können (Arno, II, 7, 15 bis 19, 27; Quinke, III, 2; Borel, II, 12; Threlfall, II, 30, 31; Schaufelberger, II, 32, 34; Heydweiller, III, 6; Graetz, III, 7; v. Lang, II, 52).

Ist das Dielektrikum von Luft umgeben, so entsteht ein Drehungsmoment, das es im Sinne der Rotation des Feldes zu drehen sucht: also Mitnehmen des ursprünglich ruhenden Dielektrikums im rotierenden Felde oder Hemmung des rotierenden Dielektrikums im ruhenden Felde.

Ist aber der Körper in eine sehr schlecht leitende Flüssigkeit eingetaucht, so kann sich das Vorzeichen des Drehungsmomentes umkehren: im ruhenden Felde wird eine vorhandene

Rotation des Körpers beschleunigt (Quincke, III, 2), im Drehfelde eine der Feldrotation entgegengesetzte Rotation des Körpers hervorgerufen (v. Lang, II, 52).

Eine quantitative Bestimmung des Drehmomentes kann erfolgen im Drehfelde aus der Torsion einer elastischen Suspension, die dem elektrischen Drehmomente das Gleichgewicht hält, im ruhenden Felde aus der Dämpfung von Schwingungen (Arno, Threlfall, Schaufelberger). Für die Abhängigkeit des Drehmomentes D von der elektrischen Feldintensität F findet Schaufelberger die Beziehung:

$$D = k.F^2,$$

Arno und Threlfall dagegen:

$$D = K.F^n,$$

wobei n in verschiedenen Fällen verschieden (1·5 bis 1·96), aber immer kleiner als 2 war.

Bei konstanter Feldintensität nimmt das Drehungsmoment mit wachsender Rotationsgeschwindigkeit zu (Arno, II, 27).

4. Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante von Ladungsdauer, beziehungsweise Periodenzahl.

Sowohl wenn die Kapazität eines Kondensators bei kurzdauernder Verbindung mit einer Stromquelle konstanter Spannung bestimmt wird als auch bei Verwendung einer Wechselstrommethode ergaben viele Versuche eine Abhängigkeit des unmittelbar gefundenen Wertes für die Kapazität und somit auch des Wertes der Dielektrizitätskonstante von der Ladungsdauer, respektive von der Periodenzahl (Frequenz) des Wechselstromes (vergl. Literaturverzeichnis, Abteilung V).

Mit einer einzigen Ausnahme (Lecher, V, 6) fanden alle Beobachter, daß die Dielektrizitätskonstante um so kleiner wird, je kürzer die Ladungsdauer, respektive je größer die Periodenzahl ist. Bisweilen sind die Unterschiede sehr bedeutend; z. B. findet J. J. Thomson (V, 5)

für Glas, bei Frequenz n = zirka 100 $^1/_{sec}$: $K = 9$ bis 11,
» » n = 25.10⁶ : $K = 2{\cdot}7$;

analog Northrup (V, 17)

für Glas, bei $n = 100$: $K = 6 \cdot 25$,
» $n = 10^6$ bis 10^7 : $K = 5 \cdot 86$;

und Beaulard (V, 15)

für Glas, bei Ladungsdauer $\Delta = 0 \cdot 008$ sec : $K = 6 \cdot 22$,
» » $\Delta = 0 \cdot 0004$ » : $K = 3 \cdot 66$.

II. Teil.

Die Theorie des anomalen Verhaltens der Dielektrika.

1. Zusammenhang der Hauptformen anomalen Verhaltens.

Die im I. Teile dargestellten Hauptformen des anomalen Verhaltens sind nicht unabhängig voneinander, sondern es läßt sich nachweisen, daß aus dem Bestehen der ersten Hauptform, der Rückstandsbildung, das Auftreten von den anderen Hauptformen analogen Erscheinungen notwendig folgt.

Es ist bereits im Abschnitt I, 1 erwähnt worden, daß das zunächst experimentell gefundene Superpositionsprinzip verallgemeinert bei beliebiger zeitlicher Variation der angelegten Spannung: $E = \Phi(t)$ zu folgender Formel für den Rückstandsstrom führt:

$$i_t = \int_{-\infty}^{t} d\vartheta \, \Phi'(\vartheta) f(t - \vartheta),$$

wobei $f(t)$ eine Funktion ist, die den zeitlichen Gang des Rückstandsstromes darstellt, falls zur Zeit $t = 0$ an den vorher unendlich lange Zeit der Einwirkung elektrischer Kräfte entzogenen Kondensator plötzlich eine Spannungsdifferenz von der Größe 1 angelegt wird. Nach den bereits gegebenen Resultaten kann $f(t)$ annähernd dargestellt werden durch

$$f(t) = \beta . C . t^{-n} \qquad (n < 1).$$

Es soll zunächst der Spezialfall untersucht werden, daß die Spannungdifferenz der Kondensatorbelegungen eine einfache periodische Funktion der Zeit sei, also

$$E = E_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

Aus obiger Formel folgt dann:

$$i_t = \frac{2\pi}{\tau} E_0 \int_{-\infty}^{t} d\vartheta \cos \frac{2\pi\vartheta}{\tau} f(t-\vartheta);$$

setzt man $(t-\vartheta) = u$, so ergibt sich daraus:

$$i_t = \frac{2\pi}{\tau} E_0 \left\{ A \cos \frac{2\pi t}{\tau} + B \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right\},$$

wobei

$$A = \int_{0}^{\infty} f(u) \cos \frac{2\pi u}{\tau} du$$

$$B = \int_{0}^{\infty} f(u) \sin \frac{2\pi u}{\tau} du.$$

Dieser Strom i_t ist dem normalen Strome übergelagert, der sich wieder aus dem normalen Ladungsstrom und dem normalen Leitungsstrom zusammensetzt und unter Vernachlässigung von Selbstinduktion und Widerstand im äußeren, die Belegungen verbindenden Kreise dargestellt wird durch:

$$\frac{2\pi}{\tau} C E_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + \frac{4\pi\lambda}{K} C E \sin \frac{2\pi t}{\tau}.$$

Der anomale, auf Rückstandsbildung beruhende Strom i_t besteht somit aus zwei Gliedern, die einfach zum normalen Ladungs-, respektive Leitungsstrom hinzugerechnet werden können und sich durch eine scheinbare Änderung der Normalwerte von Kapazität und Widerstand des Kondensators interpretieren lassen.

Man erhält für die »scheinbare Kapazität« den Wert:

$$C' = C + A$$

für den reziproken »scheinbaren Widerstand«:

$$L' = L + \frac{2\pi}{\tau} B.$$

Führt man für die bisher unbestimmt gelassene Funktion $f(u)$ den experimentell gefundenen Näherungswert

$$f(u) = \beta \,.\, C \,.\, u^{-n}$$

ein, so wird mittels der Substitution $\omega = \frac{2\pi u}{\tau}$

$$A = \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{1-n} . \beta C \int_0^\infty \omega^{-n} \cos \omega d\omega$$

$$= \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{1-n} . \beta C . \Gamma(1-n) \cos \frac{(1-n)\pi}{2}$$

und:

$$B = \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{1-n} . \beta C \int_0^\infty \omega^{-n} \sin \omega d\omega$$

$$= \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{1-n} . \beta . C \frac{\pi}{2\Gamma(n) \cos \frac{(1-n)\pi}{2}} .$$

Da $n < 1$, also $1-n$ positiv ist, ergibt sich, daß die scheinbare Kapazität C' für unendlich rasche Schwingungen den Normalwert C besitzt, bei endlicher Periodendauer τ vergrößert ist und mit wachsender Periodendauer zunimmt, was mit den im Abschnitt I, 4 mitgeteilten Versuchsergebnissen übereinstimmt.

Analog erhält man für die scheinbare Leitfähigkeit den Ausdruck:

$$L' = L + \frac{2\pi}{\tau} B = L + \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{-n} \beta C \cdot \frac{\pi}{2\Gamma(n) \cos \frac{(1-n)\pi}{2}} ,$$

d. h. die scheinbare Leitfähigkeit steigt mit abnehmender Periodendauer an. Dementsprechend ist also auch im Dielektrikum eine Wärmeentwicklung zu erwarten, die größer ist als die aus dem stationären (wahren) Leitvermögen berechnete und die mit zunehmender Frequenz des Wechselstromes wächst, unter sonst gleichen Bedingungen aber wie die wahre Joule'sche Wärme dem Quadrat der Effektivspannung proportional ist. Auch hier besteht also Übereinstimmung mit den im Abschnitt I, 2 besprochenen experimentellen Resultaten.

Daß bei vorübergehender Verbindung eines Kondensators mit einer Stromquelle konstanter elektromotorischer Kraft (z. B. bei Kapazitätsmessungen mittels des ballistischen Galvanometers) der Rückstandsstrom ebenso wie der normale Leitungs-

strom den unmittelbar gefundenen Wert der Kapazität erhöht, und zwar um so mehr, je länger die Ladungszeit war, ist unmittelbar ersichtlich.

Es sind also Wärmeproduktion im Dielektrikum im Wechselfelde und Abhängigkeit der scheinbaren Dielektrizitätskonstante von Frequenz des Wechselstromes, respektive von der Ladungszeit bei Gleichstrom notwendige Folgeerscheinungen, wenn Rückstandsbildung vorliegt. Es sind aber nicht auch umgekehrt die ersteren Erscheinungen notwendig auf Rückstandsbildung zurückzuführen, sondern können ohne Rückstandsbildung des Mediums durch andere Ursache (z. B. Leitung) bedingt sein.

Die ponderomotorischen Kräfte, die ein Dielektrikum im relativen Drehfelde erfährt, sind vorläufig nicht berücksichtigt worden. Der gegenseitige Zusammenhang aber von ponderomotorischen Kräften und Wärmeproduktion kann unabhängig von jeder speziellen Hypothese aus allgemeinen energetischen Prinzipien abgeleitet werden.

Erfährt ein ursprünglich ruhendes Dielektrikum im rotierenden Felde ein Drehungsmoment im Sinne der Rotation des Feldes und wird es durch äußere Kräfte in seiner Ruhelage erhalten, so ist die Arbeit, die das elektrische Drehungsmoment an dem relativ zu ihm rotierenden Dielektrikum leistet, äquivalent der im Dielektrikum entstehenden Wärme. Analog ist bei durch äußere Kräfte konstant erhaltener Rotation des Dielektrikums im ruhenden Felde die Arbeit dieser äußeren Kräfte das Äquivalent der entwickelten Wärme. Bezeichnet also W die pro Zeiteinheit im Dielektrikum entwickelte Wärme, D das Drehungsmoment der elektrischen Kräfte, ω die Winkelgeschwindigkeit der relativen Rotation von Feld und Dielektrikum, so können die Größen W und D wechselseitig aus einander bestimmt werden nach der Formel:

$$W = D \cdot \omega.$$

Falls D negativ ist (der Feldrotation entgegengerichtetes Drehungsmoment im Drehfelde, respektive beschleunigendes Drehungsmoment bei im ruhenden Felde rotierendem Dielektrikum), wird Arbeit gewonnen; das Äquivalent muß dann im

verminderten Energieverbrauch in der den stationären Zustand aufrecht erhaltenden Stromquelle liegen.

2. Die Unvereinbarkeit der Anomalien mit der Annahme normalen Verhaltens der Dielektrika.

Es soll nun eingehender untersucht werden, inwieweit die im I. Teil geschilderten Anomalien wirklich unvereinbar mit den Annahmen der allgemeinen Theorie sind, die ein homogenes isotropes Dielektrikum durch die Angabe von zwei Materialkonstanten: Dielektrizitätskonstante K und spezifisches Leitvermögen λ als ausreichend charakterisiert annimmt.

Die Erscheinungen des anomalen Ladungsstromes und der Rückstandsbildung fallen sofort als unvereinbar mit diesen Annahmen heraus.

Bezüglich der Erscheinungen der Energieverluste, der Drehungsmomente im Drehfelde und der Variabilität der scheinbaren Kapazität mit Ladungsdauer oder Periodenzahl ist dies nicht auf den ersten Blick ersichtlich; es wurde oben nachgewiesen, daß in einem Medium, das Rückstandsbildung zeigt, auch diese Erscheinungen auftreten müssen, daß sie aber auch ohne Rückstandsbildung denkbar wären.

a) Die Wärmeproduktion kann einfach als Joule'sche Wärme des schwach leitenden Dielektrikums aufgefaßt werden. Viele Beobachter haben sich begnügt, die Abhängigkeit der pro Zeiteinheit entwickelten Wärmemenge W von der Effektivspannung E des Wechselfeldes zu untersuchen und aus dem Resultate, daß W proportional E^2 sei, auf Leitung als Ursache zurückgeschlossen. Diese Schlußweise ist nicht bindend; als Joule'sche Wärme müßte die Größe W unabhängig von der Frequenz des Wechselstromes sein, was tatsächlich nicht der Fall ist, und auch im konstanten elektrischen Felde denselben Betrag zeigen. Mehrfache Untersuchungen haben aber das Resultat ergeben, daß die aus dem Leitvermögen im stationären Zustande berechnete Joule'sche Wärme viel kleiner ist als die im Wechselfelde direkt beobachtete. So findet Moscicki und Altenberg (II, 49), daß bei Glas nur etwa 2 % der im Wechselfelde erzeugten Wärme dem stationären Leitvermögen entsprechen und Corbino (II, 51), daß die an einem Paraffin-

papierkondensator ermittelten Energieverluste einem Widerstande des Dielektrikums von 1400 Ω entsprechen würden, während natürlich der wahre Wert des Widerstandes enorm viel größer ist.

Unter Berücksichtigung der quantitativen Verhältnisse sind daher die beobachteten Energieverluste in Dielektrikas mit der Annahme einer normalen Leitung nicht vereinbar.

b) Daß ein leitender Körper in einem relativen Drehfelde Drehmomente erfährt, ist bereits von Hertz (III, 1) theoretisch nachgewiesen worden. Verallgemeinerungen dieses Beweises rühren von Heydweiller (III, 3) und Schweidler (III, 5) her. Das Resultat ist folgendes: Rotiert eine Vollkugel vom Radius R und dem spezifischen Leitvermögen (im stat. Maße) λ_i, die von einem Medium mit dem Leitvermögen λ_a umgeben ist, um eine zu der Richtung eines homogenen elektrischen Feldes von der Stärke F senkrechte Achse mit der konstanten relativen Winkelgeschwindigkeit $\frac{2\pi}{\tau}$ (also τ gleich Umlaufsdauer), so ist das Drehungsmoment gegeben durch die Formel:

$$D = R^3 F^2 \frac{{}^2/_3 \tau (\lambda_a - \lambda_i)}{1 + {}^4/_9 \tau^2 (2\lambda_a + \lambda_i)^2}.$$

Das Drehungsmoment ist positiv (beschleunigend im ruhenden Felde, entgegen der Feldrotation gerichtet im Drehfelde), wenn $\lambda_a > \lambda_i$, negativ (hemmend im ruhenden Felde, im Sinne der Feldrotation im Drehfelde), wenn $\lambda_i > \lambda_a$; der absoluten Größe nach hängt D auch von der Winkelgeschwindigkeit ab, und zwar derart, daß bei sonst konstanten Verhältnissen einer bestimmten Geschwindigkeit ein Maximum von D entspricht.

Qualitativ sind also die beobachteten Formen des Auftretens ponderomotorischer Kräfte im relativen Drehfeld auf Leitung zurückzuführen. Zur quantitativen Darstellung erweist sich aber wieder diese Annahme als unzureichend. Die experimentellen Ergebnisse von Arno (II, 7, 15 bis 19, 27) und Threlfall (II, 30, 31) liefern zwischen Drehungsmoment und Feldstärke eine Beziehung: D prop. F^n, wo $n < 2$, statt der theoretischen Beziehung D prop. F^2.

Bei einigen Versuchen v. Lang's (II, 52) ist sogar der Sinn der Rotation der umgekehrte, als es nach dem Betrage von $\lambda_i - \lambda_a$ zu erwarten wäre; schlecht leitende feste Körper in besser leitenden Flüssigkeiten rotieren bisweilen im Sinne des Drehfeldes statt entgegengesetzt.

c) Daß infolge der Leitung die Dielektrizitätskonstante eines Mediums scheinbar zu groß bestimmt wird, ist ein Umstand, der seit langem bei der Messung von Dielektrizitätskonstanten berücksichtigt und entweder durch die Wahl der Versuchsanordnung (sehr kurze Ladungszeiten oder sehr schnelle Schwingungen) oder rechnerisch durch separate Bestimmung der Leitung eliminiert wird. Wollte man die im Abschnitt I, 4 angeführten Beispiele auf diese Weise erklären, so würde man auf Werte des spezifischen Leitvermögens der Medien geführt werden, die von anderer Größenordnung sind als die tatsächlich beobachteten. So z. B. erhält man aus den Angaben Beaulard's (vergl. p. 1030) für Glas den spezifischen Widerstand $\sigma = 4 . 10^{10}\, \Omega\, cm$, während er tatsächlich mindestens zu 10^{14} bis 10^{15}, also rund etwa 10.000mal größer anzunehmen ist.

Obwohl also Erscheinungen von qualitativ gleicher Art wie die beobachteten durch bloße Leitung entstehen können, folgt aus den quantitativen Verhältnissen, daß diese Erklärung unzureichend ist. Dies sowie die überhaupt mit der allgemeinen Theorie unvereinbare Rückstandsbildung zwingen also, in irgend welcher Weise die Anomalien durch modifizierte Annahmen in die Theorie einzufügen.

3. Anomalien der Struktur (Inhomogenität).

Die erste Möglichkeit, die Anomalien theoretisch zu begründen, liegt darin, zwar die allgemeinen Grundannahmen der Theorie unverändert beizubehalten, aber jene Medien, die Anomalien zeigen, als nicht homogen aufzufassen.

In der Tat hat Maxwell (I, 5) gezeigt, daß ein »geschichtetes« Dielektrikum, dessen einzelne Schichten sich durchaus normal verhalten, bei dem aber der Quotient $\frac{\lambda}{K}$ nicht den gleichen Wert in jeder Schichte besitzt, als Ganzes die

Erscheinungen der Rückstandsbildung zeigen müsse. Er hat ferner darauf hingewiesen, daß bei nicht blätteriger Struktur, sondern beliebiger räumlicher Anordnung der nicht gleichartigen Bestandteile des Mediums analoge Resultate sich ergeben. Weitere Ausführungen dieser Maxwell'schen Theorie der geschichteten Dielektrika finden sich in den Arbeiten von Hess (I, 24) und Houllevigue (I, 33).

In der Maxwell'schen Darstellung werden folgende Größen als Funktionen der Materialkonstanten und der Anfangsbedingungen explizit berechnet:

1. Die »disponible Ladung«; 2. der stationäre Leitungsstrom nach unendlich langer Einwirkung einer konstanten elektromotorischen Kraft; 3. der zeitliche Verlauf der freien Rückstandsladung eines Kondensators, dessen Belegungen nach unendlich langdauernder Ladung durch eine konstante elektromotorische Kraft plötzlich entladen und hierauf voneinander isoliert werden; 4. die gesamte Elektrizitätsmenge (gesamte Rückstandsladung), die einen nach unendlicher Ladungsdauer angelegten Kurzschluß zwischen beiden Belegungen durchfließt.

Der Rückstandsstrom bei konstanter elektromotorischer Kraft als Funktion der Zeit wurde von Maxwell nicht berechnet. Dieses Problem führt auf große mathematische Schwierigkeiten und ist daher im folgenden nur so weit ausgeführt, daß die Gültigkeit des Superpositionsprinzips theoretisch abgeleitet werden kann.

Die Voraussetzungen der folgenden Ableitung sind gegenüber denen Maxwell's einerseits eingeschränkt durch die Annahme, daß die Dielektrizitätskonstante K des inhomogenen Mediums durchwegs konstant sei, andrerseits erweitert durch die Annahme, daß bei Fortschreiten in einer bestimmten Richtung (der X-Achse) das Leitvermögen λ nicht sprungweise eine endliche Anzahl von Änderungen, den Werten λ_1 bis λ_n entsprechend, sondern kontinuierlich sich ändere, also durch eine beliebige stetige Funktion $\lambda(x)$ darstellbar sei.

Es sei also gegeben eine unendlich ausgedehnte Platte eines Dielektrikums von der Dicke l, die zwischen zwei metallischen Belegungen mit konstanten Potentialen $V = E$ und $V = 0$ sich befinde.

Die Dielektrizitätskonstante habe den konstanten Wert K, das spezifische Leitvermögen sei eine gegebene Funktion $\lambda(x)$.

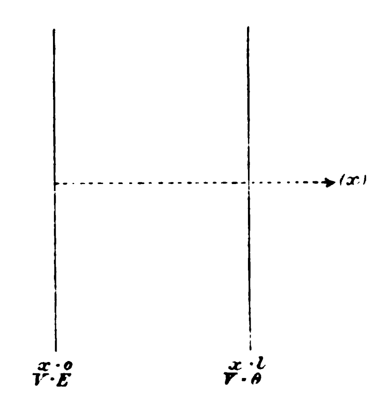


Fig. 1.

Für einen beliebigen Punkt im Dielektrikum gelten dann die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{4\pi}{K}\rho \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[\lambda(x)X], \tag{2}$$

wobei X die elektrische Feldstärke, ρ die Raumdichte der wahren Ladung bezeichnet.

Daraus erhält man für die Feldstärke X die Differentialgleichung:

$$\frac{K}{4\pi}\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial t} = -\frac{\partial[\lambda(x)X]}{\partial x} \tag{3}$$

und durch Integration:

$$\frac{K}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t} + \lambda(x)X = \psi(t). \tag{4}$$

$\psi(t)$ ist zunächst eine als Integrationskonstante bei der Integration nach x auftretende willkürliche Funktion der Zeit,

die aber dadurch bestimmt ist, daß zu jeder Zeit die Bedingung erfüllt sein muß:

$$\int_0^l X dx = E. \tag{5}$$

Da $\frac{\partial E}{\partial t} = 0 = \int_0^l \frac{\partial X}{\partial t} dx$, erhält man aus Gleichung (4):

$$\psi(t) = \frac{1}{l}\int_0^l \lambda(x) X dx. \tag{6}$$

Diese Funktion $\psi(t)$ hat eine einfache physikalische Bedeutung; sie ist der Gesamtstrom pro Flächeneinheit in der Richtung der positiven x-Achse; in Gleichung (4) ist die Zerlegung in einen Verschiebungsstrom $\frac{K}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}$ und einen Leitungsstrom $\lambda(x)X$ angedeutet.

Gleichung (4) liefert nach abermaliger Integration die Formel:

$$X = e^{-\frac{4\pi}{K}\lambda(x)t}\left\{\frac{E}{l} + \int_0^t \psi(t) e^{+\frac{4\pi}{K}\lambda(x)t} dx\right\} =$$

$$= e^{-\frac{4\pi}{K}\lambda(x)t}\left\{\frac{E}{l} + \int_0^t dt \left[e^{+\frac{4\pi}{K}\lambda(x)t}\int_0^l X dx\right]\right\}. \tag{7}$$

Durch diese Integralgleichung ist die Feldintensität X als Funktion von x und t bestimmt; eine explizite Darstellung von X oder $\psi(t)$ daraus zu gewinnen, ist dem Verfasser nicht gelungen. Immerhin genügen die erhaltenen Resultate zum Nachweis des Superpositionsprinzips.

Aus den Gleichungen (4) und (6) folgt, daß bei konstanter Potentialdifferenz die Differentialgleichung gilt:

$$\frac{K}{4\pi}\cdot\frac{\partial X}{\partial t} + \lambda(x) X = \frac{1}{l}\int_0^l X\lambda(x) dx.$$

Wenn also an einem Kondensator, für den K, l und $\lambda(x)$ gegeben sind, in zwei Versuchen bloß die Anfangsbedingungen für $t = 0$, $X = X_0(x)$ und $X' = X_0'(x)$ sowie die Größen E und E' verschieden sind, so ist in beiden Fällen obige Differential-

gleichung erfüllt. Setzt man daher $X_t' = X_t + \Delta_t$, so gilt auch für die Differenz Δ_t die Gleichung:

$$\frac{K}{4\pi}\frac{\partial \Delta_t}{\partial t} + \lambda(x)\Delta_t = \frac{1}{l}\int_0^l \Delta_t . \lambda(x)\,dx,$$

d. h. der zeitliche Verlauf der Änderung der Feldintensität X' und damit auch der diese Änderung begleitende Rückstandsstrom kann aufgefaßt werden als Superposition der beiden Vorgänge, die sich abspielen würden, wenn zur Zeit $t=0$ einmal die momentane Verteilung der elektrischen Kraft durch X_0, das andere Mal durch Δ_0 gegeben wäre. Wird also in einem beliebigen Stadium der Rückstandsbildung die Potentialdifferenz der Belegungen plötzlich um den Betrag ΔE und damit die Feldstärke überall um den Betrag $\frac{\Delta E}{l}$ geändert, so ist der weitere Ablauf des Rückstandsstromes gegeben durch die Superposition jenes Stromes, der ohne Änderung der Potentialdifferenz weiter erfolgt wäre, und eines Rückstandsstromes, der durch Anschaltung der Spannung ΔE an den vorher unendlich lange Zeit ungeladenen Kondensator erzeugt worden wäre.

Die Maxwell'sche Theorie der inhomogenen Dielektrika gibt also Aufschluß über die wesentlichsten Eigenschaften, die an den anomalen Dielektrikas tatsächlich vorgefunden werden. Die explizite Darstellung der experimentell beobachtbaren Größen führt aber auf mathematische Schwierigkeiten, so daß eine Prüfung der Theorie durch Vergleich mit der Erfahrung bezüglich der quantitativen Verhältnisse nicht ausgeführt werden kann.

4. Anomalien der Leitung.

Eine zweite Möglichkeit der theoretischen Darstellung der Erscheinungen an Dielektrikas besteht darin, die Annahme eines k o n s t a n t e n spezifischen Leitvermögens fallen zu lassen und zu ersetzen durch eine solche, die kompliziertere Formen des Leitungsvorganges voraussetzt. Insbesondere in Anlehnung an die bei ionisierten Gasen beobachteten Erscheinungen können die Gesetze der I o n e n l e i t u n g auf flüssige und feste Dielektrika übertragen werden.

Die Theorie der Elektrizitätsleitung in ionisierten Gasen geht von folgenden Voraussetzungen aus:

Durch Wirkung eines »Ionisators« entstehen pro Volum- und Zeiteinheit q Ionenpaare; ein Teil der Ionen verschwindet durch Wiedervereinigung zu neutralen Molekülen (»Molisierung«), und zwar ist dieser Betrag, pro Volum- und Zeiteinheit gerechnet, gegeben durch $\alpha n_1 n_2$, wo n_1 und n_2 die Zahlen der in der Volumeinheit vorhandenen positiven, respektive negativen Ionen, α ein für eine bestimmte Gattung von Ionenpaaren charakteristischer sogenannter »Wiedervereinigungskoeffizienten« ist. Es gilt also die Gleichung:

$$\frac{dn}{dt} = q - \alpha n_1 n_2.$$

In einem elektrischen Felde ist in dieser Gleichung noch ein Glied einzufügen, das die Differenz der Zahlen der durch den Strom zu- und abgeführten Ionen angibt, also:

$$\frac{dn_1}{dt} = q - \alpha n_1 n_2 - s_1$$

$$\frac{dn_2}{dt} = q - \alpha n_1 n_2 - s_2.$$

Die positiven, beziehungsweise negativen Ionen bewegen sich nun in einem elektrischen Felde mit einer der Feldintensität proportionalen Geschwindigkeit $u_1 = c_1 X$, $u_2 = -c_2 X$, worin c_1 und c_2 die sogenannten spezifischen Geschwindigkeiten oder Beweglichkeiten der beiden Ionenarten sind.

Daraus ergeben sich für den Fall der Elektrizitätsleitung in einem von zwei unendlich ausgedehnten parallelen Platten (in der Distanz l) begrenzten ionisierten Gase — bei konstanter Potentialdifferenz E der beiden Platten — folgende Gleichungen:

$$[n_1 - n_2]\varepsilon = -4\pi \cdot \frac{\partial X}{\partial x} \tag{1}$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = q - \alpha n_1 n_2 - \frac{\partial}{\partial x}(n_1 c_1 X] \tag{2}$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = q - \alpha n_1 n_2 + \frac{\partial}{\partial x}[n_2 c_2 X] \tag{3}$$

$$\int_0^l X dx = E. \tag{4}$$

Die allgemeine Integration dieses Gleichungssystems ist bisher nicht durchgeführt (vergl. J. J. Thomson, Conduction of electricity through Gases, p. 64 bis 73, Cambridge 1903); doch sind folgende Resultate leicht ersichtlich):

Durch Einschalten eines elektrischen Feldes wird der ursprüngliche Ionengehalt $n_0 = \sqrt{\frac{q}{\alpha}}$ verringert, die Stromstärke nimmt mit der Zeit ab und erreicht einen stationären Grenzwert, der bei Anwendung verschiedener Werte der elektromotorischen Kraft nicht dieser proportional ist; das spezifische Leitvermögen eines ionisierten Gases ist also nach Stromschluß zeitlich variabel und im stationären Endzustand eine Funktion der Stromdichte, und zwar eine mit steigender Stromdichte abnehmende.

Die zeitliche Variation erfolgt in Gasen sehr schnell, so daß sie in den meisten Fällen experimentell nicht verfolgt werden kann; die Abhängigkeit des stationären Leitvermögens von der Stromdichte, beziehungsweise von der elektromotorischen Kraft zeigt sich in bekannter Weise durch die »Charakteristik«, d. i. die Kurve $i = f(E)$, welche zu der Unterscheidung »Ohmscher Strom« (dem Ohm'schen Gesetz gehorchender Strom) für kleine Feldintensitäten oder Spannungen, »unvollständig gesättigter Strom« für mittlere und »Sättigungsstrom« (von der elektromotorischen Kraft unabhängiger konstanter Strom) für große Feldintensitäten oder Spannungen geführt hat.

Ferner folgt aus den Gleichungen, daß im stationären Zustande die Ionenzahl pro Volumeinheit nicht mehr räumlich konstant ist: in den den Elektroden benachbarten Schichten sind Ionen des einen (und zwar dem der Elektrode entgegengesetzten) Vorzeichens im Überschusse vorhanden; dadurch ist auch das ursprünglich homogene elektrische Feld gestört, in der Nähe der Elektroden über den Mittelwert erhöht, in der Mitte unter denselben erniedrigt.

Es ist ein naheliegender Gedanke, diese Annahmen auch auf flüssige und feste Dielektrika zu übertragen, die Leitung in diesen Medien als Ionenleitung aufzufassen.

Einige anomale Erscheinungen bei der Leitung flüssiger Dielektrika (vergl. im Literaturverzeichnis Abteilung IV), so die zeitliche Abnahme der Stromstärke und die Nichtproportionalität von Stromstärke und elektromotorischer Kraft im stationären Zustande, wurden auch bereits in dieser Weise gedeutet, ja an einigen flüssigen Dielektrikas wurden der Größenordnung nach Ionenbeweglichkeiten und Ionenzahlen bestimmt (Schweidler, IV, 7, 8, 10).

Aber auch die Erscheinungen der Wärmeproduktion, der Rotationen und der Rückstandsbildung lassen sich qualitativ auf diesem Wege ableiten.

Bezüglich der Wärmeproduktion, von der oben nachgewiesen wurde, daß sie nicht als die einem konstanten Leitvermögen entsprechende Joule'sche Wärme gedeutet werden könne, ist zunächst ersichtlich, daß bei Anwendung alternierender Felder (Wechselstrom) nicht der infolge des Stromdurchganges verringerte Wert des Leitvermögens im stationären Zustande, sondern jener Wert einzusetzen ist, der kurz nach Stromschluß vorhanden ist; es wird damit auch begreiflich, daß das mittlere Leitvermögen abhängig ist von der Dauer der Einwirkung des Feldes in bestimmter Richtung, daß mit abnehmender Periodendauer des Wechselstromes das Leitvermögen immer näher an den — im feldlosen Raume gültigen — Wert $(c_1+c_2)\varepsilon n_0 = (c_1+c_2)\varepsilon \sqrt{\frac{q}{\alpha}}$ heranrückt.

Bezüglich der Rotationserscheinungen und Drehungsmomente, die nach der im Abschnitt II, 2 angegebenen Formel auf die Leitungskonstanten zurückführbar sind, gilt dasselbe. Insbesondere wird es verständlich, daß das Drehungsmoment D langsamer wächst als F^2, da das spezifische Leitvermögen mit steigender Feldintensität abnimmt.

Auch die Rückstandsbildung im engeren Sinne kann zurückgeführt werden auf die durch die Stauung der Ionen in der Nähe der Elektroden bedingten Feldstörungen. Es läßt sich

hier einfach die im vorigen Abschnitt behandelte Maxwell'sche Theorie der geschichteten Dielektrika anwenden:

Ein Medium mit Ionenleitung ist zwar nicht von vornherein inhomogen, aber es wird inhomogen bezüglich seiner Leitfähigkeit infolge des Stromdurchganges; die ursprüngliche Leitfähigkeit im feldlosen Raume wird — wie oben erwähnt — verändert, und zwar in der Nähe der Elektroden stärker erniedrigt als in der Mitte. Somit muß ein derartiges Medium nach einiger Dauer der Einwirkung des elektrischen Feldes das Verhalten eines geschichteten Dielektrikums zeigen.

Wenn so die Annahme von Ionenleitung auch in flüssigen und festen Dielektrikas genügt, die anomalen Erscheinungen in qualitativer Hinsicht zu erklären, so ergeben sich doch Bedenken bei der Anwendung dieser Theorie zur Darstellung der quantitativen Verhältnisse.

Zunächst sind, wie oben erwähnt, Schwierigkeiten mathematischer Natur vorhanden, welche die exakte Lösung des Problemes verhindern: in einem Medium, dessen Ionenkonstanten (Ionisierungsstärke q, Koeffizient der Wiedervereinigung α, Beweglichkeiten c_1 und c_2) gegeben sind, den Strom als Funktion der Zeit und der elektromotorischen Kraft darzustellen. Diese Schwierigkeiten nun beeinträchtigen wohl die Anwendbarkeit der Theorie, ohne natürlich gegen ihre Richtigkeit etwas zu beweisen.

Aber auch in Bezug auf die Richtigkeit ergeben sich Bedenken. Wäre die Abnahme des Rückstandsstromes von seinem Anfangswerte auf einen hiezu relativ kleinen Endwert bedingt durch die Entionisierung infolge des Stromdurchganges, so müßte man annehmen, daß der stationäre Strom der unvollkommen oder vollkommen gesättigten Phase angehört (vergl. Fig. 2).

Es zeigt sich aber tatsächlich, daß der stationäre Endwert des Stromes in einem rückstandbildenden Dielektrikum (z. B. Glas) innerhalb weiter Grenzen dem Ohm'schen Gesetze entspricht, d. h. der elektromotorischen Kraft proportional ist (man vergleiche die experimentellen Resultate von E. Warburg, Wied. Ann., *21*, 622, und F. M. Exner, Verh. d. D. Phys. Ges., *3*, 26, [1901] sowie E. v. Schweidler [I, 46]). Für den

»Ohm'schen Strom« (Phase I) aber ist wiederum die Differenz zwischen dem Anfangswerte des Stromes für $t = 0$ (in der Figur durch die Gerade 1 dargestellt) und dem stationären Endwerte (in der Figur Kurve 2) gering.

Die Annahme bloß einer Gattung von Ionenpaaren ist also nicht zulässig.

Man könnte nun annehmen, daß von jedem Vorzeichen Ionen mit sehr verschiedenen Werten der spezifischen Geschwindigkeit gleichzeitig im Dielektrikum vorhanden seien, so

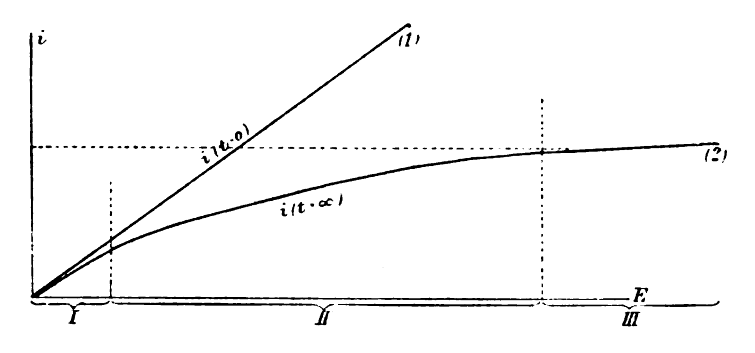


Fig. 2.

I. Phase: Ohm'scher Strom.
II. Phase: Unvollständig gesättigter Strom.
III. Phase: Sättigungsstrom.

daß bei bestimmter elektromotorischer Kraft für die eine Gattung (die leicht beweglichen) bereits Sättigungsstrom eintritt, während für die anderen (schwer beweglichen) noch Ohm'scher Strom herrscht. Aber auch diese kompliziertere Annahme ist vollkommen unvereinbar mit folgender Tatsache:

Nach Einschaltung einer elektromotorischen Kraft vom Werte E_1 zur Zeit $t = 0$ beobachtet man einen Strom, darstellbar durch $i_1 = a_1 + f(t)$, wobei $f(t)$ von einem hohen Anfangswerte asymptotisch auf Null absinkt und a_1 den stationären Endwert darstellt; wird nach hinreichend langer Zeit T, so daß $f(T)$ praktisch gleich Null gesetzt werden kann, die elektromotorische Kraft plötzlich vergrößert, z. B. auf den

Wert $E_2 = kE_1$, so beobachtet man tatsächlich einen Strom i_2, der als Funktion der Zeit gegeben ist durch die Formel:

$$i_2 = ka_1 + (k-1)f(t-T),$$

entsprechend der früher erwähnten Proportionalitätsbeziehung zwischen stationärem Teil der Strömung und elektromotorischer Kraft, sowie dem Superpositionsprinzip für den zeitlich variablen Bestandteil des Stromes. Da $f(0)$ groß gegen a_1 ist, setzt also unmittelbar nach der Vergrößerung der elektromotorischen Kraft der Strom i_2 mit einem Werte ein, der nahezu $(k-1)$mal größer ist als der Anfangswert von i_1 für $t = 0$.

Der auf Ionenleitung beruhende Strom könnte aber unmittelbar nach Einschaltung der elektromotorischen Kraft E_2 höchstens den Wert ka_1 erreichen, da ja die Leitfähigkeit des Mediums durch den langdauernden Strom i_1 bereits auf den mittleren Betrag von $\frac{a_1}{E_1}$ herabgedrückt wurde.

Es ist also resumierend über die Anwendung der Theorie der Ionenleitung auf flüssige und feste Dielektrika zu sagen, daß die von ihr geforderten anomalen Eigenschaften des spezifischen Leitvermögens (zeitliche Variabilität, Abhängigkeit von Stromdichte) zwar an den tatsächlich beobachteten Erscheinungen mitbeteiligt sein können, daß sie aber für sich allein nicht ausreichend ist, die wesentlichen Eigentümlichkeiten der beobachteten Phänomene, vor allem die Gesetze der Rückstandsbildung zu erklären.

5. Anomalien des dielektrischen Verhaltens.

Eine dritte Möglichkeit der theoretischen Behandlung liegt in der Annahme von Anomalien des dielektrischen Verhaltens. An Stelle der Voraussetzung, daß die dielektrische Verschiebung (oder Polarisation) zu jeder Zeit der elektrischen Feldstärke proportional sei und daß dieser Proportionalitätsfaktor eben durch den konstanten Wert der Dielektrizitätskonstante gegeben sei, treten kompliziertere Bedingungen, nach denen der jeweilige Wert des Verschiebungsvektors $\mathfrak{D}$ nicht allein eine Funktion des simultanen der Feldstärke $\mathfrak{E}$, sondern auch der vorhergegangenen Zustände des Mediums sein soll. Mit andern

Worten: analog wie in Bezug auf Elastizität und Magnetismus zeigen viele Medien auch in Bezug auf dielektrische Vorgänge Nachwirkungserscheinungen oder Hysteresis im weiteren Sinne des Wortes.

Allgemein gehaltene Sätze analogen Inhaltes sind oftmals ausgesprochen worden, doch nur wenige Versuche liegen vor, die funktionelle Beziehung zwischen Momentanwert der Verschiebung und der »Vorgeschichte« des Mediums präzise zu formulieren und damit das Fundament für eine eigentliche Theorie der Hysteresiserscheinungen zu schaffen.

a) Hysteresis im engeren Sinne.

Unter Hysteresis im engeren Sinne (»hysteresis proprement dit«) bezeichnen manche Autoren, speziell Beaulard (II, 37) jene Form der Nachwirkungserscheinungen, wie sie an ferromagnetischen Substanzen, besonders an weichem Eisen, experimentell gründlich untersucht und auch theoretisch bis zu einem gewissen Grade befriedigend dargestellt wurden (vergl. Winkelmann, Handbuch der Physik, Bd. V, 1, p. 217 bis 222). Es ist naheliegend, die Gesetze der magnetischen Hysteresis einfach auf die dielektrische zu übertragen: bei variabler Feldintensität ist die einem bestimmten Werte derselben zugeordnete Verschiebung größer bei abnehmendem als bei zunehmendem Gange der Feldintensität; infolgedessen tritt bei zyklischer Elektrisierung (Wechselspannung) in der graphischen Darstellung eine geschlossene Kurve auf (Hysteresisschleife), deren Flächeninhalt bekanntlich die pro Periode in Wärme umgesetzte Energie angibt. Außerdem führt diese Anschauung zu den Begriffen »dielektrische Koerzitivkraft« (durch OA) und »remanente Elektrisierung« (durch OB dargestellt).

Für die Abhängigkeit der Hysteresisarbeit von der Amplitude der periodischen Magnetisierung haben die Versuche im allgemeinen eine Formel ergeben von der Form:

$$W = \eta . H^n, \text{ wo } n = \text{zirka } 1 \cdot 6.$$

Die Übereinstimmung der von Arno (l. c.) gefundenen Beziehung zwischen der elektrischen Hysteresisarbeit und der

Effektivspannung (W prop. E^n, wo n zwischen 1·5 und 1·96) mit obiger Formel wurde oftmals als Beweis für die Analogie der magnetischen und der dielektrischen Hysteresis betrachtet.

Insbesondere Beaulard (II, 37) hat die Unanwendbarkeit dieser Theorie nachgewiesen. Bei der magnetischen Hysteresis ist die Amplitude der periodisch wechselnden magnetischen Feldintensität $\mathfrak{H}$ in erster Linie maßgebend, die Periodendauer von minder wesentlichem und noch nicht ganz sicher festgestelltem Einfluß. Die Abhängigkeit der dielektrischen

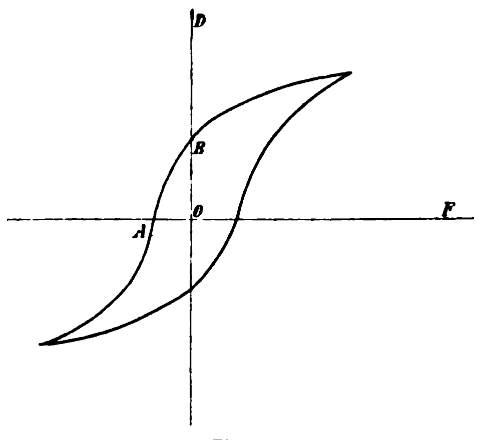


Fig. 3.

»Hysteresisarbeit« von der Dauer der Periode (vergl. Abschnitt I, 2 und 3) stört die Analogie bedeutend.

Ferner ist darauf hinzuweisen, daß »Remanenz« und »Koerzitivkraft« auf elektrischem Gebiete noch nicht experimentell sichergestellt werden konnten (Germanischskaja, VI, 3) und endlich, daß die Rückstandserscheinungen, bei denen der zeitliche Verlauf des anomalen Stromes das erste Problem bildet, in dieser der magnetischen Theorie nachgebildeten überhaupt nicht darstellbar sind.

b) Viskose Hysteresis.

b_1). Auf Grund der oben angeführten Überlegungen hat eine Reihe von Forschern die Theorie der elektrischen

Hysteresis im engeren Sinne — analog der magnetischen Hysteresis — verworfen und »viskose Hysteresis« (auch »elektrische Viskosität« genannt) angenommen (Schaufelberger, II, 32, 34; Beaulard, II, 36, 37; Arno in seinen späteren Arbeiten, II, 27; Porter und Morris, II, 22 u. a.).

Hierunter versteht man die Tatsache, daß bei plötzlicher Erregung eines elektrischen Feldes die dielektrische Verschiebung nicht momentan den durch $K\mathfrak{E}$ gegebenen Wert annimmt, sondern ihn erst allmählich ansteigend asymptotisch erreicht. Bei kontinuierlicher (eventuell periodischer) Änderung des Feldes $\mathfrak{E}$ bleibt daher die Verschiebung $\mathfrak{D}$ stets hinter ihrem »Sollwerte« zeitlich zurück.

Diese, als »dielektrische Nachwirkung« auch auf dem Gebiete der Rückstandsbildung versuchte Annahme (Boltzmann, Romich und Nowack, I, 7; Hopkinson, I, 9 bis 11; Wüllner, I, 12; u. a.) erfordert nun eine schärfere Fassung.

b_2). Pellat's Theorie.

Die einzige bisher tatsächlich erfolgte präzise Formulierung rührt von Pellat her (I, 39, 41 identisch mit II, 33, 39). Der Grundgedanke ist folgender:

Wird an einer Stelle eines dielektrischen Mediums, das hinreichend lange Zeit der Einwirkung eines elektrischen Feldes entzogen war, plötzlich zur Zeit $t = 0$ ein Feld von der Intensität $\mathfrak{E}_0$ erzeugt und für $t > 0$ konstant erhalten, so nimmt die Verschiebung $\mathfrak{D}$ ebenfalls plötzlich zur Zeit $t = 0$ den Wert $K\mathfrak{E}_0$ an, steigt aber dann allmählich an nach der Formel:

$$\mathfrak{D}_t = K\mathfrak{E}_0 + (1 - e^{-\alpha t})\varepsilon K\mathfrak{E}_0,$$

wo α und ε zwei Materialkonstanten sind.

Es wird für

$$t = \infty, \quad \mathfrak{D}_t = \mathfrak{D}_\infty = (1+\varepsilon)K\mathfrak{E}_0.$$

Somit gilt allgemein die Gleichung:

$$\frac{d\mathfrak{D}_t}{dt} = \alpha e^{-\alpha t} . \varepsilon K\mathfrak{E}_0 = -\alpha(\mathfrak{D}_t - \mathfrak{D}_\infty),$$

d. h. die Verschiebung strebt einem stationären Endwerte $\mathfrak{D}_\infty$ zu und ihre Änderungsgeschwindigkeit ist jederzeit proportional der Differenz dieses Endwertes und des momentanen Wertes.

Bei beliebiger zeitlicher Variation der Feldintensität $\mathfrak{E}_t = f(t)$ gilt ebenfalls die Differentialgleichung:

$$\frac{d\mathfrak{D}_t}{dt} = K\frac{d\mathfrak{E}_t}{dt} + \alpha[\varepsilon K\mathfrak{E}_t - \mathfrak{D}_t]$$

oder wenn man $\mathfrak{D}_t = K\mathfrak{E}_t + \mathfrak{D}'_t$ setzt:

$$\frac{d\mathfrak{D}'_t}{dt} = \alpha[\varepsilon K\mathfrak{E}_t - \mathfrak{D}'_t].$$

Pellat bezeichnet die Größe K als »wahre Dielektrizitätskonstante«, $K\mathfrak{E}$ als »fiktive Polarisation« und $\mathfrak{D}'$ als »wahre Polarisation«.

An Stelle dieser — vom Standpunkte der Maxwell'schen Theorie aus etwas willkürlich gewählten — Bezeichnungsweise Pellat's soll im folgenden $K\mathfrak{E}$ »normale Verschiebung« und $\mathfrak{D}'$ »viskose Verschiebung« genannt werden.

Auf Grund obiger Annahmen ist also ein Dielektrikum im allgemeinen durch vier Materialkonstanten zu charakterisieren: zu Dielektrizitätskonstante K und spezifischem Leitvermögen λ treten noch die Größen ε und α; ε ist von der Dimension einer reinen Zahl und gibt das Verhältnis des stationären Endwertes der viskosen Verschiebung zu der normalen Verschiebung an; α ist von der Dimension einer reziproken Zeit und $\frac{1}{\alpha}$ bedeutet die Relaxationszeit der viskosen Verschiebung.

Es ergeben sich ferner folgende Konsequenzen:

1. Bei konstanter Feldintensität $\mathfrak{E}_0$ ist

$$\mathfrak{D} = K\mathfrak{E}_0 + (1 - e^{\alpha t})\varepsilon K\mathfrak{E}_0$$

und daher der Verschiebungsstrom pro Flächeneinheit

$$y_1 = -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \frac{\alpha}{4\pi}e^{-\alpha t}\varepsilon K\mathfrak{E}_0.$$

Ein diesem Verschiebungsstrom entsprechender Leitungsstrom zirkuliert in der Zuleitung. Hat das Dielektrikum eines

Kondensators die Flächengröße der Belegung f und die Dicke d, so daß die Potentialdifferenz der Belegungen gegeben ist durch $E = d \,.\, \mathfrak{E}_0$, so gilt für den Gesamtstrom in der Zuleitung:

$$J = \alpha \varepsilon C E \,.\, e^{-\alpha t}.$$

Wird der Kondensator nach unendlich langer Ladungsdauer entladen, indem zur Zeit $t = 0$ die Belegungen ohne Einschaltung einer elektromotorischen Kraft direkt leitend verbunden werden, so ist

$$\mathfrak{D} = \varepsilon K \mathfrak{E}_0 e^{-\alpha t}$$

$$y_2 = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = -\frac{\alpha}{4\pi} e^{-\alpha t} \varepsilon K \mathfrak{E}_0 = -y_1,$$

d. h. der durch »Freiwerden des Rückstandes« entstandene Strom y_2 ist dem »rückstandsbildenden Strom« y_1 entgegengesetzt gleich. Wird der Kondensator nach der endlichen Ladungsdauer T entladen, so ist

$$\text{für } t = 0;\ \mathfrak{D} = \varepsilon K \mathfrak{E}_0 (1 - e^{-\alpha T})$$

$$\text{für } t > 0;\ \mathfrak{D} = \varepsilon K \mathfrak{E}_0 (1 - e^{-\alpha T}) e^{-\alpha t}$$

$$y_2 = \frac{\alpha}{4\pi} \varepsilon K \mathfrak{E}_0 (1 - e^{-\alpha T}) e^{-\alpha t} = \frac{\alpha \varepsilon K \mathfrak{E}_0}{4\pi} [e^{-\alpha t} - e^{-\alpha(t+T)}],$$

d. h. der nun auftretende Strom entspricht dem Superpositionsprinzip.

Qualitativ sind also die empirischen Gesetze der Rückstandsbildung aus der Pellat'schen Theorie abzuleiten; in quantitativer Beziehung besteht Nichtübereinstimmung bezüglich der Form des zeitlichen Verlaufes, für den die Theorie eine Exponentialfunktion $e^{-\alpha t}$, die Erfahrung die Formel Bt^{-n} liefert. Pellat meint, die Versuche J. Curie's zitierend (I, 21), daß die Beobachtung nicht hinreichend genau sei, um die Differenz zwischen der theoretischen und der empirischen Formel mit Sicherheit konstatieren zu können. Dies ist wohl ein Irrtum; außer J. Curie's haben auch die von Pellat nicht zitierten Experimentaluntersuchungen von Kohlrausch (I, 1), Hopkinson (I, 9, 10, 11), Giese (I, 15), Dieterici (I, 18) u. a. das gleiche Resultat ergeben, und Beobachtungsfehler von der

Größe der Differenz der nach beiden Formeln berechneten Stromstärken sind schlechthin ausgeschlossen.

Bezüglich der Gesetze der Rückstandsbildung bedarf also die Pellat'sche Theorie jedenfalls einer Modifikation.

2. Für den Fall eines sinusförmigen Wechselfeldes

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

lassen sich die Erscheinungen übersehen, indem man in die im II. Teile, Abschnitt 1, angeführten Formeln (p. 1031) für die unbestimmt gelassene Funktion $f(u)$ auf Grund der eben abgeleiteten Resultate setzt:

$$f(u) = \alpha \varepsilon C . e^{-\alpha u}.$$

Man erhält also:

$$i = \frac{2\pi E_0}{\tau} \left\{ A \cos \frac{2\pi t}{\tau} + B \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right\},$$

wobei

$$A = \int_0^\infty \alpha \varepsilon C e^{-\alpha u} \cos \frac{2\pi u}{\tau} du = \varepsilon C \frac{\alpha^2 \tau^2}{4\pi^2 + \alpha^2 \tau^2}$$

$$B = \int_0^\infty \alpha \varepsilon C e^{-\alpha u} \sin \frac{2\pi u}{\tau} du = \varepsilon C \frac{2\pi \alpha \tau}{4\pi^2 + \alpha^2 \tau^2}.$$

Somit — unter weiterer Anwendung der auf p. 1031 und 1032 abgeleiteten Formeln — für die scheinbare Kapazität des Kondensators·

$$C' = C \left[1 + \varepsilon \frac{\alpha^2 \tau^2}{4\pi^2 + \alpha^2 \tau^2} \right],$$

also mit zunehmender Periodendauer steigende Kapazität, und für den reziproken Wert des scheinbaren Widerstandes:

$$L' = L + \varepsilon C \frac{4\pi^2 \alpha}{4\pi^2 + \alpha^2 \tau^2},$$

also Zunahme des scheinbaren Leitvermögens und damit der in Wärme umgewandelten Energie mit abnehmender Periodendauer.

Die qualitative Übereinstimmung mit den empirischen Resultaten ist wieder vorhanden.

b_3). Modifikation der Pellat'schen Theorie.

Eine Erweiterung der Pellat'schen Theorie erhält man durch folgende Annahmen:

Die dielektrische Verschiebung besteht aus einem Bestandteil (normale Verschiebung), der jeweils der momentanen Feldintensität proportional ist, und einer Summe von Gliedern, deren jedes für sich nach einem analogen Gesetz, wie es die Pellat'sche Theorie annimmt, einem Grenzwert zustrebt, bei denen aber die einer bestimmten Feldintensität entsprechenden Endbeträge und die Zeitkonstanten verschieden sind. Also:

$$\mathfrak{D} = K\mathfrak{E} + \Sigma \mathfrak{D}'_i,$$

wobei $\mathfrak{D}'_i$ der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{d\mathfrak{D}'_i}{dt} = \alpha_i [\varepsilon_i K \mathfrak{E} - \mathfrak{D}'_i].$$

Im stationären Endzustande bei $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0$ und $t = \infty$ wird:

$$\mathfrak{D}_\infty = \mathfrak{E}_0 K \{1 + \Sigma \varepsilon_i\}.$$

Wird ein Kondensator zur Zeit $t = 0$ plötzlich geladen, so ist der Rückstandsstrom gegeben durch:

$$\mathfrak{D}_t = K\mathfrak{E}_0 \{1 + \Sigma \varepsilon_i (1 - e^{-\alpha_i t})\}$$

$$i = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\mathfrak{D}_t}{dt} = K\mathfrak{E}_0 \Sigma \alpha_i \varepsilon_i e^{-\alpha_i t}.$$

Die Zeitfunktion $f(t)$, die den Abfall des Rückstandsstromes darstellt, ist also durch eine Summe von einfachen Exponentialfunktionen gegeben. Da jede Funktion, die stetig abnimmt und deren sämtliche Ableitungen ebenfalls stetig abnehmen, mit beliebiger Annäherung durch eine solche Summe von Exponentialfunktionen darstellbar ist, genügt die modifizierte Theorie jeder empirisch gefundenen Form für $f(t)$, welche obiger Bedingung bezüglich der Derivierten entspricht.

Die Gesetze der Superposition bei beliebig veränderlicher Feldintensität $\mathfrak{E}_t$ gelten natürlich für die Summe der Exponentialfunktionen ebenso wie für die einzelne im früheren Falle der Pellat'schen Theorie. Speziell für einfach periodische Wechselfelder ergibt sich:

$$\mathfrak{D} = \sin \frac{2\pi t}{\tau} \cdot K\mathfrak{E}_0 \left\{1 + \Sigma \varepsilon_i \frac{\alpha_i \tau^2}{4\pi^2 + \alpha_i^2 \tau^2}\right\}$$

$$- \cos \frac{2\pi t}{\tau} \cdot K\mathfrak{E}_0 \, \Sigma \varepsilon_i \frac{2\pi \alpha_i \tau}{4\pi^2 + \alpha_i^2 \tau^2}$$

und analog wie früher für die scheinbare Kapazität und die scheinbare Leitfähigkeit Ausdrücke, die nur durch die Einfügung des Summenzeichens Σ modifiziert sind.

Diese Formeln lassen sich nun noch in anderer Weise darstellen. Statt einer endlichen Anzahl von Gliedern der Form $\mathfrak{D}_i = \varepsilon_i K \mathfrak{E}$ kann man eine unendliche Anzahl annehmen, deren Zeitkonstanten α_i kontinuierlich zwischen den Werten 0 und ∞ abgestuft sind. An Stelle der Sättigungswerte $\varepsilon_i K \mathfrak{E}$ tritt dann eine Funktion $K\mathfrak{E}\varepsilon(\alpha)d\alpha$, die angibt, welcher Betrag vom gesamten Verschiebungsvektor auf jene Bestandteile entfällt, deren Zeitkonstanten zwischen den Grenzen α und $\alpha + d\alpha$ liegen, analog wie man z. B. in der Theorie der Strahlung die Intensitätsverteilung über verschiedene Wellenlängen λ darstellt durch eine Funktion $f(\lambda)$ und die Gesamtintensität setzt: $J = \int_0^\infty f(\lambda) d\lambda$.

Die obigen Gleichungen nehmen dann folgende Form an: Im stationären Zustande für $t = \infty$ bei konstanter Feldstärke $\mathfrak{E}_0$:

$$\mathfrak{D}_\infty = K\mathfrak{E}_0 \left\{1 + \int_0^\infty \varepsilon(\alpha) d\alpha\right\};$$

bei plötzlicher Einschaltung eines Feldes $\mathfrak{E}_0$ zur Zeit $t = 0$:

$$\mathfrak{D}_t = K\mathfrak{E}_0 \left\{1 + \int_0^\infty \varepsilon(\alpha)\left[1 - e^{-\alpha t}\right] d\alpha\right\}$$

$$i = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\mathfrak{D}_t}{dt} = f(t) = \frac{K}{4\pi} \mathfrak{E}_0 \int_0^\infty \alpha . \varepsilon(\alpha) e^{-\alpha t} d\alpha;$$

bei einfach periodischem Felde $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau}$:

$$\mathfrak{D} = \sin \frac{2\pi t}{\tau} \cdot K\mathfrak{E}_0 \left\{ 1 + \int_0^\infty \frac{\varepsilon(\alpha)\alpha^2\tau^2}{4\pi^2 + \alpha^2\tau^2} d\alpha \right\}$$

$$- \cos \frac{2\pi t}{\tau} \cdot K\mathfrak{E}_0 \int_0^\infty \frac{2\pi\varepsilon(\alpha)\alpha\tau}{4\pi^2 + \alpha^2\tau^2} d\alpha.$$

Man kann nun auch umgekehrt die Forderung stellen, die Funktion $\varepsilon(\alpha)$ zu bestimmen, wenn z. B. der zeitliche Verlauf des Rückstandstromes $i = f(t)$ empirisch ermittelt ist.

Es wurde bereits erwähnt, daß empirisch mit großer Annäherung sich die Formel $i = f(t) = b\mathfrak{E}_0 . t^{-n}$ ergibt.

Aus der Gleichung:

$$\frac{K}{4\pi} \int_0^\infty \alpha . \varepsilon(\alpha) e^{-\alpha t} d\alpha = b . t^{-n}$$

erhält man dann:[1]

$$\alpha . \varepsilon(\alpha) = \frac{4\pi b}{K} \cdot \frac{1}{\Gamma(1-n)} \cdot \alpha^{-(1-n)}$$

oder

$$\varepsilon(\alpha) = \frac{4\pi b}{K} \cdot \frac{1}{\Gamma(1-n)} \cdot \alpha^{-(2-n)}.$$

Da $n < 1$, also $(2-n)$ positiv ist, wird für $\alpha = 0$ die Funktion $\varepsilon(\alpha) = \infty$; auch müßte im stationären Zustande die durch:

$$\mathfrak{D}_\infty = K\mathfrak{E}_0 \left(1 + \int_0^\infty \varepsilon(\alpha) d\alpha \right)$$

gegebene Verschiebung unendlich groß werden, und zwar durch die Integration von Null bis zu einem beliebig kleinen α_1, während $\int_{\alpha_1}^\infty$ endlich bleibt. Es wurde bereits im Teile I, Abschnitt 1, p. 1024, erwähnt, daß die Annahme exakter Gültigkeit der empirischen Näherungsformel $i = b . t^{-n}$ zu unwahrscheinlichen Konsequenzen führt. Nimmt man an, daß für sehr große

[1] Vergl. Serret, Differential- und Integralrechnung, III/1, p. 190.

Zeiten diese Formel nicht mehr gilt, sondern daß dann die wirkliche Stromstärke rascher absinkt und daß $\int_0^\infty i\,dt$ endlich bleibt, so ist dann auch die Funktion $\varepsilon(\alpha)$ zu modifizieren, und zwar gerade in jenem Gebiet, für welches $\alpha = 0$ oder sehr klein ist; denn der Rückstandsstrom nach sehr langer Zeit (t groß) ist bedingt durch jene Bestandteile der viskosen Verschiebung, die sich sehr langsam ändern (α sehr klein). Es genügt also im Intervalle von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \alpha_1$, wo α_1 sehr klein sein kann, $\varepsilon(\alpha)$ durch eine andere Funktion als die oben angegebene zu ersetzen, die der Bedingung genügt: $\int_0^{\alpha_1} \varepsilon(\alpha)\,d\alpha$ = endlich, für $\alpha < \alpha_1$ aber die obige Form beizubehalten; das Resultat ist, daß $\int_0^\infty \varepsilon(\alpha)\,d\alpha$ endlich bleibt und daß die Stromstärke $i = \int_0^\infty \alpha\varepsilon(\alpha) e^{-\alpha t} d\alpha$ bis zu großen Werten von t durch die Formel $i = b.t^{-n}$ dargestellt wird, erst dann rascher als nach dieser Formel gegen Null konvergiert und daß die »Rückstandsladung« $\int_0^\infty i\,dt$ endlich bleibt. Für die Vorgänge, die sich im periodisch wechselnden Felde abspielen, ist die Form der Funktion $\varepsilon(\alpha)$ für kleine Werte des Argumentes unwesentlich, solange die Periodendauer τ nicht sehr groß wird, da die dabei auftretenden Koeffizienten A und B durch Integration von Produkten $\alpha\varepsilon(\alpha)$, beziehungsweise $\alpha^2\varepsilon(\alpha)$ entstehen, somit die Integration im Intervall von 0 bis α_1 (α_1 sehr klein) Beträge liefert, die unendlich klein von der ersten, beziehungsweise zweiten Ordnung sind.

Die Charakterisierung eines Dielektrikums erfolgt also nach der modifizierten Pellat'schen Theorie folgendermaßen:

Außer der Dielektrizitätskonstante K und dem spezifischen Leitvermögen λ des Mediums ist noch eine Funktion $\varepsilon(\alpha)$ im Bereich $\alpha = 0$ bis $\alpha = \infty$ anzugeben; das Integral

$$\int_0^\infty \alpha.\varepsilon(\alpha) e^{-\alpha t} d\alpha = f(t)$$

liefert dann das Gesetz des zeitlichen Verlaufes des Rückstandsstromes; umgekehrt kann die Funktion $\varepsilon(\alpha)$ aus der empirisch gefundenen Funktion $f(t)$ ermittelt werden. Vermöge der Gültigkeit des Superpositionsprinzipes, die sich aus den Annahmen der Theorie ergibt, lassen sich dann die Gesetze des Stromverlaufes bei beliebig variierender Feldintensität prinzipiell ableiten, also insbesondere die Vorgänge im Wechselfelde: die scheinbare Kapazitätsänderung bei Variation der Periode und die in Wärme umgewandelte Energie, ferner die damit zusammenhängenden ponderomotorischen Kräfte, die ein Dielektrikum bei relativer Rotation zu einem konstanten elektrischen Felde erfährt.

Die Fassung dieser erweiterten Theorie ist also allgemein genug, um beliebige empirisch gefundene oder noch zu findende Formen des zeitlichen Verlaufes der Rückstandsbildung darstellen zu können, und präzisiert genug, um die quantitative, nicht bloß qualitative Ableitung der übrigen Hauptformen anomalen Verhaltens aus der Rückstandsbildung zu ermöglichen.

Bloß in einem Detail ergibt sich ein Widerspruch zwischen den Resultaten der theoretischen Ableitung und dem direkten Ergebnis des Experimentes; die im Wechselfelde umgewandelte Energie und damit die Drehungsmomente im rotierenden Felde müssen nach der Theorie proportional dem Quadrat der Feldintensität sein, während von einigen Beobachtern eine andere Beziehung (proportional $\mathfrak{E}^n$, wo $n = 1 \cdot 5$ bis $1 \cdot 96$, vergl. p. 1028 und 1029) gefunden wurde. In diesen Fällen spielt vielleicht die anomale Art der Leitung mit, deren Effekte sich über die der dielektrischen Nachwirkung überlagern.

b_4.) Molekulartheoretische Bedeutung der modifizierten Pellat'schen Theorie.

Die Zerlegung des tatsächlich vorhandenen Verschiebungsvektors $\mathfrak{D}$ in eine beliebig große Anzahl von Teilbeträgen, die alle einer bestimmten Differentialgleichung genügen, aber für die darin enthaltenen Parameter α und ε verschiedene Werte aufweisen, erscheint auf den ersten Blick als eine gekünstelte,

rein mathematische Fiktion, die schließlich nur darauf hinausläuft, für die Darstellung einer komplizierten empirisch gegebenen Funktion beliebig viele Konstanten einzuführen. Es soll nun gezeigt werden, wie diese Fiktion einer einfachen physikalischen Interpretation fähig ist.

In der vormaxwellschen Zeit wurden die dielektrischen Erscheinungen gedeutet als bedingt durch die Einlagerung kleiner (molekularer) leitender Teilchen; diese Anschauung gipfelt in der bekannten Clausius-Mosotti'schen Theorie.

Eine Zeit lang wurden durch die Maxwell'sche Formulierung der Grundgleichungen die molekularphysikalischen Betrachtungsweisen auf dem Gebiete der Dielektrika ganz zurückgedrängt.

Die Anschauungen der modernen Ionen- und Elektronentheorie führten aber solche wieder ein, und zwar konnten die Vorstellungen der alten Theorie mit leichten Modifikationen wieder verwendet werden. An Stelle des leitenden Partikels oder Moleküls — grob versinnlicht durch eine kleine Metallkugel in einem isolierenden Medium eingebettet — tritt das aus entgegengesetzt geladenen Ionen (negatives Elektron und positives Restatom) bestehende Molekül. Die relative Verschiebbarkeit der beiden Bestandteile ersetzt die Leitung im alten Sinne. Die Moleküle als Ionenkomplexe können nun auch als »Resonatoren« aufgefaßt werden, indem die aus der Gleichgewichtslage gebrachten Ionen eine bestimmte Dauer der Eigenschwingung besitzen. Die Erscheinungen der normalen und anomalen Dispersion elektrischer Wellen sowie die damit zusammenhängende Absorption werden in der modernen Theorie von diesem Gewichtspunkte aus behandelt.

Es liegt nun nahe anzunehmen, daß neben Molekülen, deren Ionen eine Eigenschwingung von bestimmter Dauer und bestimmtem Dämpfungsverhältnis bedingen, auch solche vorhanden seien, bei denen die Dämpfung so groß ist, daß an Stelle einer Schwingung eine aperiodisch gedämpfte Bewegung auftritt. Unter dem Einfluß eines plötzlich auftretenden, dann konstant bleibenden elektrischen Feldes stellt sich dann der neue Gleichgewichtszustand derart her, daß die Abweichung von diesem nach einer Exponentialfunktion $e^{-\alpha t}$ abnimmt.

Die molekularphysikalische Deutung der Pellat'schen Theorie wäre daher folgende: Neben den Molekülen, die als Resonatoren mit bestimmter (sehr kleiner) Schwingungsdauer einem relativ langsam veränderlichen elektrischen Felde ohne merkliche Phasendifferenz folgen, sind in einem anomalen Dielektrikum auch Moleküle vorhanden, in denen die Verschiebung der Ionen aperiodisch gedämpft erfolgt, und zwar so, daß die Konstante α der obigen Formel für alle Moleküle den gleichen Wert besitzt. Die Größe ε gibt an, in welchem Verhältnis der Verschiebungsfluß dieser aperiodisch gedämpften Moleküle zu dem der oszillatorisch beweglichen steht.

In der modifizierten Theorie wird angenommen, daß nicht eine Gattung solcher aperiodisch gedämpfter Ionenkomplexe mit bestimmter Zeitkonstante α vorhanden sei, sondern eine große Anzahl verschiedener Gattungen mit verschiedenen Werten ihrer Zeitkonstanten α_1, die in verschiedener Anzahl (proportional ε_i) pro Volumeinheit vorhanden sind.

Eventuell kann man die möglichen Werte der Dämpfung als kontinuierlich abgestuft auffassen und die Funktion $\varepsilon(\alpha)$ gibt an, nach welchem Gesetze die Häufigkeit der von 0 bis ∞ variierenden α-Werte verteilt ist.

Der Zerlegung einer empirisch gegebenen Funktion in eine Summe einfacher Exponentialfunktionen entspricht daher physikalisch eine Sonderung der Wirkungen, die von verschiedenen Gruppen unter sich gleichartiger Moleküle hervorgebracht werden.

III. Teil.

Experimentelle Beiträge zur Untersuchung der Rückstandsbildung.

1. Versuchsanordnung.

Um den Rückstandsstrom bezüglich seines zeitlichen Verlaufes, seiner Abhängigkeit von Ladungsdauer, elektromotorischer Kraft, Temperatur etc. zu untersuchen, wurde die Methode der direkten galvanometrischen Messung angewendet.

Das benutzte Instrument war ein hoch empfindliches Drehspulengalvanometer, dessen Reduktionsfaktor $3 \cdot 19 . 10^{-10} \frac{A}{\text{pars}}$ betrug; hieraus und aus der Schwingungsdauer und Dämpfung der Spule berechnete sich der ballistische Reduktionsfaktor zu $1 \cdot 34 . 10^{-9} \frac{Cb}{\text{pars}}$.

Nebenstehende Skizze zeigt die Schaltung an; der zu untersuchende Kondensator K ist einerseits mit einem Punkt von konstantem Potential $+E$ verbunden, andrerseits über das Galvanometer G zur Erde abgeleitet. Um den heftigen Ausschlag des Galvanometers beim Ein- oder Ausschalten der elektromotorischen Kraft E zu vermeiden, ist ein Schlüssel SI als Kurzschluß der Galvanometerleitung angebracht; zugleich gestattete es dieser Schlüssel in Verbindung mit dem Schlüssel SII jederzeit, ohne Unterbrechung des den Kondensator durchfließenden Stromes, den Nullpunkt zu prüfen. Bei Anwendung kleiner Werte von E konnte bei geöffnetem Schlüssel SI aus dem ballistischen Ausschlage die Kapazität des Kondensators K bestimmt werden.

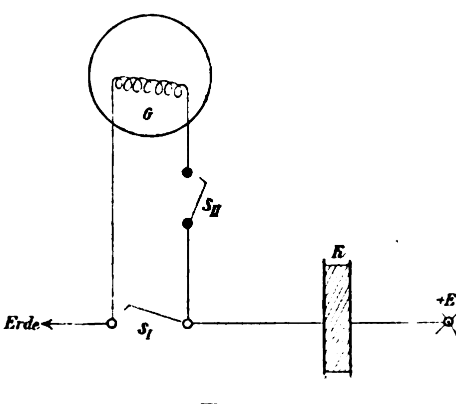


Fig. 4.

Da in verschiedenen Versuchsreihen sehr verschiedene Meßbereiche nötig waren, wurden diese nach Bedarf geändert. Eine Erhöhung des Meßbereiches (Erniedrigung der Empfindlichkeit) auf das Zehn-, Hundert- oder Tausendfache des normalen Wertes wurde in der üblichen Weise durch Anlegen von Shunts zur Galvanometerspule bewerkstelligt. Um den Meßbereich auch auf schwache Ströme (von etwa 10^{-9} A abwärts bis 10^{-11} A), die einen für genauere Messung zu geringen Ausschlag erzeugten, auszudehnen, wurde folgende Versuchs-

anordnung getroffen: Die über das Galvanometer zur Erde führende Stromleitung kann durch einen Schlüssel *S* III unterbrochen werden. Parallel zu dieser Leitung ist eine zweite geschaltet, die einen Glimmerkondensator *GK* von 1 Mikrofarad Kapazität enthält. Der Glimmerkondensator nimmt dann während der Unterbrechungsdauer T infolge des (als konstant vorausgesetzten) Stromes i die Ladung iT an, welche durch Schließen von *S* III aus dem ballistischen Ausschlag ermittelt werden kann. Ein Strom, der einen Dauerausschlag von 1 pars bewirkt, gibt pro Sekunde der Unterbrechungszeit einen ballistischen Ausschlag

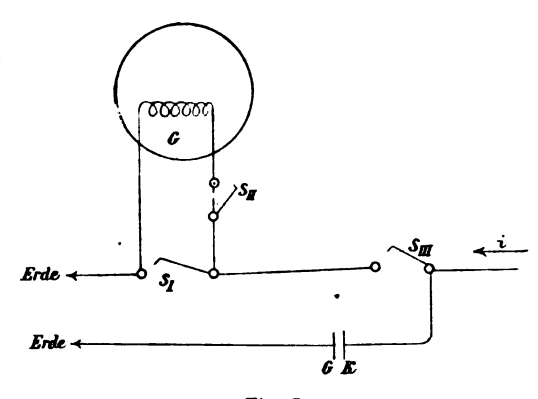


Fig. 5.

von $\frac{1}{4 \cdot 21}$ partes, also bei 500 Sekunden Unterbrechungszeit einen Ausschlag von 119 partes, d. i. eine Erhöhung der Empfindlichkeit auf das rund 120fache der normalen. Infolge der großen Kapazität des Glimmerkondensators bleibt das Potential der aufgeladenen Belegung auch nach längerer Zeit klein, z. B. 0·16 Volt nach 500 Sekunden im früheren Beispiel, so daß die den Strom i unterhaltende elektromotorische Kraft E (gewöhnlich 100 bis 300 Volt) praktisch als konstant betrachtet werden kann. Der Ladungsverlust durch Leitung und Rückstandsbildung im Glimmerkondensator selbst war zu vernachlässigen.

Unmittelbar nach der Ein- oder Ausschaltung der elektromotorischen Kraft ist die zeitliche Änderung des Rückstandsstromes eine so rapide, daß das infolge seiner starken Dämpfung

träge Galvanometer eine Messung der zu einer bestimmten Zeit vorhandenen Stromstärke durch den gleichzeitig beobachteten Ausschlag unmöglich macht; erst nach etwa einer halben Minute kann der — nun langsamer abnehmende — Ausschlag als Maß des Stromes angesehen werden. Um nun auch kurz nach Stromschluß wenigstens einen Wert der Stromstärke zu bestimmen, wurde folgende Schaltung angewendet:

Parallel dem Galvanometer liegt eine Leitung, die den Schlüssel SI und einen Widerstand W_1 ($W_1 = 1$ Ohm) enthält. An den Enden des Widerstandes W_1 liegt wieder eine Leitung,

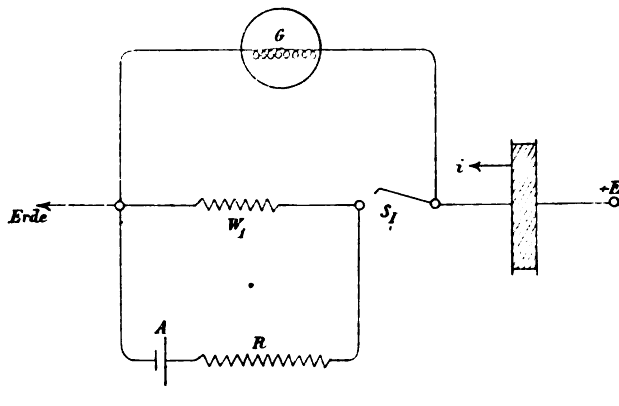


Fig. 6.

die einen Akkumulator A und einen Regulierwiderstand R enthält. Das Verfahren ist folgendes: Durch einen Vorversuch wird auf dem Wege der Extrapolation ungefähr ermittelt, welche Stromstärke zu einer bestimmten Zeit t_1 nach Einschaltung der elektromotorischen Kraft im Galvanometer zu erwarten ist. Beim zweiten definitiven Versuche bleibt SI zunächst geschlossen; der Akkumulator A entsendet einen Zweigstrom (Hilfsstrom) in das Galvanometer, der durch Variation des Regulierwiderstandes R auf eine beliebige Größe gebracht werden kann und einen konstanten Ausschlag a hervorruft. Nun wird zur Zeit $t = 0$ im Hauptkreis die elektromotorische Kraft E eingeschaltet; da SI geschlossen ist und W_1 (1 Ohm) gegenüber dem Widerstande der Galvanometerspule (10.000 Ohm) immer noch als Kurzschluß aufgefaßt

werden kann, geht der normale Ladungsstrom und der mit hohen Anfangswerten einsetzende Rückstandsstrom i zunächst über SI und W_1 zur Erde, während im Galvanometer der Hilfsstrom den konstanten Ausschlag a erhält. Zu jener Zeit $t = t_1$, für welche auf Grund des Vorversuches zu erwarten ist, daß $i = a$ ist, wird der Schlüssel SI geöffnet. Es wird damit gleichzeitig der Hilfsstrom a unterbrochen und der zu messende Strom i über das Galvanometer geleitet. War wirklich im Momente der Unterbrechung $i = a$, so bleibt in diesem Momente die abgelenkte Galvanometerspule im Gleichgewichte, um dann der Abnahme von i entsprechend ihren Ausschlag zu verringern; war aber im Momente der Unterbrechung i größer oder kleiner als a, so erfolgt auch eine stoßartige Vergrößerung oder Verkleinerung des Ausschlages. Auf diese Weise kann also die Stromstärke i bestimmt werden für eine relativ kurze Zeit (in praxi etwa 10 Sekunden) nach Stromschluß.

2. Versuchsresultate.

Zunächst soll in drei Beispielen (Versuchsreihen 1, 2 und 3) der auf p. 1022 besprochene Unterschied der beiden Typen anomalen Ladungsstromes gezeigt werden.

Versuchsreihe 1.

Zylinderkondensator mit Petroleum gefüllt; t Zeit in Sekunden von Stromschluß an gerechnet, E Potentialdifferenz in Volt, i beobachteter Strom in Skalenteilen, a stationärer Endwert desselben, y gegeben durch $i - a$.

Von $t = 0$ bis $t = 1000$; $E = 300$ Volt; für $t > 1000$: $E = 0$.

t	i	y	t	i	y
0	—	—	180	126·3	0·8
15	240	114·5	240	126	0·5
30	188	62·5	300	126·2	0·7
45	168	42·5	660	125·5	0·0
60	151	25·5	900	125·5	0·0
90	134	8·5	1000	—	—
120	129	3·5	1020	—0·2	—0·2
150	127	1·5	1060	—0·1	—0·1

Versuchsreihe 2.

Plattenkondensator mit Toluol gefüllt; Bezeichnung wie bei 1.

$t = 0$ bis $t = 3600$ sec: $E = 200$ Volt; $t > 3600$ sec: $E = 0$ Volt.

t	i	y	t	i	y
0	—	—	300	110	32
30	375	297	360	105	27
60	260	182	420	101	23
90	182	104	480	99	21
120	155	77	540	95	17
150	140	62	600	94	16
180	130	52	3600	{ 78 —	0·0 —
240	117	39	3650	—0·5	0·5

Versuchsreihe 3.

Glaskondensator (Eprouvette, als Belegungen innen und außen Schwefelsäure); Bezeichnung wie früher.

Von $t = 0$ bis $t = 900$ sec: $E = 300$ Volt; für $t > 900$ sec: $E = 0$ Volt.

t	i_1	$y_1 = i_1 - a$	t	$i_2 = y_2$
0	—	—	900	—
10	22	16	910	—18
20	16	10	920	— 9·8
30	12·6	6·6	930	— 7·3
50	11·1	5·1	950	— 5·0
80	9·1	3·1	980	— 3·9
100	9·0	3·0	1000	— 3·1
150	8·0	2·0	1050	— 2·0
600	6·0	0·0	1500	— 0·0
890	6·0	0·0	1800	— 0·0

Das Resultat ist also, daß in den Versuchsreihen 1 und 2 der Strom allmählich auf einen stationären Endwert abnimmt, nach Ausschaltung der elektromotorischen Kraft aber ein Strom merklicher Intensität überhaupt nicht vorhanden ist, daß dagegen in der Versuchsreihe 3 zunächst analog wie in den ersten beiden Fällen eine Abnahme des Stromes erfolgt, nach Ausschaltung der elektromotorischen Kraft aber ein entgegengesetzt gerichteter Strom auftritt, dessen Stärke innerhalb der Beobachtungsfehler der Größe y_1, d. i. dem Überschusse des Stromes i_1 über seinen stationären Endwert, gleich ist.

Die Kurventafeln I, II und III geben ein Bild von den Gesetzen des zeitlichen Verlaufes der variablen Bestandteile $y = i - a$; die Abszissen stellen $\log t$, die Ordinaten $\log y$ dar; für II und III erhält man angenähert Gerade: also da

$$\log y = \text{Const} - n \log t$$

daraus

$$y = B . t^{-n}.$$

Für I dagegen tritt an Stelle einer Geraden eine stark nach abwärts gekrümmte Kurve, die allerdings dann in eine Gerade überzugehen scheint.

Trotz der mehr oder weniger großen Analogie in der Form des zeitlichen Ganges sind die Fälle 1 und 2 scharf zu sondern von 3. Bei 1 und 2 liegt ein nicht reversibler anomaler Ladungsstrom vor, der theoretisch auf die Eigenschaften eines Mediums mit Ionenleitung zurückgeführt werden kann. Bei 3 liegt ein reversibler anomaler Strom, also eigentliche Rückstandsbildung vor. Bei flüssigen Dielektrikas ist vom Verfasser immer nur der erste Typus konstatiert worden, bei festen Dielektrikas der zweite.

Die von vielen Beobachtern (vergl. p. 1024) gefundene und durch den oben angeführten Versuch 3 bestätigte Formel:

$$i_1 - a = - i_2 = B . t^{-n}$$

für den zeitlichen Verlauf der Rückstandsströme wurde bisher immer nur für relativ kleine Zeitintervalle (bis zu einer Stunde etwa) experimentell geprüft.

Die beiden folgenden Versuchsreihen erstrecken sich über weit längere Zeiten.

Versuchsreihe 4.

Glimmerkondensator von 1 Mikrofarad Kapazität, durch 69 Stunden = 248400 Sekunden auf 300 Volt geladen; zur Zeit $t = 0$ entladen; für den Entladungsstrom i_2 wurde gefunden:

t (sec)	i_2 (partes)	Temperatur ϑ (° C.)	t (sec)	i_2 (partes)	Temperatur ϑ (° C.)
0	—	19·2	3000	8·8	19·6
40	(149)	—	4000	7·0	19·7
60	104	—	6150	5·30	19·8
100	73	—	10000	3·92	20·0
150	56	—	25000	2·06	20·4
200	46·5	—	100000	0·64	21·2
300	36·0	—	110000	0·58	20·6
600	23·2	—	346500	0·130	21·6
1000	17·0	19·4	520000	0·080	22·8
2000	11·3	19·5			

Die graphische Darstellung gibt bis zu zirka $t = 10000$ sec ($\log t = 4 \cdot 0$) einen linearen Verlauf, also Gültigkeit der obigen Formel; für $t > 100000$ fällt der Strom rascher, als es der Formel entspricht. Doch kann daraus noch nicht auf ihre Ungültigkeit für hohe Werte von t geschlossen werden.

Der Voraussetzung nach sollte die Formel $i = Bt^{-n}$ gelten für den anomalen Ladungsstrom sowie für den Entladungsstrom dann, wenn der Kondensator unendlich lange Zeit vorher auf konstanter Potentialdifferenz geladen gehalten wurde. Nach endlicher Ladungsdauer δ ist nach dem Superpositionsprinzipe zu erwarten, daß der Entladungsstrom

$$i_2 = f(t) - f(t+\delta) = B[t^{-n} - (t+\delta)^{-n}].$$

Da im vorliegenden Falle δ zwar groß (rund 250000 sec), aber nicht unendlich ist, so wird beim Entladungsstrom das Glied $(t+\delta)^{-n}$ für kleine Werte von t zu vernachlässigen, für große Werte von t aber merklich sein.

Eine Beobachtung des über den eventuellen konstanten Leitungsstrom übergelagerten Ladungsstromes, die direkt $f(t)$ gegeben hätte, mußte aus praktisch-technischen Gründen unterbleiben: die elektromotorische Kraft — durch Abzweigen vom Straßenstrom erhalten — war nicht vollkommen konstant, so daß ihren Variationen entsprechende normale Ladungs- und Entladungsströme sich über den zu beobachtenden Strom überlagerten und unregelmäßige, sehr bedeutende Schwankungen des Ausschlages hervorriefen.

Versuchsreihe 5.

Paraffinpapierkondensator von 5 Mikrofarad Kapazität, durch 6 Tage und 5 Stunden = 450000 Sekunden auf 300 Volt geladen; zur Zeit $t = 0$ entladen; für den Entladungsstrom i_2 wurde gefunden:

t (sec)	i_2 (partes)	Temperatur ϑ (° C.)	t (sec)	i_2 (partes)	Temperatur ϑ (° C.)
0	—	20·4	$1{\cdot}48.10^6$	154·5	18·4
60	22500	—	$1{\cdot}72.10^6$	162	20·2
100	19000	—	$1{\cdot}80.10^6$	155	19·7
120	11200	—	$2{\cdot}08.10^6$	155	20·0
180	8580	—	$2{\cdot}17.10^6$	139	19·0
200	8080	—	$2{\cdot}33.10^6$	186·5	22·8
300	6360	—	$2{\cdot}42.10^6$	201·5	23·6
600	4550	—	$2{\cdot}51.10^6$	213	24·2
1000	3640	—	$2{\cdot}68.10^6$	202	24·4
1500	3090	—	$3{\cdot}11.10^6$	202	26·0
3000	2420	21·0	$3{\cdot}19.10^6$	209	27·0
10000	1640	20·6	$3{\cdot}72.10^6$	170	—
93000	748	19·8	$10{\cdot}89.10^6$	17·0	17·2
250000	596	22·6	$11{\cdot}69.10^6$	16·0	18·0
332000	491	21·4	$12{\cdot}11.10^6$	13·1	14·0
508500	403	22·4	$15{\cdot}97.10^6$	8·2	12·8
768600	287	—	$15{\cdot}98.10^6$	18·0	18·8
$1{\cdot}20.10^6$	186·5	19·8			

Wie die graphische Darstellung (Kurventafel V) zeigt, ist hier die obige Formel weniger gut erfüllt; log i fällt zuerst rascher (entsprechend $n = 0 \cdot 86$), dann langsamer (entsprechend $n = 0 \cdot 34$); für große Werte von t ($t > 100000$) wird der Gang ganz unregelmäßig, in offenbarem Zusammenhang mit Temperaturschwankungen. Erhöhter Temperatur entsprechen höhere Stromwerte. Nach mehr als einem halben Jahre ($t = 16$ Millionen Sekunden) ist der Rückstandsstrom noch sehr merklich; da die zeitliche Änderung nun eine sehr langsame ist, kommen die Temperatureinflüsse rein zur Geltung. Einer Erhöhung der Temperatur von 12·8° C. auf 18·8° C. entspricht ein Anwachsen der Stromstärke von 8·2 auf 18·0 partes.

Im Anschluß hieran seien einige Versuche über die Beeinflussung der Rückstandsbildung in Glas durch die Temperatur mitgeteilt.

Versuchsreihe 6.

Glaskondensator, bestehend aus Kochkolben, Belegungen innen und außen Schwefelsäure; in fünf Versuchen bei verschiedenen Temperaturen wurde der Entladungsstrom gemessen, nachdem der Kondensator in allen fünf Fällen durch eine Zeit $\delta = 1800$ sec auf 300 Volt geladen worden war. Die Temperaturen betrugen:

bei *a)*...........	$\vartheta = 18°$ C.
» *b)*...........	30
» *c)*...........	38
» *d)*...........	40
» *e)*...........	47

Unter Hinweglassung der zugehörigen Zahlentabellen sei direkt auf die graphische Darstellung in Taf. VI verwiesen.

Es ergibt sich, daß die Kurven $\log i = f(\log t)$ angenähert Gerade von gleicher Neigung sind, aber um so höher liegen, je größer die zugeordnete Temperatur ist. Es gilt also auch angenähert die Formel $i = B . t^{-n}$, und zwar ist n durch die Temperatur nicht wesentlich beeinflußt, während B mit steigender Temperatur zunimmt.

Mit steigender Temperatur nimmt also der Rückstandsstrom zu, ohne die Form des zeitlichen Verlaufes erheblich zu ändern.

Die folgende Versuchsreihe enthält eine Prüfung des Superpositionsprinzipes. Wird ein Kondensator unter sonst gleichen Bedingungen (gleiche elektromotorische Kraft, gleiche Temperatur) bei variabler Ladungsdauer δ geladen und dann der Entladungsstrom gemessen, so sollte bei Gültigkeit des Superpositionsprinzipes die Gleichung erfüllt sein:

$$i = Bt^{-n} - B(t+\delta)^{-n}.$$

Versuchsreihe 7.

Glimmerkondensator von 1 Mikrofarad Kapazität; $E = 300$ Volt, δ respektive gleich 2, 10, 60, 600, 1800, 250000 Sekunden. Die graphische Darstellung in Kurventafel VII.

Eine tabellarische Zusammenstellung der beobachteten und der berechneten Werte von i gibt die Tabelle auf p. 1070.

Die beobachteten und die berechneten Werte stimmen für $\delta = 60$ sec und $\delta = 600$ sec gut überein (für $\delta = 250000$ sec ist die ausgeglichene Kurve der beobachteten Werte als berechnete eingesetzt, daher die Übereinstimmung selbstverständlich); im übrigen ist zwar die Größenordnung dieselbe, die Abweichung aber doch eine die Beobachtungsfehler übersteigende.

Dabei ist aber zu berücksichtigen, daß für kleine Ladungszeiten ($\delta = 2$ sec und 10 sec) der eingesetzte Wert von δ ungenau ist, ferner daß in den verschiedenen Messungsreihen nicht dieselbe Temperatur zu erzielen war, was ebenfalls Voraussetzung der exakten Übereinstimmung ist.

Weitere Versuche prüfen die Richtigkeit der Annahme, daß bei verschiedenen Werten E der elektromotorischen Kraft die zugehörigen Werte von B in der Formel $i = B.t^{-n}$ der elektromotorischen Kraft proportional sind.

Versuchsreihe 8.

Glimmerkondensator von 1 Mikrofarad Kapazität, Ladungsdauer $\delta = 600$ sec, E variabel.

Tabelle zur Versuchsreihe 7.

t	$\delta = 2$ sec		$\delta = 10$ sec		$\delta = 60$ sec		$\delta = 600$ sec		$\delta = 1800$ sec		$\delta = 250000$ sec	
	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.
0	∞	—	∞	—	∞	—	∞	—	∞	—	∞	--
10	34	—	112	—	128	—	283	—	305	—	316	—
30	6	12	26	40	78	—	134	—	146	—	157	—
40	3·5	6·8	17·5	25	59	62	109	112	120	120	131	(149)
60	1·4	3·5	9·1	12	35·3	36	79·4	77	90·2	81	101	104
100	0·9	1·5	4·3	4·8	18·3	17·5	51·9	49	62·3	53	73·3	73
150	—	—	1·6	—	10·9	10·0	35·6	34·5	45·6	37·5	56·6	56
200	0·3	—	1·5	1·8	5·9	—	27·7	23·0	36·2	—	47·2	46·5
300	—	0·3	0·6	1·1	3·9	3·8	—	—	26·0	20·0	36·5	36·0
600	—	—	—	—	1·5	2·0	8·4	9·0	14·0	11·1	23·5	23·2
1000	—	—	—	—	0·8	0·7	—	—	8·3	—	17·0	17·0
2000	—	—	—	—	—	—	1·83	2·2	4·7	—	11·0	11·3
3000	—	—	—	—	—	—	1·03	1·5	1·2	—	8·5	8·8

Die Versuchsergebnisse sind zusammengestellt in der folgenden Tabelle:

t (sec)	$E =$				
	10 Volt	20 Volt	50 Volt	100 Volt	300 Volt
0	—	—	—	—	—
30	4·8	8·5	22	47	—
50	2·9	5·3	13·8	29	94
60	—	4·3	11·6	24·1	77
100	1·5	2·6	8·0	15·0	47
250	0·53	1·09	2·83	—	19
500	0·24	0·56	1·54	2·99	9·3
1000	0·13	0·21	0·60	1·20	4·7

Die Abweichungen liegen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler; die obige Annahme erweist sich also berechtigt bei Variationen der elektromotorischen Kraft im Verhältnis von 1:30.

Anwendung der experimentell gefundenen Resultate.

Im folgenden soll an einem Beispiel gezeigt werden, wie aus der Untersuchung des Rückstandsstromes die dadurch bedingten Anomalien anderer Art numerisch berechnet werden können.

Aus Versuchsreihe 4 ergibt sich für einen Glimmerkondensator von 1 Mikrofarad Kapazität bei $E = 300$ Volt für den Rückstandsstrom:

$$i = B.t^{-n};\; B = 1370 \text{ partes} = 4{\cdot}38.10^{-7}\, A$$
$$n = 0{\cdot}64.$$

Setzt man $B = CE\beta$, so erhält man:

$$\beta = 1{\cdot}46.10^{-3}\left(\frac{1}{\text{sec}}\right).$$

Die Rückstandsladung $R_t = \beta CE \frac{t^{1-n}}{1-n}$ ist somit für

$t = 1$ sec	4·3	Promille der disponiblen Ladung
10 »	9·5	» » » »
100 »	20·9	» » » »
1000 »	46·0	» » » »

Für die Änderung der scheinbaren Kapazität C' mit der Periodendauer τ erhält man aus der Formel (vergl. p. 1032)

$$C' = C\left[1 + \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{1-n} \beta\Gamma(1-n) \cos\frac{(1-n)\pi}{2}\right]$$

folgende Werte:

τ	Frequenz	C'
$\tau = 0·0001$ sec,	Frequenz = 10000,	$C' = 1·000021\ C$
0·001	1000	1·000046
0·01	100	1·000106
0·1	10	1·000243
1·0	1	1·000556

Analog ergibt sich aus der Formel für den reziproken scheinbaren Widerstand:

$$L' = L + \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{-n} \beta C \frac{\pi}{2\Gamma(n) \cos\frac{(1-n)\pi}{2}},$$

für den scheinbaren Widerstand des Kondensators infolge seiner Rückstandsbildung $\omega = \frac{1}{L'-L}$ für

τ	Frequenz	ω
$\tau = 0·0001$ sec,	Frequenz = 10000,	$\omega =$ 14.000 Ohm
0·001	1000	61.000
0·01	100	267.000
0·1	10	1,180.000
1·0	1	5,150.000

Diesem scheinbaren Widerstand entspricht dann die analog wie die Joule'sche Wärme berechnete Energievergeudung im Kondensator.

Eine Zusammenstellung der Werte von β und n, die in analoger Weise für andere Substanzen die auf Rückstandsbildung beruhenden Phänomene numerisch berechnen läßt, ergibt:

Glimmer (Versuch 4) bei zirka 20° C.:

$$\beta = 1{\cdot}46.10^{-8}\left(\frac{1}{\text{sec}}\right); \quad n = 0{\cdot}64.$$

Glas (Eprouvette, Versuch 3) bei zirka 20° C.:

$$\beta = 78.10^{-8}\left(\frac{1}{\text{sec}}\right); \quad n = 0{\cdot}74.$$

Glas (Kochkolben, Versuch 6) bei zirka 18° C.:

$$\beta = 15{\cdot}4.10^{-8}\left(\frac{1}{\text{sec}}\right); \quad n = 0{\cdot}70.$$

Paraffinpapier (Versuch 5) bei zirka 20° C.:

$$\beta = 128.10^{-8}\left(\frac{1}{\text{sec}}\right); \quad n = 0{\cdot}34.$$

IV. Teil.

Zusammenfassung der Resultate.

I. Es wurde zunächst auf Grund der bisher vorliegenden experimentellen Ergebnisse eine Darstellung der Hauptformen anomalen Verhaltens der Dielektrika und der dabei gefundenen Gesetzmäßigkeiten gegeben. Als solche Hauptformen werden unterschieden:

1. Die Rückstandsbildung;

2. die Energieverluste (Wärmeproduktion) in Dielektrikas unter dem Einfluß eines Wechselfeldes;

3. die ponderomotorischen Kräfte, die ein Dielektrikum in einem relativ zu ihm rotierenden Felde erfährt;

4. die scheinbare Abhängigkeit der Kapazität eines Kondensators von Ladungsdauer bei konstanter Spannung, beziehungsweise Periodendauer bei Wechselspannung.

II. Es wurde hierauf gezeigt, daß das Vorhandensein von Rückstandsbildung in einem Medium notwendig auch die unter 2 bis 4 genannten Formen anomalen Verhaltens bedingt und

daß aus den empirisch gefundenen Gesetzen der Rückstandsbildung auch die Gesetze für diese Formen quantitativ ableitbar sind.

Es wird ferner gezeigt, daß zwar ohne Rückstandsbildung diesen anderen Formen analoge Erscheinungen durch Leitung des Dielektrikums zu stande kommen können, daß aber eine Berücksichtigung der bisher gefundenen Ergebnisse quantitativen Charakters diese Erklärung als unzureichend erscheinen läßt.

Die Diskussion der verschiedenen Möglichkeiten, die Anomalien der Dielektrika theoretisch zu behandeln, führt auf folgende Resultate:

Die Annahme inhomogener Struktur des Dielektrikums (Maxwell'sche Theorie der geschichteten Dielektrika) führt zu qualitativ richtigen Folgerungen, doch ist infolge mathematischer Schwierigkeiten eine exakte Lösung der gestellten Probleme und damit ein Vergleich von Theorie und Erfahrung in quantitativer Beziehung vorläufig undurchführbar.

Die Annahme anomaler Leitung (Ionenleitung) führt teilweise zu qualitativ richtigen Ergebnissen, teilweise aber zu Konsequenzen, die mit der Erfahrung im Widerspruch stehen. Anomale Leitung kann daher in manchen Fällen an den beobachteten Erscheinungen mitbeteiligt sein, ohne eine ausreichende Erklärung zu liefern.

Die Annahme anomaler Vorgänge dielektrischer Natur (dielektrische Nachwirkung, Hysteresis) ist unzureichend in der Form, wie sie bei den Erscheinungen der magnetischen Hysteresis mit Erfolg verwendet wurde. Die von Pellat präzisierte Annahme einer dielektrischen Nachwirkung (viskosen Hysteresis), daß die dielektrische Verschiebung nach einem bestimmten einfachen Gesetz ihres zeitlichen Verlaufes einem der jeweiligen Feldintensität proportionalen stationären Endwert zustrebe $\left(\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = K\frac{d\mathfrak{E}}{dt} - \frac{d}{dt}[\mathfrak{D} - \varepsilon K\mathfrak{E}]\right)$, gibt im allgemeinen eine gute Annäherung an die beobachteten Erscheinungen, doch bleiben in einzelnen Punkten Differenzen zwischen Theorie und Beobachtung bestehen.

Es wird nun eine Modifikation dieser Theorie durchgeführt, die darin besteht, daß die dielektrische Verschiebung in eine

Summe beliebig vieler Glieder zerlegt wird, von denen jedes einzelne demselben einfachen Gesetz folgt wie nach der Pellatschen Theorie, doch unter Variation der in der Formel enthaltenen Parameter.

Es folgt eine Interpretation der dieser Theorie zu Grunde liegenden Annahmen vom molekularphysikalischen Standpunkt aus.

III. Experimentelle Untersuchungen der Rückstandsbildung mittels einer galvanometrischen Methode bestätigen und ergänzen die schon von anderen Autoren gefundenen Resultate bezüglich des zeitlichen Ganges der Rückstandsbildung, der Gültigkeit des Superpositionsprinzipes, des Einflusses der Temperatur und der Proportionalität zwischen Rückstandsstrom und Spannung.

An einem Beispiel wird gezeigt, wie aus zwei Konstanten, deren Werte aus der Untersuchung des Rückstandsstromes ermittelt wurden, die anderen Formen anomalen Verhaltens durch Angabe numerischer Werte dargestellt werden können.

Literatur.

I. Rückstand.

1. R. Kohlrausch, Pogg. Ann., *91*, 56 1854
2. W. v. Bezold, Pogg. Ann., *114*, 437 1861
3. A. Gaugain, Ann. chim. phys. (4), *2*, 276, 313 1864
4. R. Clausius, Abh. über mech. Wärmeth., II, 135 bis 162 1867
5. J. C. Maxwell, Treatise, I, 374 1873
6. A. Wüllner, Pogg. Ann., *153*, 22 1874
7. L. Boltzmann, Romich u. Nowack, diese Sitzungsberichte, *70*, 381 1874
8. B. Riemann, Ges. Werke, p. 48, 345, 353 1876
9. J. Hopkinson, Phil. Trans., *166*, 489 1876
10. — Phil. Mag. (5), *2*, 314 1876
    auch Proc. Roy. Soc., *25*, 496 . . . . 1876/77
11. — Phil. Trans., *167*, 599 . . . . 1877/78

12. A. Wüllner, Wied. Ann., *1*, 247 1877
13. H. A. Rowland, Americ. J. of Math., I, 53 1878
14. W. E. Ayrton und J. Perry, Proc. Roy. Soc., *27*, 238 .. 1878
15. W. Giese, Wied. Ann., *9*, 161 1880
16. H. A. Rowland und E. L. Nichols, Phil. Mag. (5), *11*, 414 1881
17. H. Hertz, Wied. Ann., *20*, 279 1883
18. C. Dieterici, Wied. Ann., *25*, 545 1885
19. A. Wüllner, Wied. Ann., *32*, 19 1887
20. L. Arons, Wied. Ann., *35*, 291 1888
21. J. Curie, Ann. chim. phys. (6), *18*, 203 1889
22. H. Muraoka, Wied. Ann., *40*, 328 1890
23. E. Bouty, C. R., *110*, 846, 1362 1890
auch Ann. chim. phys. (6), *27*, 62 1892
24. A. Hess, Lum. electr., *46*, 401, 507 1892
auch J. de Phys. (3), *2*, 145 1893
25. B. Dessau, Rend. R. Acc. d. Linc. (5), *2*, II, 86 1893
26. F. Bedell und C. Kinsley, Phys. Rev., *2*, 170 1894
27. R. Lombardi, Mem. R. Acc. Torino (2), *44* 1894
28. A. S. Dunstan, Electr. World, *26*, 3 1895
29. A. Hess, Eclair. electr., *4*, 205 1895
30. — Eclair electr., *7*, 450 1896
31. H. V. Carpenter, Phys. Rev., *4*, 238 1896
32. Th. Wulf, diese Sitzungsberichte, *105*, 667 1896
33. L. Houllevigue, J. de Phys. (3), *6*, 113, 120, 153 ... 1897
34. J. Hopkinson und E. Wilson, Proc. Roy. Soc., *60*, 425 1897
35. F. Hasenöhrl, diese Sitzungsberichte, *107*, 1035 ... 1898
36. H. A. Rowland und T. D. Penniman, J. Hopk. Un. Circ., *17*, 52 1898
37. A. Naccari, Atti Torino, *34*, 1088 1899
38. L. M. Potts, J. Hopk. Un. Circ., *18*, 59 1899
39. H. Pellat, C. R., *128*, 1312 1899
auch Ann. chim. phys. (7), *18*, 150 1899
40. L. M. Potts, J. Hopk. Un. Circ., *19*, 62 1900
41. H. Pellat, J. de Phys. (3), *9*, 313 1900
42. C. V. Drysdale, Electrician, *46*, 890 1901
43. A. W. Ashton, Phil. Mag. (6), *2*, 501 1901

44. J. Buchanan, Phil. Mag. (6), *3*, 240 1902
45. E. v. Schweidler, diese Sitzungsberichte, *111*, 573.. 1902
46. — diese Sitzungsberichte, *111*, 579 1902
47. U. Seiler, Mitt. Phys. Ges. Zürich, Nr. 3, 12 1902

II. Hysteresis.

1. W. Siemens, Pogg. Ann., *125*, 137 1864
2. A. Naccari und F. Bellati, J. de Phys. (2), *1*, 430 .. 1882
3. J. Borgmann, J. d. russ. phys. chem. Ges. (1), *18*, 6.. 1886
   auch J. de Phys. (2), *8*, 217 1888
4. J. Trowbridge und W. C. Sabine, Phil. Mag. (5), *30*, 323 1890
   auch Phys. Rev., *1*, 183 1892
5. — Rep. Brit. Ass. Leeds, 781 1890
6. C. P. Steinmetz, Electrician, *28*, 384, 408, 425, 602.. 1892
   auch Lum. electr., *44*, 95 1892
   auch Elektrotechn. Z. S., *13*, 227 1892
7. R. Arno, Rend. R. Acc. dei Linc., *1*, 284 1892
8. P. Janet, J. de Phys. (3), *2*, 337 1893
9. A. Hess, Lum. electr., *47*, 466 1893
   auch J. de Phys. (3), *2*, 145 1893
10. G. Benischke, diese Sitzungsberichte, *102*, 1345 ... 1893
11. A. Kleiner, Wied. Ann., *50*, 138 1893
12. C. Borel, C. R., *116*, 1192 1893
    auch Arch. de Genève (3), *30*, 45 1893
13. W. Weiler, Zeitschr. f. phys. u. chem. Unt., *7*, 1..... 1893
14. H. Fritz, Dissertation, Zürich 1893
15. R. Arno, Cim. (3), *33*, 15 1893
16. — Rend. R. Acc. dei Linc. (5), *2*, I, 341 1893
17. — » » » » » (5), *2*, II, 260 1893
18. — » » » » » (5), *3*, I, 585 1894
19. — » » » » » (5), *3*, II, 294 1894
20. A. Kleiner, Arch. de Genève (3), *32*, 282 1894
21. H. Düggelin, Vierteljahrschr. d. naturf. Ges. Zürich, *40*, 121 1895
22. A. W. Porter und D. K. Morris, Proc. Roy. Soc., *57*, 469 1895
23. A. Hess, Eclair. electr., *4*, 205 1895

24. G. Benischke, Zeitschr. für Elektrotechn., 1895, Heft 16 1895
25. H. Eisler, Zeitschr. für Elektrotechn., 1895, Heft 16 .. 1895
26. H. F. Weber, Arch. de Genève (4), *2*, 519 1896
27. R. Arno, Rend. R. Acc. dei Linc. (5), *5*, I, 262 1896
auch N. Cim. (4), *5*, 52 1896
28. A. Hess, Eclair. electr., *7*, 450 1896
29. L. Houllevigue, J. de Phys. (3), *6*, 120 1897
30. R. Threlfall, Phys. Rev., *4*, 457 1897
31. — Phys. Rev., *5*, 21, 65 1897
32. W. Schaufelberger, Dissertation, Zürich 1898
auch Wied. Ann., *65*, 635 1898
33. H. Pellat, C. R., *128*, 1312 1899
auch Ann. chim. phys. (7), *18*, 150 1899
34. W. Schaufelberger, Wied. Ann., *67*, 307 1899
35. E. B. Rosa und A. W. Smith, Phys. Rev., *8*, 1 1899
auch Phil. Mag. (4), *47*, 222 1899
36. F. Beaulard, C. R., *130*, 1182 1900
37. — J. de Phys. (3), *9*, 422 1900
38. H. Pellat und F. Beaulard, C. R., *130*, 1457 1900
39. — J. de Phys. (3), *9*, 313 1900
40. L. M. Potts; J. Hopk. Un. Circ., *19*, 62 1900
auch Phys. Zeitschr., *2*, 301 1900
41. P. L. Mercanton, Bull. soc. vaud., Oktober 1901
auch J. de Phys. (4), *1*, 33 1902
42. C. P. Steinmetz, Electric. World, *37*, 1065 1901
auch Eclair. electr., *29*, 27 1901
Electrician, *47*, 412 1901
Nat. Rundsch., *16*, 597 1901
43. W. E. Ayrton, Electrician, *46*, 476 1901
44. A. W. Ashton, Phil. Mag. (6), *2*, 501 1901
45. F. Maccarone, N. Cim. (5), *2*, 88 1901
auch Physik. Zeitschr., *3*, 57 1901
46. C. E. Skinner, Electr. Rev., *41*, 82 1902
47. F. Maccarone, N. Cim. (5), *4*, 313 1902
48. F. Beaulard, Congrès d'Angers de l'assoc. franc. pour l'avance des sciences 1903
auch Eclair. electr., *37*, 404 1903

49. J. Moscicki und M. Altenberg, Krak. Anz., 1904, 46 . . 1904
50. C. E. Guye und P. Denso, Arch. de Genève, *19*, 101 . . 1905
auch C. R., *140*, 433 1905
51. O. M. Corbino, N. Cim. (5), *9*, 81 1905
auch Physik. Zeitschr., *6*, 138 1905
52. V. v. Lang, diese Sitzungsberichte, *115*, 211 1906

III. Rotation und Drehmomente.

1. H. Hertz, Wied. Ann., *13*, 266 1881
2. G. Quincke, Wied. Ann., *59*, 417 1896
3. A. Heydweiller, Verh. phys. Ges. Berlin, *16*, 32 1897
4. A. Boltzmann, Wied. Ann., *60*, 399 1897
5. E. v. Schweidler, diese Sitzungsberichte, *106*, 526 . . 1897
6. A. Heydweiller, Wied. Ann., *69*, 531 1899
7. L. Graetz, Drude's Ann., *1*, 530 1900
siehe auch: Arno, II, 7, 15 bis 19, 27;
Weiler, II, 13;
Threlfall, II, 30, 31;
Schaufelberger, II, 32, 34;
v. Lang, II, 52.

IV. Anomale Leitung.

1. H. Hertz, Wied. Ann., *20*, 279 1883
2. G. Quincke, Wied. Ann., *28*, 529 1886
3. H. Koller, diese Sitzungsberichte, *98*, 201 1889
4. R. Appleyard, Phil. Mag. (5), *38*, 396 1894
5. — Phil. Mag. (5), *42*, 148 1896
6. A. Naccari, N. Cim. (4), *8*, 259 1898
7. E. v. Schweidler, diese Sitzungsberichte, *109*, 964 . . 1900
8. — Drude's Ann., *5*, 483 1901
9. H. Gädeke, Dissertation, Heidelberg 1901
10. E. v. Schweidler, diese Sitzungsberichte, *113*, 881 . . 1904
11. R. Appleyard, Phil. Mag. (6), *10*, 485 1905
12. P. Gouré de Villemontée, C. R., *141*, 179 1905

V. Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante von Ladungsdauer oder Wechselzahl.

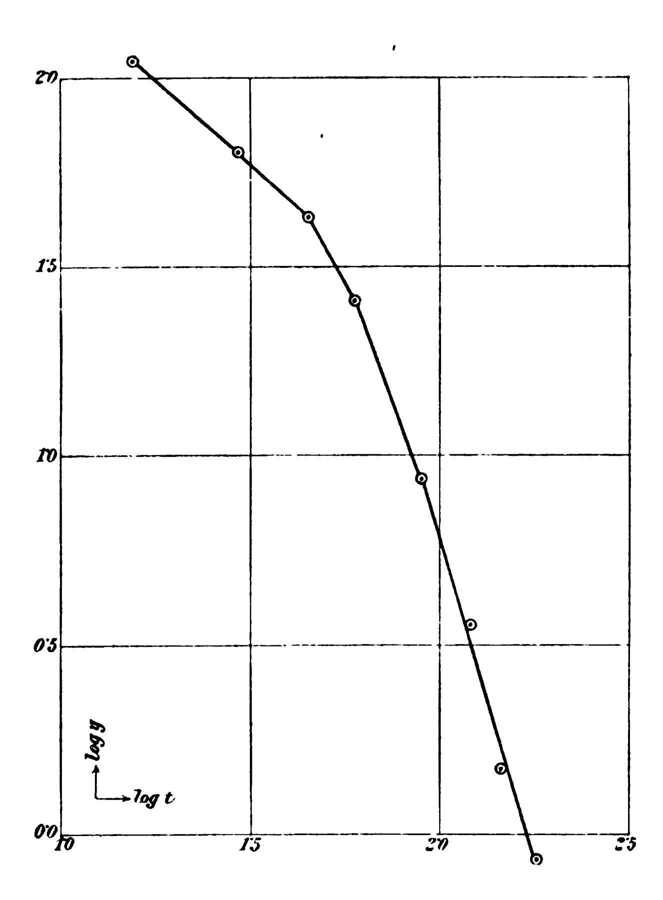
1. N. Schiller, Pogg. Ann., *152*, 555 1872
2. L. Boltzmann, diese Sitzungsberichte, *67*, 17 1873

3. L. Boltzmann, diese Sitzungsberichte, *68*, 81 1873
4. — diese Sitzungsberichte, *70*, 307 1874
5. J. J. Thomson, Proc. Roy. Soc., *46*, 292 1889
6. E. Lecher, diese Sitzungsberichte, *99*, 480 1890
auch Wied. Ann., *42*, 142 1891
7. R. Blondlot, C. R., *112*, 1058 1891
8. L. Arons und H. Rubens, Wied. Ann., *42*, 581 1891
9. — — Wied. Ann., *44*, 206 1891
10. A. Perot, C. R., *115*, 38, 165 1892
11. J. Sahulka, diese Sitzungsberichte, *102*, 773 1893
12. D. Mazotto, Rend. R. Acc. dei Linc. (5), *4*, I, 240.... 1893
13. B. W. Stankewitsch, Wied. Ann., *52*, 700 1894
14. L. Graetz und L. Fomm, Münch. Ber., *24*, 184..... 1894
auch Wied. Ann., *54*, 626 1895
15. F. Beaulard, C. R., *119*, 268 1894
16. C. Heinke, Wied. Ann., *54*, 577 1895
17. E. Northrup, Phil. Mag. (5), *39*, 78 1895
18. D. Mazotto, N. Cim. (4), *1*, 308 1895
19. A. Lampa, diese Sitzungsberichte, *105*, 587, 1049... 1896
auch Wied. Ann., *61*, 79 1897
20. E. S. Ferry, Phil. Mag. (5), *44*, 404 1897
21. P. Drude, Zeitschr. f. phys. Chemie, *23*, 267 1897
22. J. Hanauer, Wied. Ann., *65*, 577 1898
23. E. Marx, Wied. Ann., *66*, 411 1898
24. W. G. Hormell, Phil. Mag. (6), *3*, 52 1902
25. J. Kosogonoff, Phys. Zeitschr., *3*, 207 1902
26. A. de Forest Palmer, Phys. Rev., *16*, 267 1903
27. H. C. Parker, Ann. New York Ac., *15*, 161 1904

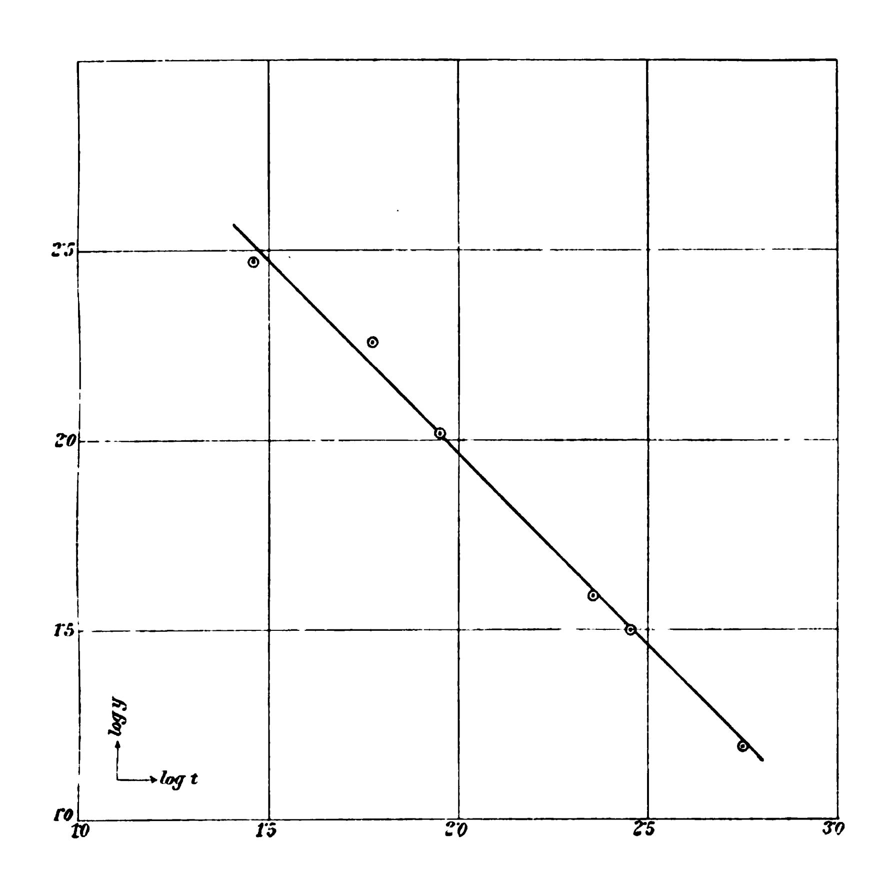
VI. Varia.

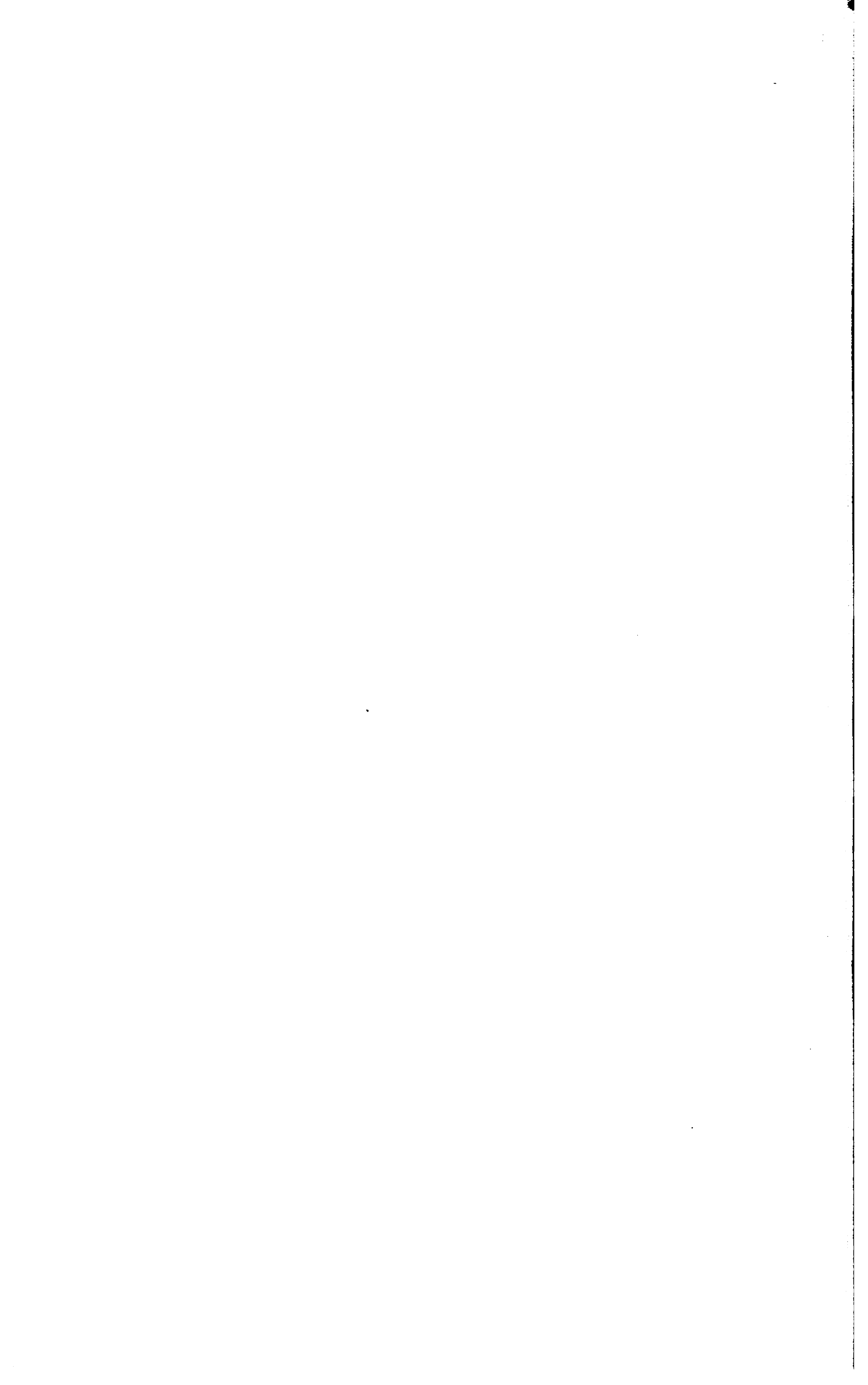
1. E. Root, Pogg. Ann., *158*, 1, 425 1876
2. M. v. Hoor, Elektrotechn. Zeitschr., *22*, 170, 187, 213,
716, 749, 781 1901
3. K. Germanischskaja, Dissertation, Zürich........ 1903
4. V. Cremieu und L. Malcles, C. R., *139*, 790....... 1904

Tafel I zu Versuchsreihe 1, Petroleumkondensator.

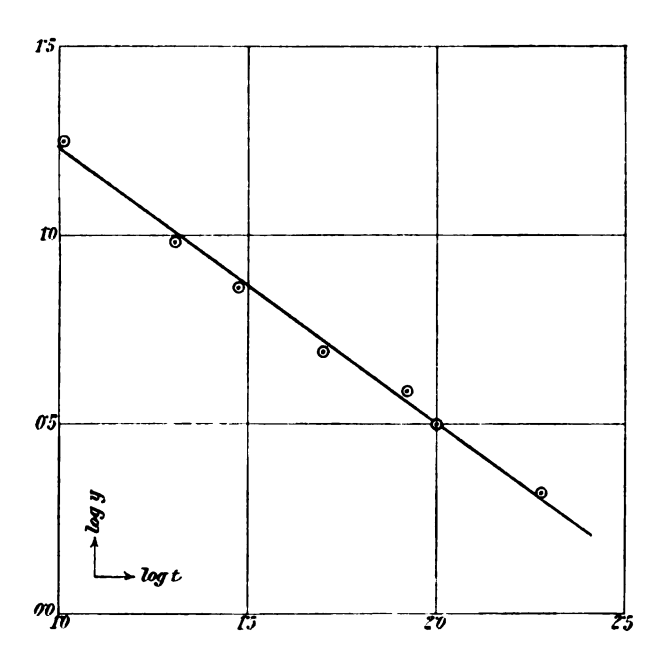


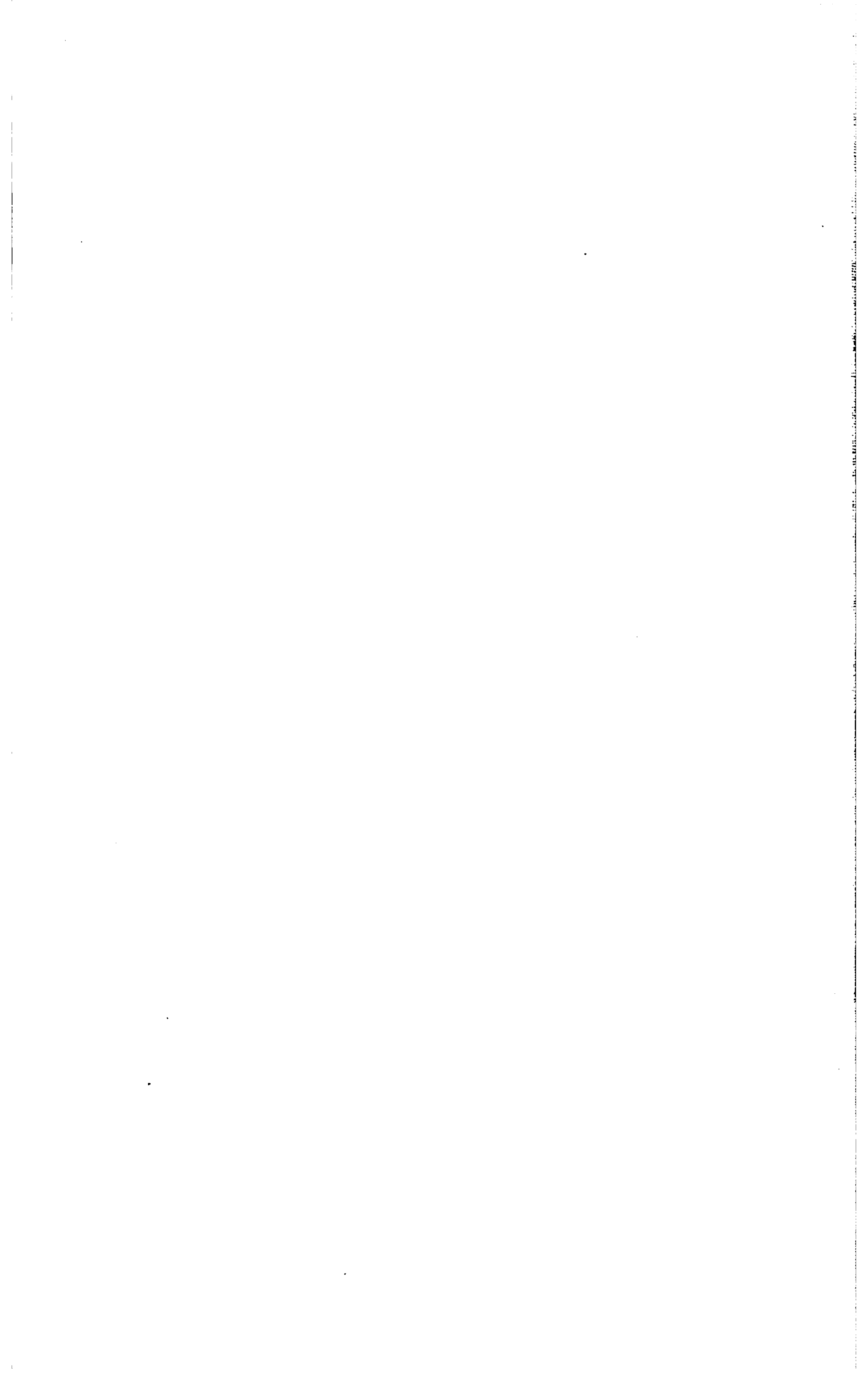
Tafel II zu Versuchsreihe 2, Toluolkondensator.



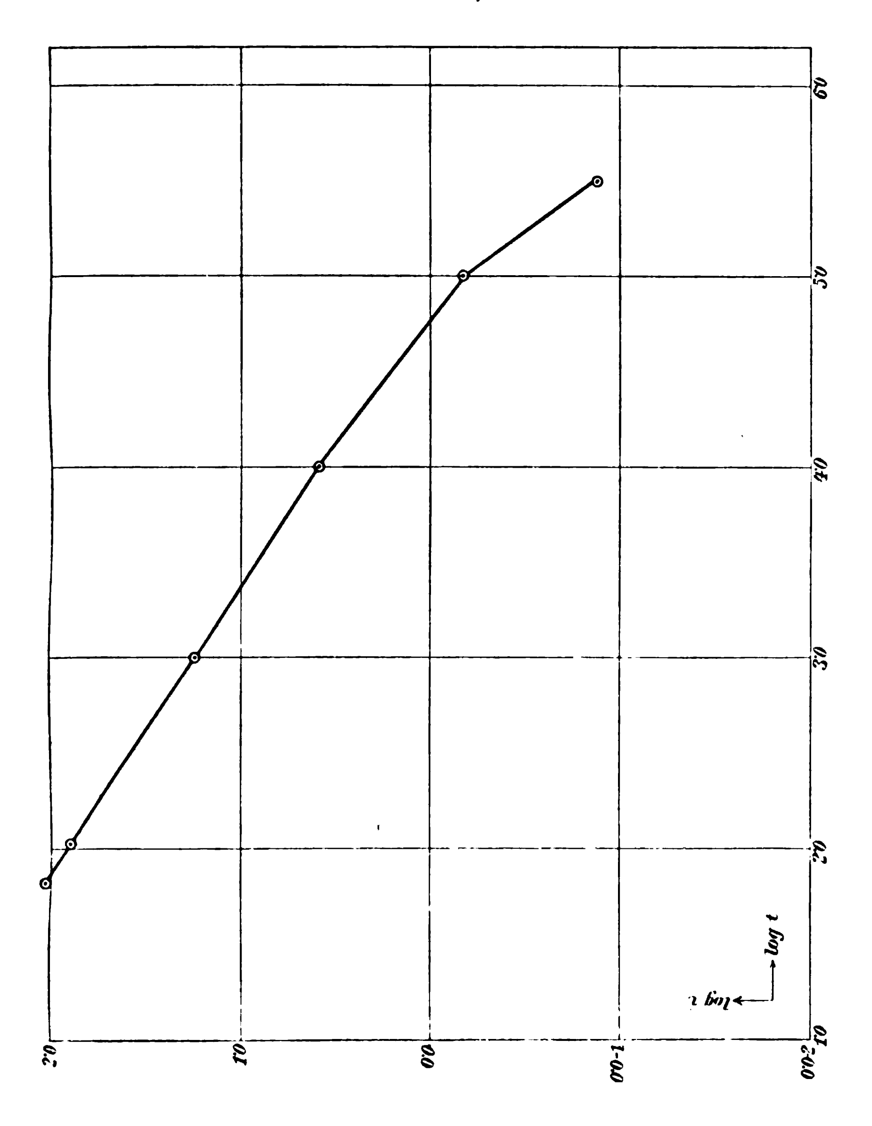


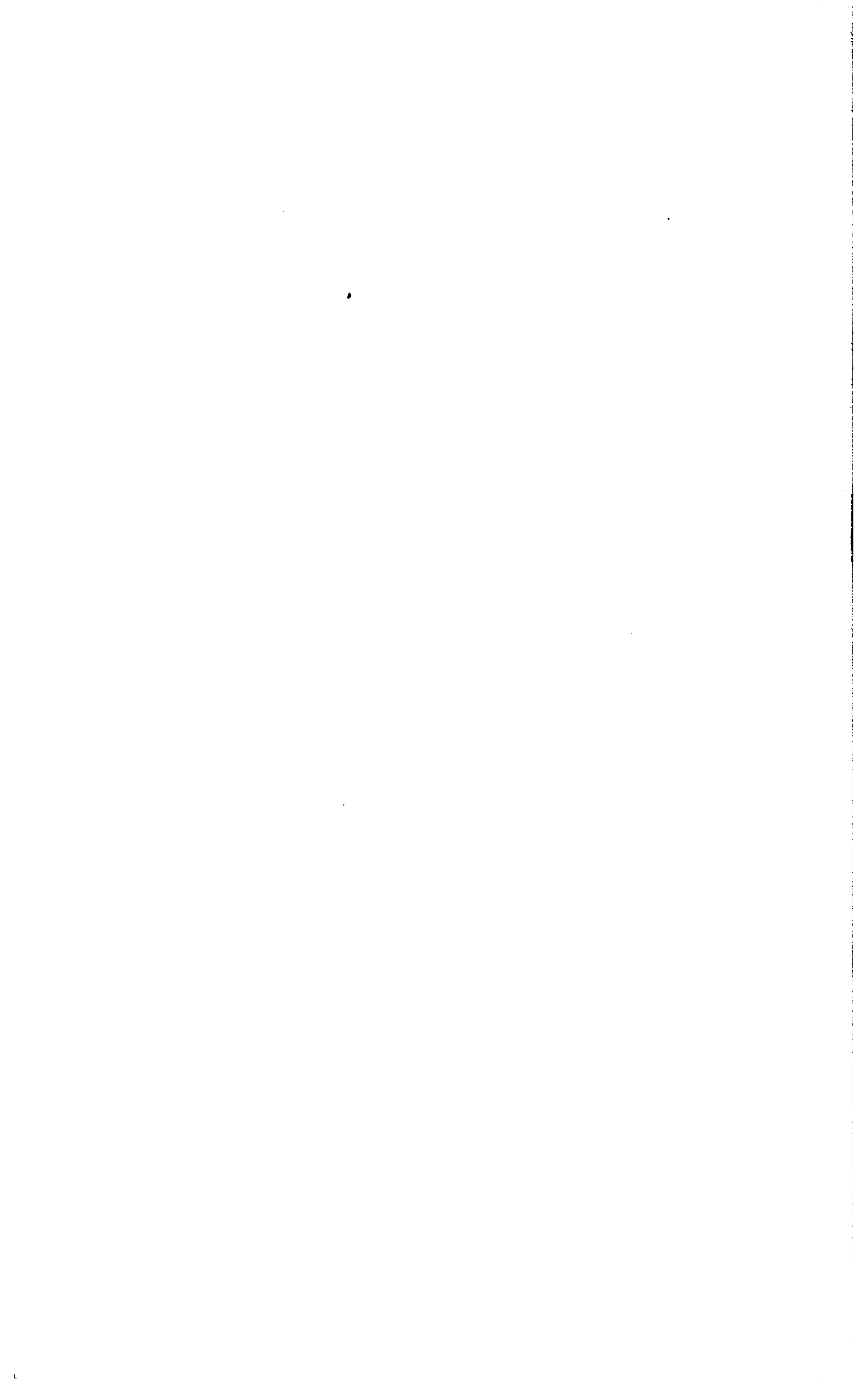
Tafel III zu Versuchsreihe 3, Glaskondensator.



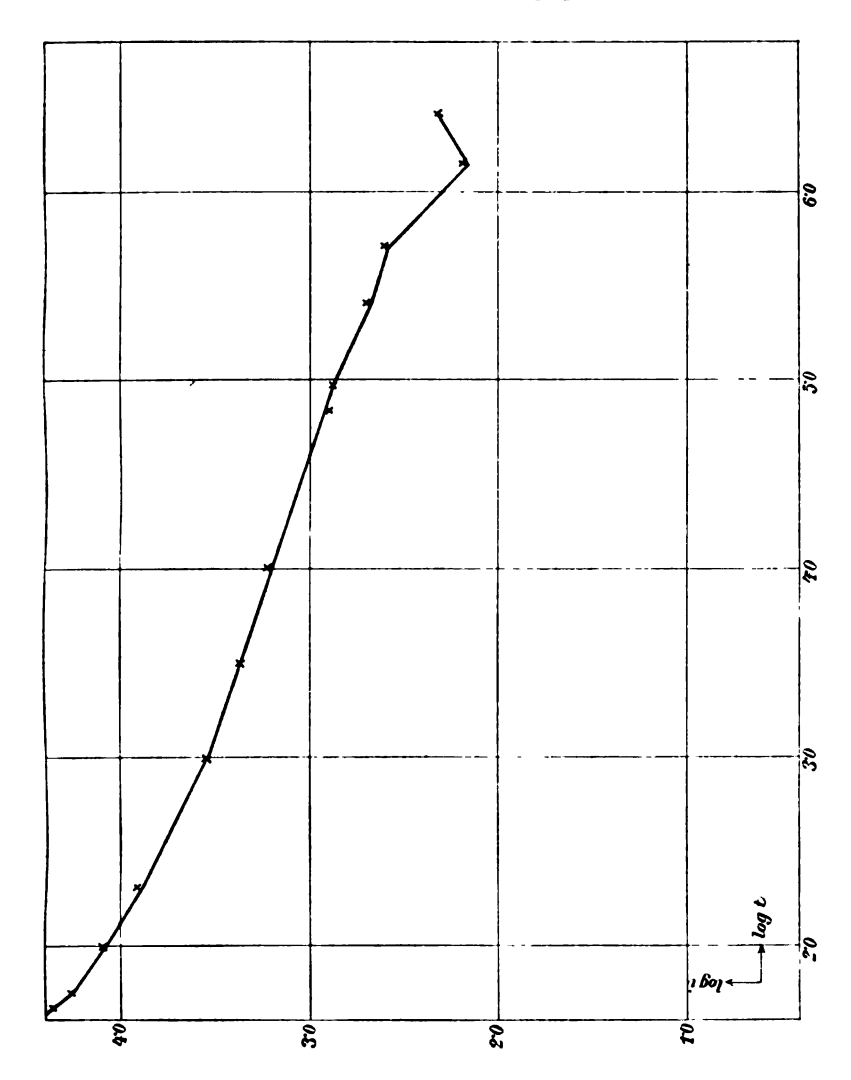


Tafel IV zu Versuchsreihe 4, Glimmerkondensator.

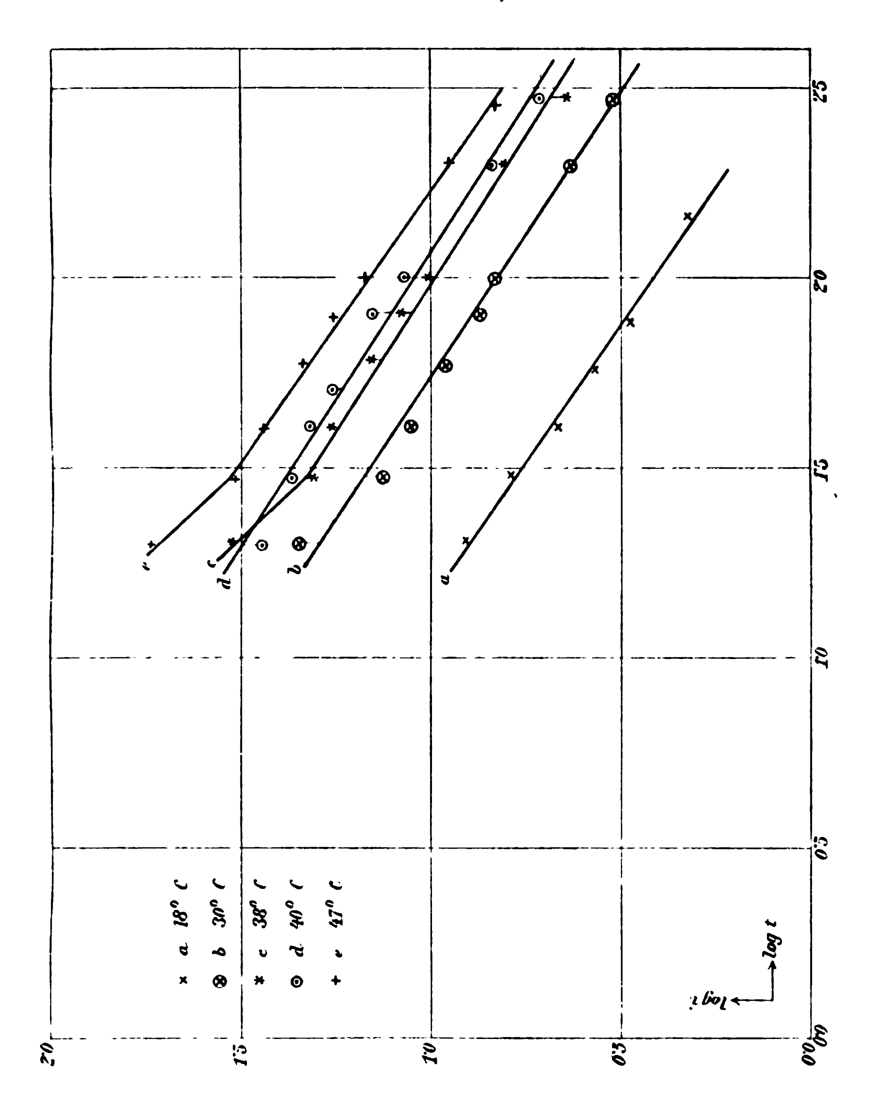


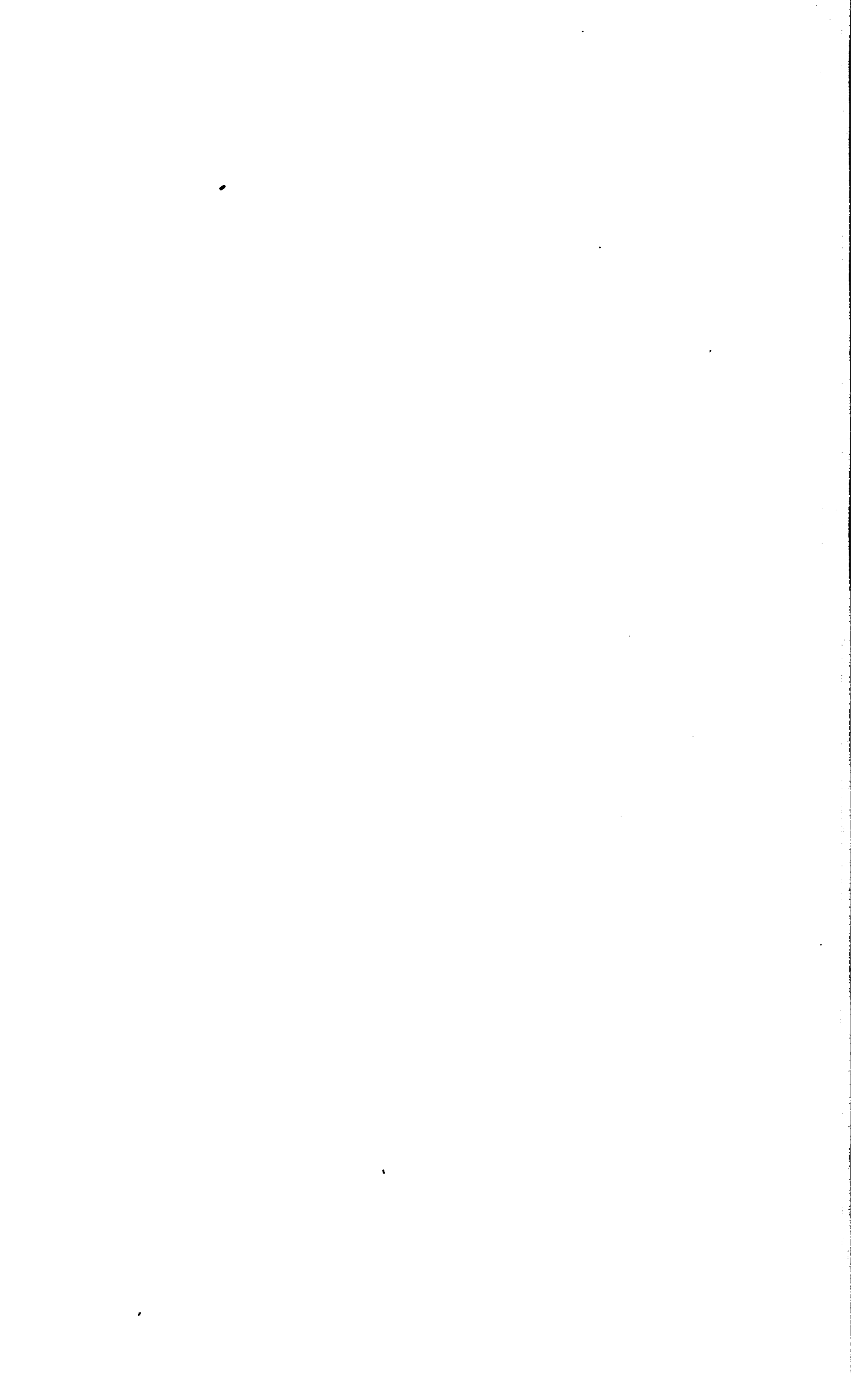


Tafel V zu Versuchsreihe 5, Paraffinpapierkondensator.

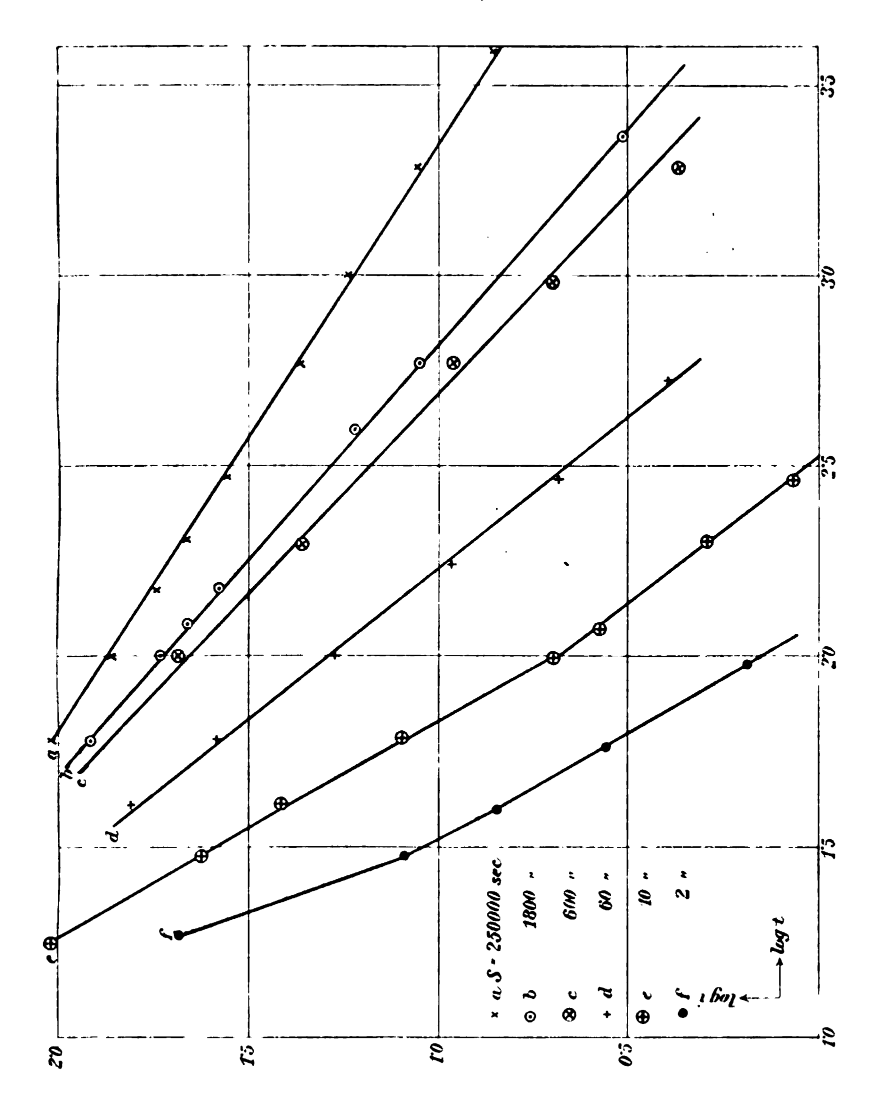


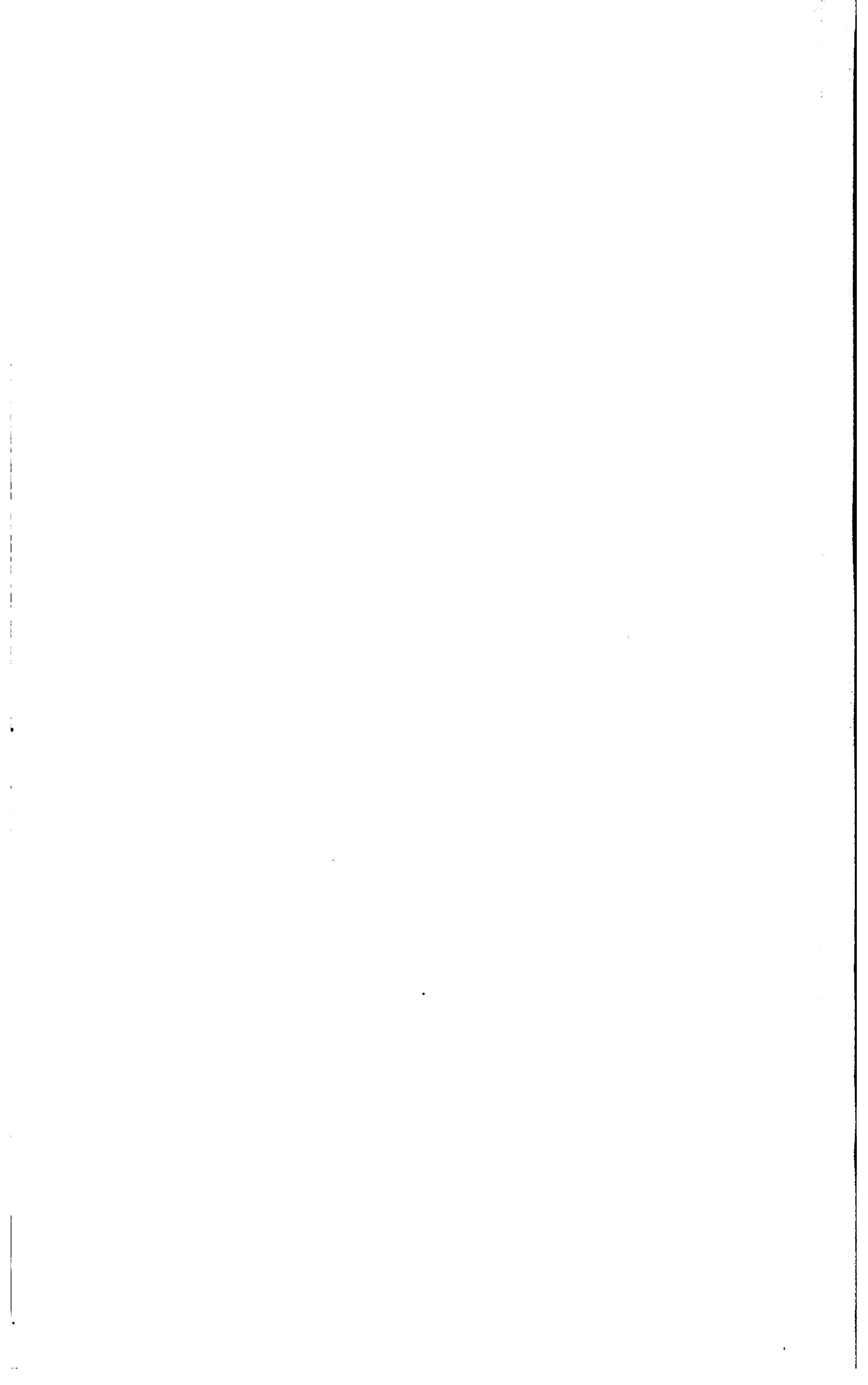
Tafel VI zu Versuchsreihe 6, Glaskondensator.





Tafel VII zu Versuchsreihe 7, Glimmerkondensator.





Grundzüge zu einer Theorie der Explosionen

von

Dr. **Heinrich Mache.**

Aus dem physikalischen Institute der Universität Innsbruck.

(Mit 6 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Juli 1907.)

Strömt ein homogenes Knallgas, etwa ein Leuchtgas-Luft-Gemisch, aus einer zylindrischen Röhre aus und wird es entzündet, so hat die Brennfläche die Form eines Kegels, wie wir ihn an jedem Bunsenbrenner beobachten können. Es ist dies die innere, je nach dem Mischungsverhältnis grün bis violett leuchtende Fläche, in der sich das zuströmende Knallgas entzündet und in der brennendes und unverbranntes Gas sozusagen unvermittelt aneinander grenzen.[1] Auf der einen Seite dieser Fläche herrscht die Entzündungstemperatur, auf der anderen Seite die hohe Verbrennungstemperatur. Da hier unmittelbar nach der Entzündung die Wärmeverluste an die Umgebung sich noch nicht geltend gemacht haben, so bezeichnet diese Seite der Brennfläche zugleich die heißeste Stelle der Flamme.

Der Öffnungswinkel 2γ des Brennkegels (Fig. 1) steht nun in einfacher Beziehung zur Strömungsgeschwindigkeit und der zur Brennfläche normalen Explosionsgeschwindigkeit des Knallgases. Ist u die erstere, so ist ihre Projektion auf die

---

[1] Der Übergang von der Entzündungs- zur Verbrennungstemperatur erfolgt in außerordentlich kurzer Zeit. Vergl. darüber z. B.: B. Hopkinson, Proc. Roy. Soc., 77, p. 387 (1906).

zur Kegelfläche errichtete Normale NN' gleich der normalen Explosionsgeschwindigkeit c. Daher ist auch $c = u \sin\gamma$. Ersichtlich kann man durch Beobachtung von u und γ das c angenähert bestimmen.[1] Derartige Messungen ergeben nun das überraschende Resultat, daß diese normale Explosionsgeschwindigkeit verhältnismäßig sehr gering ist und z. B. bei der explosibelsten Leuchtgas-Luft-Mischung $0\cdot5 \frac{m}{\mathrm{sec}}$, bei der explosibelsten Wasserstoff-Sauerstoff-Mischung $10 \frac{m}{\mathrm{sec}}$ nicht übersteigt.

Mit diesem Ergebnis stehen eine Reihe von Tatsachen scheinbar im Widerspruch. Erstens ist es ja bekannt, mit welcher außerordentlichen Heftigkeit Gasexplosionen im allgemeinen in größeren Räumen verlaufen und daß die Schnelligkeit, mit der sich hiebei die Entzündung fortpflanzt, die oben gegebenen Werte bedeutend übertrifft.

Zweitens haben die Messungen von Berthelot, von Mallard und Le Chatelier und von Dixon direkt gezeigt, daß sich die Flamme in mit Knallgas gefüllten Röhren, an deren einem Ende die Entzündung eingeleitet wurde, von da mit zuerst rasch anwachsender, später konstant werdender Geschwindigkeit bewegt und daß diese schließlich erreichte Endgeschwindigkeit, die Geschwindigkeit der »Explosionswelle«, um vieles größer ist als die oben gegebenen Zahlen. Selbst bei Gemengen von relativ geringer Explosibilität trifft dies zu, in besonders hohem Maße aber bei den Gemengen höherer Explosibilität, für welche die Arbeiten der genannten Forscher zu dem bemerkenswerten Ergebnis führten, daß sich hier die in der Röhre schließlich erlangte Geschwindigkeit der Flamme außerordentlich an die Molekulargeschwindigkeit, also auch an die Schallgeschwindigkeit, wie sie in dem brennenden Gasgemisch herrscht, annähert. Diese zuletzt erwähnte Gesetzmäßigkeit scheint nicht nur für gasförmige, sondern auch für

[1] Auf die korrektere Methode von Gouy-Michelson zur Bestimmung der normalen Explosionsgeschwindigkeit, welche auch für nicht kegelförmige Brennflächen gilt, werden wir später zu sprechen kommen.

flüssige und feste Explosivstoffe zu bestehen. Wenigstens haben Untersuchungen Berthelot's an einigen dieser Körper zu Zahlen geführt, welche eine derartige Deutung zulassen.[1]

Eine dritte Erscheinung, welche gleichfalls auf Grund der geringen normalen Explosionsgeschwindigkeit nicht erklärt werden kann, ist die in die Theorien der inneren Ballistik von manchen Autoren eingeführte sogenannte »äußere Entzündung«. Wird kolloidales Pulver mit würfel- oder röhrenförmigem Korn an einer Stelle entzündet, dann pflanzt sich zunächst die Entzündung so gut wie momentan über die Oberflächen aller Würfel oder Röhren fort, aus denen die Ladung besteht, um dann erst, ungleich langsamer, senkrecht gegen die Oberfläche in das Innere des Kornes vorzudringen. In der Tat brennt das Pulver in äquidistanter Fläche ab, so daß die Kornform gewahrt bleibt: Würfel bleibt Würfel, Röhre bleibt Röhre. Der Beweis wurde erbracht durch die Beobachtung erloschener Reste und eine Bestätigung liegt auch darin, daß die Verbrennungsdauer des Korns der Korndicke proportional ist.[2] Ein derartiges Verhalten ist nur möglich, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Explosion von einem Korn zum anderen, also die Oberflächengeschwindigkeit der Explosion, groß ist gegenüber der Verbrennungsgeschwindigkeit des Korns, d. h. also gegenüber der Geschwindigkeit, mit der die Explosion senkrecht zur Brennfläche fortschreitet.

Angesichts der erwähnten Tatsachen drängt sich nun die Frage auf, wie es möglich ist, daß ein und derselbe Verbrennungsprozeß das einemal mit relativ kleiner, das anderemal mit so großer Geschwindigkeit in die unverbrannte Substanz fortgeleitet wird.

In den folgenden Ausführungen wird versucht, diese Frage zu beantworten. Hiebei beschränken wir uns auf den Fall, daß die Verbrennung offen, also unter normalem Luftdruck vor sich geht. Im geschlossenen Gefäße wird durch den steigenden Druck sowohl das Flammengas wie der Explosivkörper adia-

---

[1] Vergl. darüber: Nernst, Theoretische Chemie, 2. Aufl., p. 626.

[2] C. Cranz, Ballistik, p. 257; Enzyklopädie der mathem. Wiss., IV_2, Heft 2 (1903).

batisch komprimiert und hiedurch einerseits die Verbrennungstemperatur erhöht, andrerseits die noch nicht entzündete Masse vorgewärmt. Aus beiden Gründen steigt die Explosionsgeschwindigkeit. Bei offener Flamme hingegen kann ein derartiger Effekt nur eintreten, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Explosion die Schallgeschwindigkeit übersteigt. Bis zu dieser Grenze bestimmen chemische Natur und Anfangstemperatur der explosiblen Substanz eindeutig diese Größe.

Kehren wir jetzt zur Betrachtung des Flammenkegels zurück, der sich in einem durch eine zylindrische Röhre strömenden, homogenen Knallgas stationär erhält. Auch hier können wir ersichtlich zwei verschiedene Explosionsgeschwindigkeiten unterscheiden. Zunächst erfolgt senkrecht zur Brennfläche die Fortleitung der Explosion mit der normalen Explosionsgeschwindigkeit c. Diese, unter der Strömungsgeschwindigkeit des Knallgases liegend, wäre aber allein nicht im stande, den Brennkegel stationär zu erhalten; denn sie treibt ihn nur mit der Geschwindigkeit $u \sin^2 \gamma$ der Strömung entgegen. Es würde sich also die Flamme vom Brennerrohr abheben und erlöschen. Da dies nicht eintritt, sind wir zur Annahme gezwungen, daß sich die Basis des Kegels mit der Geschwindigkeit $C = u$ der Strömung entgegen bewegt, d. h. daß am Rande der Brennfläche, etwa unter dem Winkel γ gegen diese, sich die Explosion mit der Geschwindigkeit der Strömung in das unverbrannte Gasgemisch fortpflanzt. Es ist einleuchtend, daß dann auch die übrigen Teile der Brennfläche stationär erhalten bleiben werden, indem sie sich jederzeit im selben Maße, in dem sie von der

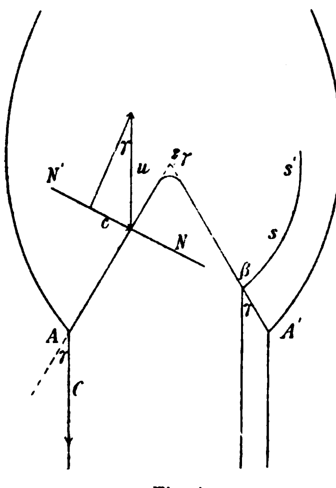


Fig. 1.

Strömung in die Höhe getragen werden, vom stationären Rande der Brennfläche her ergänzen.[1]

In der Tat wird sich ja doch ein in *A* befindliches Flammenteilchen, durch die Strömung und die normale Explosionsgeschwindigkeit getrieben, längs der Mantelfläche des Kegels bewegen müssen.

Steigert man die Strömungsgeschwindigkeit, so wird der Brennkegel steiler und höher, bis er bei einem vom Mischungsverhältnis abhängigen, kritischen Werte sich vom Brennerrohr abhebt und erlöscht. Indem sich also der Rand des Kegels unter immer spitzerem Winkel gegen das zuströmende Gas einstellt, erhält er zunächst die Fähigkeit, mit der jeweiligen Strömungsgeschwindigkeit dem Gasstrom entgegenzueilen und sich so stationär zu erhalten. Erhöht man aber die Strömungsgeschwindigkeit bis zum Erlöschen der Flamme, so bezeichnet dieser Wert den Maximalwert C_{Max}, mit dem die Explosion vom Rande der Brennfläche aus in das Gas vordringen kann und der Winkel, den jetzt die Brennfläche mit der Strömungsrichtung einschließt, diejenige Richtung, in welcher die Explosion mit diesem Maximalwerte fortschreitet. Als minder wesentlich sei hier nur kurz bemerkt, daß der Winkel an der Basis des Kegels sich nicht genau mit dem halben Öffnungswinkel γ deckt. Er ist vielmehr stets größer, schon deshalb, weil die Brennfläche an der Basis eine Verbiegung aufweist, die hauptsächlich dadurch bestimmt ist, daß dort in der Nähe der Wand die Strömungsgeschwindigkeit infolge der Reibung geringer ist.[2]

---

[1] Das Knattern der Flamme kurzröhriger Bunsenbrenner rührt von dieser fortwährend vom Rande aus erfolgenden Neuentzündung her.

[2] Es ist wohl bekannt, daß es gleichfalls unwesentlich ist, daß wir uns den Brennkegel am Ende des Brennerrohres aufsitzen denken. Kegel von gleicher Form lassen sich auch im Rohre oder in kleiner Entfernung über dem Rohre erhalten. Um die Flamme ins Rohr zu bringen, ist es nur nötig, das Ende von außen, etwa mit einer Stichflamme, anzuheizen. Der Kegel zieht sich, nach kurz dauerndem Vibrieren zwischen den beiden Lagen, hinein und wandert dann in dem Maße, in dem das Rohr von ihm selbst erhitzt wird, langsam nach unten. Auch über dem Rohre läßt sich der Flammenkegel, etwa auf einem Ring aus Platindraht von der gleichen Öffnung wie das Brennerrohr aufsitzend, erhalten.

Im folgenden werden zunächst einige Bestimmungen der Größe C_{Max} für ein Leuchtgas-Luft-Gemisch mitgeteilt, die gemäß den obigen Ausführungen in der Weise erhalten wurden, daß man die Geschwindigkeit des Knallgasstromes beobachtete, die gerade hinreichte, um die Flamme zu erlöschen. Der Durchmesser des verwendeten Brennerrohres betrug 0·765 *cm*, seine Länge 85 *cm*. An ihm war unten ein weiteres Rohr angesetzt, das als Mischkammer diente. Die Luft wurde einem mit Gewichten belasteten Glockengasometer entnommen, der im Gasometer vorhandene Druck mit einem Manometer beobachtet, das ausgetretene Luftquantum aus dem Sinken der Gasometertrommel unter Voraussetzung isothermer Ausdehnung berechnet. Das Leuchtgas[1] wurde direkt aus der Leitung zugeführt, das Quantum vermittels einer mehrmals kubizierten und mit Manometer versehenen Präzisionsgasuhr bestimmt. Es war nach dem Passieren der Gasuhr mit Wasserdampf so gut wie gesättigt, hingegen hatte die Luft, da sie dem Gasometer unmittelbar nach der Füllung entnommen wurde, nur den geringen Feuchtigkeitsgehalt der Luft des Beobachtungsraumes.

Die folgende Tabelle enthält in der ersten Spalte den Prozentgehalt der Mischung an Leuchtgas, in der zweiten die (nach der Gouy'schen Methode gemessene) normale Explosionsgeschwindigkeit c, in der dritten die Strömungsgeschwindigkeit, bei welcher das Abreißen der Flamme erfolgte, also diejenige Größe, die nach den obigen Ausführungen mit der maximalen Explosionsgeschwindigkeit C_{Max} identisch ist. In der vierten Spalte ist der Quotient $\frac{C_{\text{Max}}}{c}$ gegeben.

%	$c\,\frac{cm}{\text{sec}}$	$C_{\text{Max}}\,\frac{cm}{\text{sec}}$	$\frac{C_{\text{Max}}}{c}$
10·53	19·9	107	5·4
11·56	23·2	222	9·6
12·14	25·0	433	17·3
14·39	32·2	559	17·4
14·72	33·2	653	19·7
15·26	34·9	733	21·0
15·62	36·1	880	24·4

[1] Der Heizwert des zu diesen Messungen verwendeten Leuchtgases betrug rund 4900 Cal.

Wir sehen aus diesen Zahlen, daß selbst bei den im Vergleiche zu anderen explosiven Mischungen relativ wenig explosiblen Leuchtgas-Luft-Gemengen die maximale Explosionsgeschwindigkeit die normale um vieles übertrifft. Auch sieht man, daß mit wachsendem Leuchtgasgehalt und gleichzeitig steigender Explosibilität der Wert C_{Max} etwa linear, der Quotient $\frac{C_{Max}}{c}$ hingegen zuerst schnell, später langsamer anwächst.

Der geringe Gasdruck in der Leitung gestattete nicht, den Prozentgehalt des Leuchtgases in der Mischung noch weiter zu erhöhen und so den Höchstwert der maximalen Explosionsgeschwindigkeit zu bestimmen, der offenbar erst in der explosibelsten Mischung, die nahe bei 17 % Leuchtgasgehalt liegt,

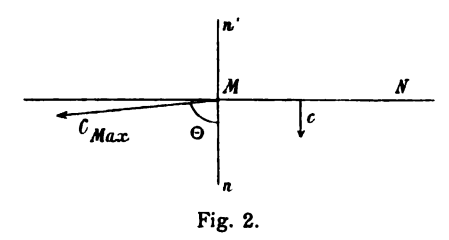


Fig. 2.

erreicht worden wäre. Falls eine Extrapolation gestattet ist, so würde aus ihr folgen, daß dieser Höchstwert $10 \frac{m}{\text{sec}}$ nicht wesentlich übersteigt.

Fassen wir das bisher Gesagte zusammen, so kommen wir zu der folgenden Vorstellung über das Fortschreiten einer auf einer Fläche in einem homogenen Explosivkörper eingeleiteten Verbrennung: Ist MN diese Fläche, so pflanzt sich in ihren mittleren Partien die Explosion in der Richtung der zur Fläche errichteten Normalen mit der Geschwindigkeit c fort. Am Rande der Fläche hingegen ist die Explosion auch seitlich gerichtet und ihre Geschwindigkeit erreicht da in einer bestimmten, etwa durch den Winkel Θ gegebenen Richtung einen Maximalwert C_{Max}, der c um vieles übertrifft.

Um dieses polare Verhalten im Fortschreiten der Brennfläche zu begründen, wollen wir uns wieder der schon früher

eingeführten[1] Vorstellung bedienen, daß die Fortpflanzung der Verbrennung im Wesen ein Wärmeleitungsprozeß ist, d. h. daß die Entzündung der Gasschichten, welche der Brennfläche anliegen, dann erfolgt, wenn sie durch Wärmeleitung bis zur Entzündungstemperatur erhitzt sind. Hiebei wird der durch Strahlung übergeführte Wärmebetrag vernachlässigt, eine Vernachlässigung, die bei gasförmigen Explosivstoffen mit hinreichender Annäherung, bei flüssigen oder festen Explosivstoffen vollkommen zutrifft. Die verschieden geschwinde und verschieden gerichtete Fortpflanzung der Entzündung senkrecht und schräg zum Rande der Brennfläche muß dann durch Verschiedenheit in der Intensität des Wärmestromes nach beiden Richtungen begründet sein und wir werden im folgenden versuchen, diese Verschiedenheit molekularmechanisch zu erläutern.

Bedienen wir uns zunächst einer in der Flamme selbst auftretenden hydrodynamischen Analogie:

Tritt ein Knallgasstrom vom Querschnitt q senkrecht in die Brennfläche XY etwa mit der Geschwindigkeit c, so muß der Kontinuität halber diese Strömungsgeschwindigkeit nach dem Passieren der Brennfläche um so viel gesteigert sein, daß $q\rho c = q\rho' c'$ ist, wenn ρ' und c' Dichte und Strömungsgeschwindigkeit des brennenden Gases bezeichnen, also des Gases nach dem Passieren der Fläche XY. Bei der in der Brennfläche vor sich gehenden Reaktion zwischen Sauerstoff und Brennstoff und der hiedurch gleichzeitig eintretenden Temperaturerhöhung und Verdünnung des Gases wird somit der neugebildeten Molekel eine gegenüber der Bewegung der Komponenten erhöhte translatorische Bewegung verliehen, die in der Richtung der Z-Achse ihren Maximalwert erreicht und eine erhöhte molare Strömung veranlaßt.

Ganz analog ist der Vorgang für den Fall, daß der Knallgasstrom mit der zur Brennfläche errichteten Normalen NN' einen Winkel α einschließt. Auch hier wird aus Gründen der Kontinuität die Strömungsgeschwindigkeit von einem Werte c

[1] H. Mache, diese Sitzungsber., 108, p. 1152 (1899).

auf einen Wert c' erhöht werden, welcher jetzt der Gleichung $\cos \alpha q \rho c = \cos \beta q \rho' c'$ entspricht, wobei wir β den Winkel nennen, welchen die Richtung des Gasstromes nach dem Passieren der Brennfläche mit der Flächennormalen einschließt. Außerdem ist es aus dem oben Gesagten einleuchtend, daß diese Geschwindigkeitserhöhung nur die auf XY senkrechte Komponente von c betrifft, während die zu ihr parallele erhalten

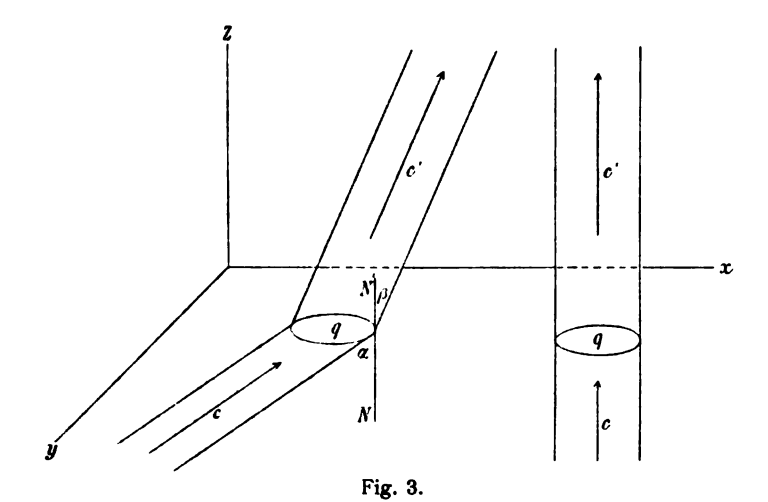


Fig. 3.

bleibt. Somit ist auch $c \sin \alpha = c' \sin \beta$. Aus der Vereinigung beider Gleichungen ergibt sich die Beziehung $\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}$. Der die Flamme speisende Gasstrom wird also durch den in der Brennfläche eingeleiteten und sich dort auch nahezu momentan vollziehenden Prozeß der Verbrennung in der Richtung des zur Brennfläche errichteten Lotes abgelenkt.

Man kann dieses Verhalten nach Gouy[1] an jedem Bunsenbrenner demonstrieren, wenn man die Strömungsfäden durch dem Gasgemisch beigemengten feinen Kohlenstaub sichtbar macht. Die in der Brennfläche lebhaft aufleuchtenden Partikel bewegen sich dann durch den Flammenmantel in einer Bahn ss' (siehe Fig. 1), die auf der Brennfläche unter einem Winkel β

---

[1] Ann. chim. phys. (5), 18, p. 27 (1879).

ansetzt, der stets den Winkel γ in Größe übertrifft. Man erkennt auch bei der Betrachtung der Erscheinung leicht, daß die Bahn der Teilchen mit der äußeren Kontur des Flammenmantels parallel verläuft. In der Tat verdankt ja diese äußere Begrenzung derselben ablenkenden Ursache ihre Form. Man kann daher den Winkel β auch ohne Zuhilfenahme der aufleuchtenden Partikel bei A oder A' am Saume des Flammenmantels messen und dann die obige Beziehung dazu benützen, um das Dichtenverhältnis $\frac{\rho}{\rho'}$ zu bestimmen.

In der folgenden Tabelle werden einige für dieses Verhältnis an Leuchtgas-Luft-Gemischen ermittelte Werte mitgeteilt. Verwendet wurde hiebei ein Brennerrohr von 0·81 *cm* Durchmesser und 120 *cm* Länge. Die Messung der Gasströme erfolgte in der bereits oben beschriebenen Weise. Das Ausmessen des Winkels β geschah an photographischen Bildern der Flamme. Hiebei war nur eine Schwierigkeit zu überwinden, die darin bestand, daß Flammen, die mit einem Überschusse von Luft brennen (in unserem Falle Flammen mit einem Leuchtgasgehalt unter 17%), also oxydierende Flammen, nur Rudimente des Flammenmantels zeigen und schließlich nur aus dem Brennkegel allein bestehen. Doch gelang es leicht, auch hier den Flammenmantel sichtbar zu machen und zu photographieren, wenn man in das Knallgas Kupferchloridpulver oder gemahlenen Flußspat einführte.

%	$c \frac{cm}{sec}$	γ	β	$\frac{tg\,\beta}{tg\,\gamma} = \frac{\rho}{\rho'}$
13·17	28·3	4° 5′	7° 40′	1·9
15·24	34·9	5 30	14 40	2·7
17·05	40·6	7 0	25 25	3·9
18·57	38·4	6 55	24 15	3·7
18·79	35·7	6 40	25 35	4·1
20·47	32·5	6 20	25 15	4·3
21·71	27·3	5 35	24 25	4·6
23·06	19·3	4 5	15 50	4·0

Die Zahlen der letzten Spalte geben das Verhältnis zwischen der Dichte des auf Entzündungstemperatur gebrachten Knallgases und des brennenden Flammengases. Man sieht, daß diese Größe mit steigendem Leuchtgasgehalt zu einem Maximum anwächst und dann wieder sinkt. Das Maximum entspricht aber nicht dem bei 17 % liegenden Maximum der Explosibilität, sondern tritt erst bei einer an Leuchtgas reicheren Mischung ein.

Weiter beweisen diese Zahlen, daß in der Brennfläche nicht nur zwei Gasschichten sehr verschiedener Temperatur, sondern auch sehr verschiedener Dichte aneinander liegen: auf der einen Seite das dichte, noch nicht entzündete, aber auf der Entzündungstemperatur befindliche Knallgas, auf der anderen Seite das um vieles weniger dichte, zur hohen Verbrennungstemperatur erhitzte Flammengas. Es ist klar, daß dieser Dichtenunterschied, der schon an den relativ wenig explosiblen Leuchtgas-Luft-Gemischen so ausgeprägt ist, bei den explosibelsten Gasgemischen, für welche die Entzündungstemperatur niedrig, die Verbrennungstemperatur hoch liegt, noch wesentlich höhere Werte annehmen kann und für flüssige und feste Explosivstoffe ganz enorme Größen erreicht. So läßt sich z. B. für Nitroglyzerin [$2\,C_3H_5(NO_2)_3O_3 = 6\,CO_2 + 5\,H_2O + 6\,N + O$, Dichte = 1·60], dessen Verbrennungstemperatur nach Wuič 3005° C. beträgt, das Verhältnis $\frac{\rho}{\rho'}$ zu ungefähr 12000 berechnen und für Knallquecksilber [$HgC_2O_2N_2 = Hg + 2\,CO + 2\,N$, Dichte = 4·42], das bei der Verbrennung von einem Grammäquivalent 116000 Cal. entwickelt, erhalten wir $\frac{\rho}{\rho'} = 34000$.

Es ist also das Charakteristische für eine jede Brennfläche, daß in ihr Gas von sehr hoher Temperatur und geringer Dichte an den Explosivstoff grenzt, der wesentlich niedrigere Temperatur und um vieles höhere Dichte aufweist. Die aus dem Gase in den Explosivstoff einfliegenden Molekel, welche durch Abgabe ihrer Energie die Explosion weiterleiten, haben somit hiebei den Übergang aus einem dünnen in ein bedeutend dichteres Medium zu vollziehen. Bei diesem Übergange, d. h. bei dem ersten im dichten Medium erfolgenden Zusammen-

stoße werden sie, wie wir noch ausführlich erörtern wollen, abgelenkt, und zwar von dem zur Fläche errichteten Lote. So wie im oben behandelten Falle der vom dichten in das dünne Gas übertretende Gasstrom in der Richtung zum Lote gebrochen wird und, die praktische Realisierbarkeit des Falles vorausgesetzt, eine in entgegengesetzter Richtung erfolgende Strömung eine Ablenkung vom Lote erführe,[1] so wird auch die Richtung einer jeden einzelnen einfliegenden Molekel beim Übergange durchschnittsweise im gleichen Sinne abgelenkt, wenn auch natürlich nicht nach dem gleichen Gesetze. Die hiedurch entstehende Polarität in der Energieströmung erklärt dann zwanglos die besprochene Polarität in der Weiterleitung der Explosion vom Rande der Brennfläche.

Es hat Maxwell, um das Gleiten verdünnter Gase an einer festen Wand und die Erscheinung der thermischen Effusion analytisch zu behandeln, eine Methode gegeben,[2] der wir zwar hier aus leicht ersichtlichen Gründen nicht ganz folgen können, die wir aber doch zur Rechtfertigung unserer späteren speziellen Annahmen erwähnen müssen. Liegt molekular bewegtes Gas geringer Dichte und molekular ruhendes Gas großer Dichte unmittelbar aneinander, so wird dort ausgeführt, daß die aus dem dünnen Gas einfliegenden Molekel häufiger den Pol als den Äquator der Molekel des dichten Gases treffen werden und daß infolgedessen hauptsächlich die senkrecht zur Trennungsfläche ausfliegenden Molekel in das dichte Gas gelangen, während diejenigen, welche nahezu parallel zur Trennungsfläche ausfliegen, unter Beibehaltung ihrer Tangential- und Reversion ihrer Normalgeschwindigkeit von den obersten

---

[1] Auch bei der Effusion eines Gases wird das molar ungeordnete Gas molar geordnet, indem jede die Öffnung passierende Molekel durch den letzten in der Öffnung erfolgenden Zusammenstoß einen Geschwindigkeitszuwachs in der Richtung der Normalen erfährt. Umgekehrt erfährt die einfliegende Molekel beim ersten Zusammenstoß im dichten Gase im Durchschnitt eine Verminderung ihrer Normalkomponente.

[2] Im Nachtrage zur Abhandlung: »On stresses in rarified gases arising from inequalities in temperature.«

Molekelreihen des dichten Gases abprallen. Es ist ohneweiters klar, daß diese Scheidung von »absorbierten« und »reflektierten« Molekeln bezüglich der dynamischen Wirkung des ersten Zusammenstoßes keine strenge sein kann, daß vielmehr hier alle Übergänge vorhanden sein müssen und daß auch die eindringenden absorbierten Molekel beim Zusammenstoß, ähnlich wie die reflektierten, hauptsächlich eine Änderung der Normalkomponente ihrer Geschwindigkeit erfahren werden, wogegen die Tangentialkomponente viel weniger beeinflußt wird, ja für alle schräg eindringenden, aber noch nicht reflektierten Molekel nahezu vollkommen erhalten bleibt. Dann verläuft aber im Durchschnitte die ganze Erscheinung so, als ob jede eindringende Molekel beim ersten Zusammenstoß unter Einbuße eines Teiles ihrer Energie nach einem bestimmten Gesetze vom Lote gebrochen würde.

Auch ein von Jäger[1] zur Ableitung der van der Waalsschen Zustandsgleichung benützter Gedanke läßt uns zum gleichen Schlusse kommen. Jäger beweist, daß eine aus dichtem in verdünntes Gas oder in den leeren Raum übertretende Molekel beim Durchgange durch die Grenzfläche Arbeit gewinnt, so als ob zwischen den Molekeln Abstoßungskräfte vorhanden wären. Es hat dies zur unmittelbaren Folge, daß die Molekel im Momente, wo sie die Grenzfläche passiert, einen Impuls in der Richtung der Flächennormalen erfährt, d. h. die Normalkomponente ihrer Geschwindigkeit gesteigert wird, und zwar ohne Änderung der zur Fläche parallelen Komponente. Daraus ergibt sich aber auch, daß, wenn umgekehrt die Molekel aus dem dünnen in das dichte Gas übertritt, dies einer in der Richtung der Flächennormalen zu leistenden Arbeit entspricht, zufolge deren sie mit verminderter Normal- und beibehaltener Tangentialgeschwindigkeit zum nächsten Zusammenstoß gelangen wird.

Auf diese Überlegungen gestützt, nehmen wir an:

1. Daß die ursprüngliche Geschwindigkeit c der Molekel und die durch den ersten Zusammenstoß veränderte c' mit

[1] Diese Sitzungsber., 101, p. 1520 (1892). Auch Winkelmann, Handbuch der Physik, II, 2, p. 544 (1896).

dem Einfallslot in einer Ebene bleiben. Das gilt natürlich nicht für den einzelnen Stoß, sondern nur für den Mittelwert vieler.

2. Daß die in die Richtung der Ebene fallende Komponente hiebei erhalten bleibt. Sind also ϑ und ϑ' die Winkel, welche die Geschwindigkeitsvektoren mit dem Lote bilden, so gelte die Gleichung $c \sin \vartheta = c' \sin \vartheta'$.

3. Daß hingegen die Normalkomponente $c \cos \vartheta$ eine gewisse, von ρ und ρ' abhängige Veränderung erfährt. Es sei also $c' \cos \vartheta' = c \cos \vartheta f(\rho, \rho')$. Ist $\rho' > \rho$, so muß jedenfalls $f(\rho, \rho') < 1$ sein.

Durch Vereinigung beider Gleichungen erhalten wir ferner auch die Beziehungen

$$\operatorname{tg} \vartheta = f(\rho, \rho') \operatorname{tg} \vartheta'$$

und

$$c'^2 = c^2 \sin^2 \vartheta + c^2 \cos^2 \vartheta [f(\rho, \rho')]^2.$$

Es ist wohl kaum nötig, eigens zu betonen, daß diese Annahmen, vor allem die zweite, durchaus nicht völlig den Tatsachen entsprechen werden und daß daher auch die Resultate nach der Auffindung direkterer Methoden möglicherweise erheblicher Korrekturen in quantitativer Beziehung bedürfen werden.

Wir betrachten nun den folgenden Fall:

Die für Wärme undurchdringliche Wand AB trenne brennendes und unentzündetes Gas. Nur durch eine in der Wand befindliche Öffnung von der Größe F sei das Fortschreiten der Verbrennung in das unter AB befindliche Knallgas ermöglicht. Wir fragen nach der Dichte der Energie- oder Wärmeströmung in den verschiedenen Richtungen, einer Größe, die gemäß der oben entwickelten Anschauung der Geschwindigkeit proportional ist, mit der sich die Explosion von F aus nach den verschiedenen Richtungen, unmittelbar nach Einleitung des Vorganges, fortpflanzt. Denken wir uns also um F, in der aus der Figur ersichtlichen Weise, mit dem Radius Eins eine Halbkugel konstruiert, so handelt es sich um die Berechnung der Energie, welche die von oben aus dem brennenden Gase einfliegenden Molekel durch die verschieden gelegenen Flächen-

elemente dieser Halbkugel tragen, wobei es im voraus aus Gründen der Symmetrie einleuchtet, daß diese Energieströmung nur von dem Winkel ϑ oder ϑ', dagegen nicht vom Azimut abhängen kann und daher längs der Zone $\mu\nu = 2\pi \sin \vartheta' d\vartheta'$ überall den gleichen Wert hat. Wir wollen ferner bedenken, daß die Geschwindigkeit der Molekeln des brennenden Gases viel größer ist als die des noch nicht entzündeten Gases, so daß wir uns das letztere molekular ruhend denken können. Es heißt dies nichts anderes, als daß die Wurzel aus der Differenz der Quadrate der Molekulargeschwindigkeiten in den

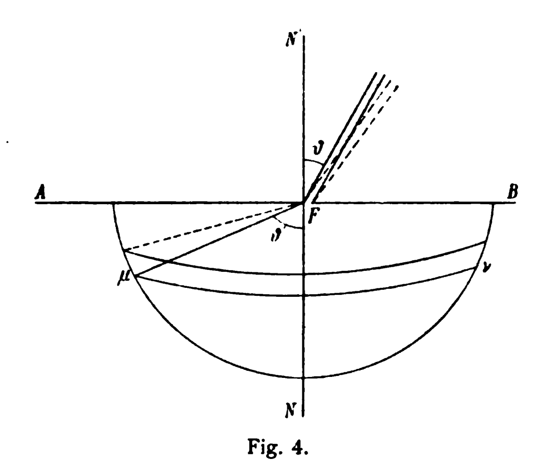


Fig. 4.

beiden Gasarten sich mit der Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat der Molekel des brennenden Gases, c, hinlänglich deckt.

Der Vorgang, durch den der Wärmetransport vom heißen zum kalten Gase erfolgt, ist dann der folgende:

Durch die Öffnung F fliegen von allen Seiten die Molekeln des brennenden Gases in das um vieles dichtere unverbrannte Gas ein. Bei dem ersten Zusammenstoße, welcher in den obersten Molekelreihen des dichten Gases stattfindet, werden die Normalkomponenten der stoßenden Molekel nach dem oben eingeführten Gesetze verändert und die hiebei verloren gegangene, senkrecht zur Trennungsfläche gerichtete Energie an die getroffenen Molekeln des dichten Gases übertragen. Außerdem haben aber auch die stoßenden Molekeln selbst

einen Energierest behalten, der nach verschiedener Richtung verschieden groß ist und eine Energieströmung veranlaßt, die sich ersichtlich als Funktion des Winkels ϑ' ausdrücken lassen wird. Es soll gezeigt werden, daß die Dichte dieser vorzugsweise seitlich gerichteten Energieströmung die Dichte der normal eindringenden Energieströmung bedeutend übersteigen kann und in einer bestimmten Richtung das Maximum erreicht. Es ist dies dann zugleich die Richtung, in der die Explosionsgeschwindigkeit beim Durchtreten der Explosion durch die Wand AB den größtmöglichen Wert erreicht.

Fassen wir unter den einfliegenden Molekeln diejenigen ins Auge, deren Richtung mit der Flächennormalen den Winkel ϑ bis $\vartheta + d\vartheta$ einschließt, so ist die Zahl solcher Molekel in der Sekunde bekanntlich[1] gleich $\frac{1}{2} Nc \sin\vartheta \cos\vartheta d\vartheta$, wobei wir der Einfachheit halber $F = 1$ setzen und unter N die Zahl der Molekel verstehen, welche in der Volumseinheit des brennenden Gases enthalten sind. Nach dem ersten Zusammenstoße schließen diese Molekel nach dem Obigen mit der Flächennormale den Winkel ϑ' bis $\vartheta' + d\vartheta'$ ein, wobei

$$\operatorname{tg}\vartheta' = \frac{1}{f(\rho, \rho')} \operatorname{tg}\vartheta \quad \text{und} \quad d\vartheta' = \frac{1}{f(\rho, \rho')} \frac{\cos^2\vartheta'}{\cos^2\vartheta} d\vartheta$$

ist.

Ihre Geschwindigkeit ist $c' = c\sqrt{\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta [f(\rho, \rho')]^2}$.

Es passiert somit die Zone $\mu\nu$ der Energiebetrag

$$E_{\mu\nu} = \frac{1}{4} Nmc^3 \sin\vartheta \cos\vartheta d\vartheta \{\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta [f(\rho, \rho')]^2\}$$

und die Flächeneinheit der Zone der Energiebetrag:

$$E = \frac{1}{8\pi} Nmc^3 \frac{\sin\vartheta \cos\vartheta d\vartheta}{\sin\vartheta' d\vartheta'} \{\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta [f(\rho, \rho')]^2\}.$$

---

[1] Vergl. z. B. O. E. Meyer, Kinetische Theorie der Gase, 2. Aufl., p. 82 (1899).

Dieser Ausdruck, der nichts anderes gibt als die Dichte der Energieströmung in der Richtung des Winkels ϑ', läßt sich zunächst durch die folgenden einfachen Transformationen in eine übersichtliche Form bringen. Es ist nämlich unter Berücksichtigung der Beziehungen, welche zwischen ϑ und ϑ' bestehen:

$$E = \frac{1}{8\pi} Nmc^3 \frac{\sin\vartheta \cos^5\vartheta d\vartheta}{\sin\vartheta' \cos^2\vartheta' d\vartheta} f(\rho,\rho')\{\mathrm{tg}^2\vartheta + [f(\rho,\rho')]^2\} =$$

$$= \frac{1}{8\pi} Nmc^3 \frac{\sin\vartheta \cos^5\vartheta}{\sin\vartheta' \cos^2\vartheta'} [f(\rho,\rho')]^2 (1+\mathrm{tg}^2\vartheta') =$$

$$= \frac{1}{8\pi} Nmc^3 \frac{(1+\mathrm{tg}^2\vartheta')^{5/2}}{\{1+[f(\rho,\rho')]^2\,\mathrm{tg}^2\vartheta'\}^3} [f(\rho,\rho')]^4.$$

Suchen wir denjenigen Winkel Θ, für welchen diese Energieströmung den größten Wert annimmt und unter dem sich somit auch die Explosion am raschesten fortpflanzt, so erhalten wir, durch Nullsetzung des nach ϑ' gebildeten Differentialquotienten, für ihn die Bestimmungsgleichung

$$\mathrm{tg}^2\Theta = \frac{5}{[f(\rho,\rho')]^2} - 6$$

und für den Höchstwert der Energieströmung

$$E_{\mathrm{Max}} = \frac{1}{8\pi} \frac{5^{5/2}}{6^3} Nmc^3 \frac{1}{f(\rho,\rho')[1-f(\rho,\rho')^2]^{1/2}}.$$

Es ist nun, wie schon oben betont wurde, $f(\rho,\rho')$ stets kleiner als Eins, und zwar wird es um so kleiner sein, je größer der Dichtenunterschied der Gase auf beiden Seiten der Brennfläche ist. Fassen wir Fälle ins Auge, wo dieser Dichtenunterschied große Werte erreicht, wo also $f(\rho,\rho')$ sehr klein ist, so können wir auch schreiben:

$$\mathrm{tg}\,\Theta = \frac{\sqrt{5}}{f(\rho,\rho')}$$

und

$$E_{\text{Max}} = \frac{1}{8\pi}\,\frac{5^{5/2}}{6^3}\,Nmc^3\,\frac{1}{f(\rho,\rho')} = 0\cdot0103\,Nmc^3\,\frac{1}{f(\rho,\rho')}.$$

Vergleichen wir damit die Dichte der Energieströmung, wie sie in den mittleren Partien einer ausgedehnten Brennfläche vorhanden ist. Da sich hier die seitlich gerichteten Komponenten gegenseitig aufheben, wird sie senkrecht zur Brennfläche gerichtet sein. Es ist nun die Gesamtzahl der durch die Flächeneinheit in der Sekunde einfliegenden Teilchen gleich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} Nc \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{4} Nc$$

und die durch sie überführte Energie

$$E_{\text{Normal}} = \frac{1}{8} Nmc^3 = 0\cdot125\,Nmc^3.$$

Man sieht ein, daß für genügend kleines $f(\rho,\rho')$ der Wert von E_{Max} den von E_{Normal} bedeutend übertreffen kann und daß dann auch die vom Rande der Brennfläche weitergreifende Explosion, besonders in der Richtung des Winkels Θ, in ihrer Geschwindigkeit die normal zur Brennfläche sich fortpflanzende erheblich übersteigen wird.

Es erübrigt noch, die Bedeutung der oben entwickelten Anschauungen für die Physik der Explosionen kurz auseinanderzusetzen.

Zunächst ist es einleuchtend, daß die Einführung der am Rande der Brennfläche vorhandenen maximalen Explosionsgeschwindigkeit uns in den Stand setzt, sowohl die rasche Explosion größerer Knallgasvolumina wie auch die außerordentlich schnelle »äußere Entzündung« der inneren Ballistik, die wir eingangs erwähnt haben, zu erklären. Von irgend einer

Stelle aus, in der die Entzündung eingeleitet wurde und sich eine kleine Brennfläche gebildet hat, verbreitet sich zunächst diese Brennfläche vom Rande aus durch oder über den Explosivkörper mit großer Schnelligkeit, und zwar vornehmlich in der jeweiligen Richtung der maximalen Explosionsgeschwindigkeit, während in der Richtung der jeweiligen Flächennormalen die Verbrennung viel langsamer erfolgt. Ist speziell, wie bei den festen Explosivstoffen, der Dichtenunterschied zwischen dem Flammengas und der explosiblen Substanz sehr groß, so wird der Winkel Θ nahezu gleich $\frac{\pi}{2}$, d. h. die Explosionsgeschwindigkeit hat in der Richtung der an der betreffenden Stelle des Randes an die Brennfläche gelegten Tangentialebene den höchsten Wert.

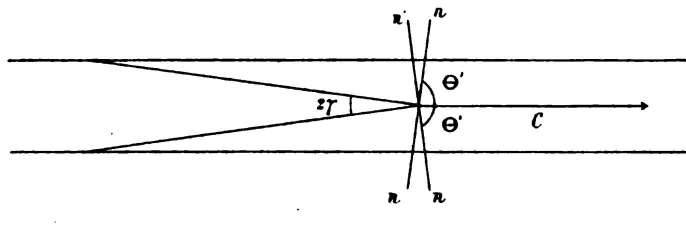


Fig. 5.

ebene den höchsten Wert. Die Verbrennung wird sich also tatsächlich in einer Pulverladung zunächst von der Entzündungsstelle über die Oberflächen der Pulverkörner bewegen und dann langsamer in das Innere eines jeden Kornes vordringen.

Auch das Entstehen der von Berthelot als Explosionswelle bezeichneten Erscheinung läßt sich auf Grund der entwickelten Theorie dem Verständnis näher bringen. Wird in einer mit einem Explosivstoff, etwa einem Knallgas gefüllten zylindrischen Röhre die Entzündung selbst auf einer zur Achse senkrechten Ebene eingeleitet, so schreitet die Brennfläche doch nicht als Ebene durch die Röhre weiter fort. Die der Röhre anliegenden Partien der Brennfläche werden nämlich infolge der kühlenden Wirkung der Wandung[1] eine gegenüber

[1] H. Mache, diese Sitzungsber., 111, p. 1224 (1902).

der Mitte stark verminderte Explosionsgeschwindigkeit aufweisen und hinter ihnen zurückbleiben. Dadurch erhält aber die Brennfläche, besonders in engen Röhren, wie sie ja stets zu diesen Versuchen verwendet werden, sehr bald die Form eines Kegels. Die Spitze dieses Kegels wirkt dann hier im ruhenden Gasgemisch ähnlich wie die Kegelbasis im strömenden, d. h. wie der Rand einer Brennfläche. In der Tat muß ja gemäß den obigen Ausführungen eine jede gegen das unverbrannte Knallgas gerichtete Flammenkante oder Spitze in ganz analoger Weise wirken wie ein Flammenrand. Das hat zur Folge, daß die Spitze des Kegels nicht mit der normalen, sondern mit höherer Explosionsgeschwindigkeit in das Knallgas vordringt und den übrigen Partien der Brennfläche immer mehr voraneilt. Der Kegel wird steiler und steiler, die Geschwindigkeit seiner Spitze dadurch immer größer, bis sie ihren Höchstwert erreicht hat, bis nämlich die Richtung der maximalen Explosionsgeschwindigkeit mit der Achse der Röhre zusammenfällt. Ist diese größtmögliche Geschwindigkeit einmal vorhanden, so wird sie sich erhalten, d. h. der Kegel schreitet von da ab mit konstantem Öffnungswinkel und konstanter, die normale Explosionsgeschwindigkeit weit übertreffender Geschwindigkeit durch die Röhre weiter, wobei sich die peripheren Partien des Kegels in ganz analoger Weise von der Spitze her entzünden und ergänzen wie im strömenden Knallgas die zentralen Partien vom Kegelrande. Bezeichnet also 2γ den Öffnungswinkel des Kegels, C seine maximale Geschwindigkeit, c wieder die normale Explosionsgeschwindigkeit, so ist $\sin\gamma = \frac{c}{C}$. Ist weiter r der Radius der Röhre, so ist die maximale Länge des Kegels

$$l = r \operatorname{cotg} \gamma = r\sqrt{\left(\frac{C}{c}\right)^2 - 1} \backsim r\frac{C}{c}.$$

Die Beobachtungen ergeben nun tatsächlich je nach der Länge der Röhre verschiedene Mittelwerte für die Geschwindigkeit, mit der die Explosion sie durchläuft. Auch wurde nachgewiesen, daß diese Geschwindigkeit von der Entzündungs-

stelle aus zunächst anwächst, bis sie einen gewissen bestimmten Wert erreicht hat, den sie dann beibehält.[1]

Das Gesagte gilt ohneweiters natürlich nur für offene Röhren und für den Fall, daß die auf die geschilderte Weise erreichte maximale Geschwindigkeit die Schallgeschwindigkeit in der unverbrannten explosiblen Substanz nicht übersteigt. Tritt das letztere ein, so wird die Geschwindigkeit der Explosionswelle infolge der jetzt eintretenden adiabatischen Kompression noch weiter ansteigen. Es wird nämlich einerseits durch die Kompression des Flammengases die Verbrennungstemperatur höher, andrerseits durch die Kompression der unverbrannten Substanz diese bedeutend vorgewärmt und die zur Erreichung der Entzündungstemperatur durch Wärmeleitung zuzuführende Wärmemenge geringer. Beide Ursachen, vor allem die zweite, erhöhen nun die Explosionsgeschwindigkeit und rückwirkend die Kompression. Diese gegenseitige Steigerung wird so lange andauern, bis die Explosionsgeschwindigkeit den größten überhaupt möglichen Wert angenommen hat. Es kann kein Zweifel darüber bestehen, welches dieser Wert ist. Da der Fortleitungsmechanismus der Explosion in einem Wärmeleitungsprozeß besteht, so wird der Grenzwert der Explosionsgeschwindigkeit durch die Geschwindigkeit der Molekel gegeben sein, welche den Wärmetransport vermitteln. Es wird also schließlich, wie dies die Experimente von Berthelot und Dixon ergeben haben, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Explosion in der Röhre gleich der Geschwindigkeit der Molekel in der Flamme sein oder, genauer gesagt, gleich der mittleren molekularen Geschwindigkeit des Verbrennungsproduktes bei der aus Verbrennungswärme und Wärmekapazität berechenbaren maximalen Verbrennungstemperatur.

Zum Schlusse wollen wir noch den Zusammenhang zwischen dem Gesagten und einem einfachen Gesetze darlegen, welches für alle Verbrennungserscheinungen von großer Bedeutung ist. Dieses Gesetz sagt aus, daß der Verbrauch

---

[1] Vergl. z. B. H. B. Dixon: R. Boyle Lecture, 1903, H. Frowde, London (1905).

an Brennstoff für eine Flamme der Größe ihrer Oberfläche proportional ist. Gouy hat diesen Satz begründet und experimentell nachgewiesen.[1] Er resultiert unmittelbar aus der Bemerkung, daß die Normalkomponente der Explosionsgeschwindigkeit für jeden Flächenteil der Flamme die gleiche ist, und zwar gleich der normalen Explosionsgeschwindigkeit der betreffenden explosiblen Substanz. Dann ist auch der Verbrauch an Brennstoff einer beliebig gestalteten Flamme gleich dem einer ebenen Flamme von gleicher Größe und es ist der Quotient aus Konsum und Brennfläche gleich c. Auf diese Weise hat Michelson durch Ausmessen der kegelförmigen Brennfläche, wie sie sich über zylindrischen Brennerröhren ausbildet, für einige Knallgase die normale Explosionsgeschwindigkeit bestimmt[2] und auf diese Weise sind auch die oben für Leuchtgas-Luft-Gemische gegebenen Werte von c erhalten worden.

Die Gültigkeit dieses Satzes ist nun an die Erfüllung zweier Bedingungen geknüpft. Zunächst muß der Konsum der Flamme und damit auch die normale Explosionsgeschwindigkeit von der Krümmung der Brennfläche unabhängig sein. Das ist nur dann der Fall, wenn die Tiefe, bis zu der die Wärmeströmung in den unentzündeten Brennstoff eindringt, eine kleine Größe gegen die bei den Beobachtungen vorkommenden Krümmungsradien der Oberfläche ist; denn eine jede irgendwie beträchtliche Konvergenz der Wärmeströmung hätte ja ein rascheres Erreichen der Entzündungstemperatur und damit auch ein Ansteigen der normalen Explosionsgeschwindigkeit in diesen Teilen der Flamme zur Folge. Daß diese Bedingung genügend erfüllt erscheint, wurde bereits an anderer Stelle nachgewiesen.[3]

Außerdem müssen wir aber noch zur Gültigkeit des Satzes annehmen, daß die maximale Explosionsgeschwindigkeit die normale sehr wesentlich übertrifft. Genau würde der Satz nur gelten, wenn die maximale Explosionsgeschwindigkeit unend-

---

[1] Ann. chim. phys. (5), 18, p. 27 (1879).

[2] Wied. Ann., 37, p. 1 (1889).

[3] H. Mache, diese Sitzungsber., 108, p. 1152 (1899).

lich groß wäre und in die Richtung der Brennfläche fiele, wie dies gleichfalls bereits an anderer Stelle dargelegt wurde.[1] Ist nämlich $MN = f$ eine etwa in einer zylindrischen Röhre senkrecht zur Achse stehende Brennfläche, so schreitet sie, wenn wir von der kühlenden und retardierenden Wirkung der Wandung absehen, mit der Geschwindigkeit c in der Röhre fort. Ist hingegen die Brennfläche unter dem Winkel γ gegen

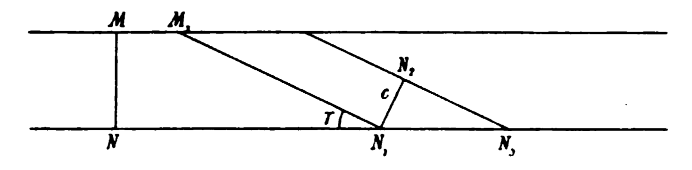


Fig. 6.

die Achse geneigt, so fordert unser Satz, daß sich diese Geschwindigkeit auf $\frac{c}{\sin\gamma}$ erhöht; denn es ist ja nur dann der Quotient aus Konsum und Brennfläche

$$\frac{f\dfrac{c}{\sin\gamma}}{\dfrac{f}{\sin\gamma}} = c.$$

Während also die Explosion in einer bestimmten Zeit, etwa in einer Sekunde, senkrecht zur Brennfläche von N_1 nach N_2 fortschreitet, muß sie parallel zur Fläche, also vom Rande aus mindestens die Strecke $N_2 N_3 = \frac{c}{\operatorname{tg}\gamma}$ zurückgelegt haben. Daraus ergibt sich, daß für kleine Werte von γ die Geschwindigkeit in dieser Richtung sehr große Werte annehmen muß, ja daß, wofern wir die absolute Gültigkeit des Gesetzes postulieren, die Annahme nötig wird, daß sich die Explosion seitlich mit unendlich großer Geschwindigkeit ausbreitet.

---

[1] H. Mache, diese Sitzungsber., 113, p. 341 (1904).

Der Satz wird also nicht mehr gelten, wo Krümmungsradius und Reichweite der Wärmeströmung von gleicher Größenordnung sind oder wo die maximale Explosionsgeschwindigkeit die normale nicht erheblich übertrifft. Er wird endlich auch dann ungültig werden, wenn die Neigung der Brennfläche gegen den Brennstoff, der Winkel γ, sehr klein wird, wie dies z. B. der Fall ist, wenn die Verbrennung in einer Röhre als Explosionswelle fortschreitet.

Eine einfache Methode zur Bestimmung der Wärmeleitungskonstante von Flüssigkeiten

(I. Mitteilung)

von

Heinrich Mache und **Josef Tagger.**

(Mit 1 Textfigur.)

Aus dem physikalischen Institute der Universität Innsbruck.

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Juli 1907.)

Die Flüssigkeit wird in eine nicht zu dickwandige Hohlkugel aus gut leitendem Metall (Kupfer) eingefüllt, die an einer Stelle ein kurzes Metallröhrchen trägt, in die eine nicht zu enge Kapillare eingesetzt ist. In diesem Kapillarrohr steht dann die Flüssigkeit in bestimmter Höhe. Die ganze Vorrichtung ist also nichts anderes als ein offenes Thermometer mit größerem, kugelförmigem Metallgefäß.

Wird dieses Thermometer aus einem Bade von Zimmertemperatur rasch in ein zweites, um wenige Grade wärmeres Bad gebracht, so beobachtet man zunächst infolge der Ausdehnung des Thermometergefäßes ein fast momentanes Sinken der Flüssigkeit im Rohre, worauf dann langsamer, und zwar in dem Maße, als die Flüssigkeit sich erwärmt, das Steigen des Meniscus eintritt. Nach einer gewissen, gewöhnlich kurzen Zeit ist er in die Anfangsstellung zurückgekehrt und läuft mit fortschreitender Erwärmung darüber hinaus, um natürlich erst dann zur Ruhe zu kommen, wenn die ganze Flüssigkeitsmasse die höhere Temperatur des zweiten Bades angenommen hat. So wenig diese späteren Stadien des Prozesses einem reinen Wärmeleitungsprozeß entsprechen, da ja bis dahin zur Ausbildung von Strömungen in der Flüssigkeit reichlich Zeit

vorhanden ist, so ist doch der erste Teil des Vorganges, auch in Flüssigkeiten geringer Fähigkeit, von Störungen durch Konvektionsströme als vollkommen frei anzusehen. Die weiter unten beschriebenen Versuche weisen dies nach und zeigen, daß die aus der Ausdehnung der Flüssigkeit im ersten Stadium berechenbaren Werte der Wärmeleitungskonstanten mit den nach der bisher einzig verläßlichen Lamellenmethode von H. Weber erhaltenen sehr gut übereinstimmen.

Wir betrachten eine Flüssigkeitskugel vom Radius R. Zur Zeit $t = 0$ sei die Temperatur in ihrem Innern $\vartheta = 0$. Diese Kugel werde plötzlich auf ihrer Oberfläche, also für $r = R$, auf die höhere Temperatur Θ gebracht und auch weiterhin auf dieser Temperatur erhalten. Die Temperaturverteilung im Innern der Kugel zur Zeit t ergibt sich dann als Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial(r\vartheta)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2(r\vartheta)}{\partial r^2}$$

unter gleichzeitiger Befriedigung der Nebenbedingungen:

$$\vartheta = 0 \text{ für } t = 0$$

und

$$\vartheta = \Theta \text{ für } r = R.$$

Hiebei bezeichnet a^2 die Temperaturleitfähigkeit der Flüssigkeit.

Setzen wir $r\vartheta = v$, so erhalten wir statt dessen auch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial v^2}{\partial r^2}$$

mit den Bedingungen:

$$\begin{aligned} v &= 0 && \text{für } t = 0 \\ v &= R\Theta && \text{» } r = R \\ v &= 0 && \text{» } r = 0. \end{aligned}$$

Als Lösung findet man den Ausdruck:[1]

$$v = r\vartheta = R\Theta\left\{\frac{r}{R}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{R}r\right\}.$$

Hat nun ein Volumelement der Flüssigkeitskugel für $\vartheta = 0$ die Größe $4r^2\pi dr$, so hat die in ihm enthaltene Flüssigkeit, wofern ε ihren thermischen Ausdehnungskoeffizienten bezeichnet, bei der Temperatur ϑ das Volumen $4r^2\pi dr(1+\varepsilon\vartheta)$. Sie hat sich somit um $4r^2\pi dr\varepsilon\vartheta$ ausgedehnt. Die gesamte, zur Zeit t vorhandene Volumsvergrößerung A_t erhalten wir dann durch einfache Integration. Es ist:

$$A_t = \int_0^R 4r^2\pi\varepsilon\Theta\,dr +$$

$$+\frac{2}{\pi}R\Theta\int_0^R 4r\pi\varepsilon\,dr\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{R}r =$$

$$=\frac{4}{3}R^3\pi\varepsilon\Theta+8R\varepsilon\Theta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 t}\int_0^R r\sin\frac{n\pi}{R}r\,dr.$$

Da ferner

$$\int_0^R r\sin\frac{n\pi}{R}r\,dr = \left|-\frac{rR}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{R}r+\frac{R^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{R}r\right|_0^R =$$

$$= -(-1)^n\frac{R^2}{n\pi},$$

so erhalten wir auch:

$$A_t = \frac{4}{3}R^3\pi\varepsilon\Theta - 8R\varepsilon\Theta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^2}{n^2\pi}e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 t} =$$

$$=\frac{4}{3}R^3\pi\varepsilon\Theta\left\{1-\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 t}\right\}.$$

Bezeichnet man nun mit B_t die tatsächlich zur Zeit t beobachtete scheinbare Ausdehnung der Flüssigkeit und mit C

[1] Vergl. z. B. Riemann-Hattendorf, Partielle Differentialgleich., p. 145.

die Ausdehnung der die Flüssigkeit enthaltenden Metallkugel, so ist

$$A_t = B_t + C.$$

Da der Temperaturleitungskoeffizient eines gut leitenden Metalles stets um vieles größer ist als der einer Flüssigkeit — für Kupfer ist er etwa 700mal so groß als für Wasser — so kann man annehmen, daß das Metall sofort die Temperatur des Bades annimmt und daß $C = \frac{4}{3} R^3 \pi \beta \Theta$ gesetzt werden kann, wo β den kubischen Ausdehnungskoeffizienten des Metalles bezeichnet.

Dann ist, wenn wir unter τ die Zeit verstehen, in welcher der Meniscus in die Anfangsstellung zurückkehrt, für welche also $B_t = 0$ wird,

$$\frac{(\varepsilon - \beta)\pi^2}{6\varepsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-a^2 \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 \tau},$$

oder, wenn wir mit τ die Zeit bezeichnen, in welcher der Meniscus im Rohre vom Querschnitt q bis zur Höhe h emporgestiegen ist,

$$\frac{(\varepsilon - \beta)\pi^2}{6\varepsilon} - \frac{q h \pi}{8 R^3 \varepsilon \Theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-a^2 \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 \tau}.$$

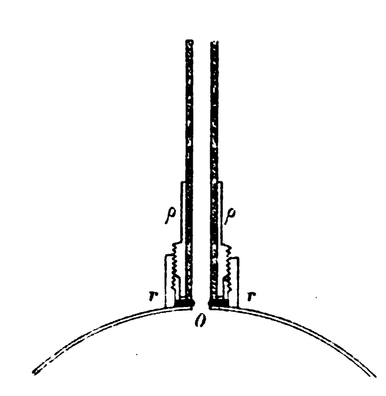
Aus beiden Formeln können wir durch probeweise Substitution das a^2 ermitteln. Mitunter wird allerdings diese Berechnung infolge geringer Konvergenz der Summe etwas langwierig.

Die Resultate der nachfolgenden Beobachtungen sind als vorläufige zu betrachten, da sie gewiß nicht die Genauigkeit erreichen, deren die Methode fähig ist. Vor allem wird sich die Zeitmessung durch automatische Registrierung wesentlich verbessern lassen. Immerhin sind sie geeignet, die Brauchbarkeit der Methode, d. h. also die Nichtexistenz von Störungen konvektiver Natur darzutun.

Die Kapillare war in der folgenden, aus der nebenstehenden Figur ersichtlichen Weise an die Kupferkugel angesetzt. Um die Öffnung O wurde das weitere, innen mit Gewinde versehene

Röhrchen r stumpf aufgelötet. In dieses paßte das Röhrchen p, in dem die Kapillare eingesiegelt war. Die letztere konnte dann eingeschraubt und auf einen am Boden des Röhrchens befindlichen Kautschuk- oder Lederring gepreßt werden, der einen dichten Abschluß herstellte. Die Kugel wurde bei etwas niedrigerer Temperatur mit der luftfrei gemachten Flüssigkeit gefüllt. Bei Erwärmung auf Zimmertemperatur steigt dann die Flüssigkeit von selbst in die Kapillare.

Die Resultate wurden für Flüssigkeiten mit geringer innerer Reibung nur brauchbar, wenn man die Beobachtungszeit nicht über 40 Sekunden ausdehnte. Geht man darüber hinaus, so erhält man durch Strömungen gestörte, also zu hohe Werte. Wir haben uns andrerseits überzeugt, daß zwischen 40 und 10 Sekunden die Beobachtungen konstante Werte geben. Freilich läßt sich erwarten, daß für sehr kleine, unter 10 Sekunden liegende Zeiten die Voraussetzung, daß das Metall sofort die Temperatur des Bades annimmt, nicht mehr genügend zutrifft und daß dann für die Wärmeleitungskonstante zu kleine Werte resultieren. Diese untere Grenze konnte aber mangels genauerer, automatischer Zeitmessung nicht festgelegt werden.



Die folgende Tabelle gibt die an vier verschiedenen Flüssigkeiten für ungefähr gleiche Beobachtungszeiten erhaltenen Resultate:

	R cm	ε	ϑ_0 C.°	ϑ C.°	$q\,cm^2$	h cm	τ sec	$a^2 \frac{cm^2}{sec}$	a^2 (Weber)
Glyzerin ...	5·00	0·00053	15·6	21·7	—	0	23	0·00091	0·00093
Anilin	2·49	0·00092	17·2	22·2	0·0175	2·55	37	0·00070	0·00078
Wasser	2·49	0·00016	14·5	17·7	—	0	38	0·00175	0·00136
Alkohol....	2·49	0·00110	14·7	20·2	0·0175	3·95	32	0·00095	0·00096

Die verwendeten Kugeln hatten eine Wandstärke von 0·065 *cm*. Der kubische Ausdehnungskoeffizient des Kupfers, β, wurde gleich 0·000051 gesetzt. Für Glyzerin und Wasser bezeichnet τ die Zeit, in welcher der Meniscus in die Anfangsstellung zurückkehrte, für Anilin und Alkohol die Zeit, in welcher der Meniscus im Rohr bis zur Höhe h emporstieg. Die Zahlen der letzten Spalte geben die von Weber nach der Lamellenmethode im Temperaturintervall 9 bis 15° für a^2 erhaltenen Werte.

Die Versuche werden in der Richtung verfeinert werden, daß die Zeitmessung vermittels elektrischer Kontakte durch einen Chronographen erfolgt. Dieser Apparat ist bereits in Bestellung gegeben, doch glaubten wir, da die Versuche eine längere Unterbrechung erfahren müssen, die Methode schon jetzt kurz mitteilen zu sollen.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Klasse erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden vier gesonderten **Abteilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abteilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Kristallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.

Abteilung II a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abteilung II b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abteilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Tiere sowie aus jenem der theoretischen Medizin.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichnisse ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Alfred Hölder, k. u. k. Hof- und Universitätsbuchhändler (Wien, I., Rothenthurmstraße 13), zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Teile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Teile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 14 K — 14 M.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Originalauszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird wie bisher acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 5 K — 5 M.



SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVI. BAND. VII. HEFT.

JAHRGANG 1907. — JULI.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 2 TAFELN UND 6 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1907.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN KOMMISSION BEI ALFRED HÖLDER,

K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 7. Heftes, Juli 1907, des CXVI. Bandes, Abteilung II a, der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Klasse.

Preis des ganzen Heftes: 1 K 90 h — 1 M 90 pf.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVI. BAND. VII. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Drei Konstruktionen der Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten

von

Robert Gidály in Wien.

(Mit 4 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Juni 1907.)

Von den zahlreichen Methoden, durch neun Punkte eine Fläche zweiter Ordnung zu legen,[1] sind nur zwei zur konstruktiven Durchführung geeignet: die Methode von Thomae [2] und jene von Adler [2]; Rohn [2] führt die Konstruktion nach einer Methode durch, die mit der Thomae'schen identisch ist.

Im nachstehenden werden drei weitere, sehr einfache Konstruktionen der Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten, I II III IV V VI VII VIII IX, mitgeteilt. Die Ebenen durch I, II, III; IV, V, VI; VII, VIII, IX mögen mit α, β, γ bezeichnet werden; ferner sei $A = [\beta\gamma]$, $B = [\alpha\gamma]$, $C = [\alpha\beta]$ und $s = [\alpha\beta\gamma]$. Da es sich um eine Aufgabe über reine Lagenbeziehungen handelt, kann die Konstruktion durchgeführt werden, wenn das Dreikant ABC und die Punkte I...IX in irgend einer linearen Abbildung gegeben sind. Unsere Aufgabe soll für gelöst gelten, wenn von der gesuchten Fläche F fünf in einer Ebene liegende Punkte bekannt sind.

---

[1] Vergl. Boegehold, Historisch-kritische Darstellung der Konstruktionen der Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten; Doktor-Dissertation, Jena (1898).

[2] Thomae, Lineare Konstruktion einer Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten, Leipziger Ber., 44. Bd. (1892); Rohn, Die Konstruktion der Fläche zweiten Grades durch neun gegebene Punkte, Leipziger Ber., 46. Bd. (1894) und Rohn-Papperitz, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 2. Teil, §676; Adler, Zur Konstruktion der Flächen zweiten Grades aus neun gegebenen Punkten, diese Sitzungsberichte, 110. Bd. (1901).

Erste Konstruktion.

Die gesuchte Fläche F ist die den Punkt IX enthaltende Fläche des Flächenbüschels mit den Grundpunkten I... VIII.

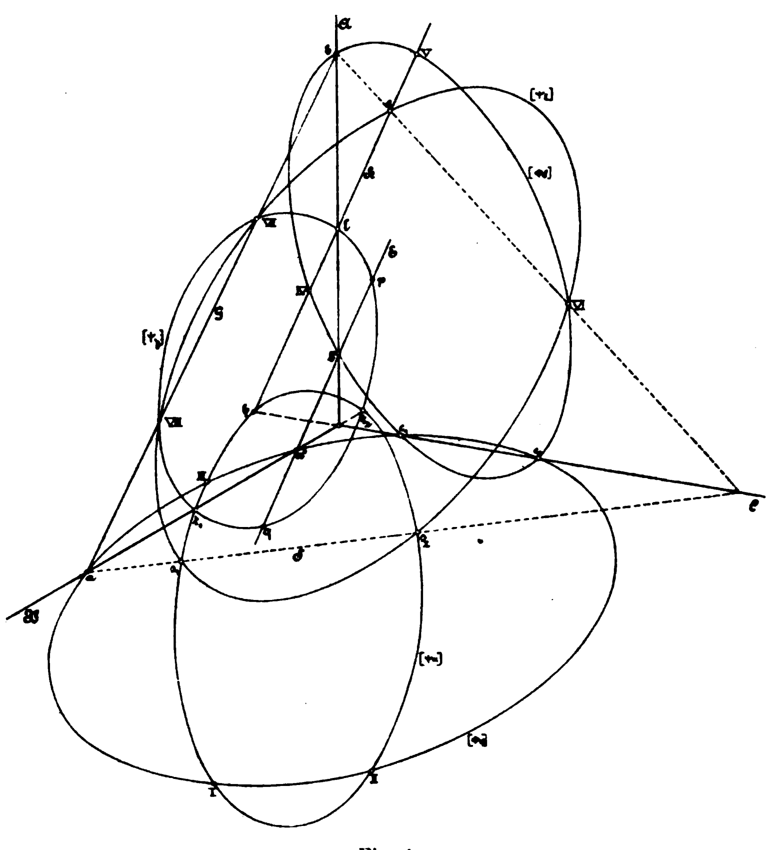


Fig. 1.

Die Flächen dieses Flächenbüschels schneiden die Ebene $\gamma = [\text{VII VIII IX}]$ nach Kegelschnitten eines Kegelschnittbüschels, von welchem zwei Grundpunkte, VII und VIII, bekannt sind. Die beiden anderen Grundpunkte, p und q, können mittels Zirkels und Lineals bestimmt werden. $K_\gamma = [F\gamma]$ ist der den Punkt IX enthaltende Kegelschnitt des Kegelschnittbüschels mit den Grundpunkten VII VIII pq.

$\Phi = [\mathrm{VII\ VIII}]$ I II III IV V VI ist eine Fläche des Flächenbüschels durch I...VIII; die Erzeugende $G = [\mathrm{VII\ VIII}]$ schneidet α in a, β in b. Die Kegelschnitte $[\Phi\alpha]$ und $[\Phi\beta]$ schneiden sich in zwei Punkten der Geraden C, c_1 und c_2, die man als das gemeinsame Punktepaar der durch die Kegelschnittbüschel a I II III und b IV V VI auf C bestimmten Involutionen erhält. $[\Phi\alpha]$ enthält die Punkte $c_1\, c_2\, a$ I II III und schneidet B in a und a^+, $[\Phi\beta]$ enthält $c_1\, c_2\, b$ IV V VI und schneidet A in b und b^+; a^+ und b^+ können linear bestimmt werden. $E = [a^+ b^+]$ ist die zweite in γ liegende Erzeugende von Φ.

$\Psi = [\mathrm{IV\ V}]$ I II III VI VII VIII ist eine zweite Fläche des Büschels I...VIII. Man legt durch VI, VII, VIII die Ebene ε; die Erzeugende $H = [\mathrm{IV\ V}]$ schneidet ε in e, α in h und γ in l. $[\Psi\varepsilon]$ und $[\Psi\alpha]$ schneiden sich in $s_1\, s_2$, dem gemeinsamen Punktepaar der durch die Kegelschnittbüschel e VI VII VIII und h I II III auf $S = [\varepsilon\alpha]$ bestimmten Involutionen. $[\Psi\alpha] = s_1\, s_2\, h$ I II III schneidet B in den Punkten t_1, t_2; $[\Psi\gamma]$ ist somit durch fünf Punkte, $t_1\, t_2\, l$ VII VIII, bestimmt.

Die Gerade E schneidet $[\Psi\gamma]$ in den gesuchten Punkten p, q, zu deren Bestimmung ein Kreis (durch e) und 77 gerade Linien erforderlich sind.

Zweite Konstruktion.

Chasles[1] und Steiner[1] legen das Flächenbüschel zweiter Ordnung durch I...VIII und bestimmen die durch dieses auf B ausgeschnittene Involution, J_b; zwei Punktepaare von J_b können linear ermittelt werden.[2] J_b, I, II, III bestimmen in α ein Kegelschnittbüschel und auf C die Involution J_c. Durch J_c, IV, V, VI ist in β ein Kegelschnittbüschel und auf A die Involution J_a bestimmt. Die Flächen des Flächenbüschels durch I...VIII schneiden γ nach Kegelschnitten eines Kegelschnittbüschels, von dem VII und VIII zwei Grundpunkte sind und durch welches auf A die Involution J_a, auf B die Involution J_b

[1] Chasles, Principe de correspondance entre deux objets variables, qui peut être d'un grand usage en Géométrie, P. C. R., t. 41 (1855); Steiner-Geiser, Konstruktion der Fläche zweiten Grades durch neun Punkte, Crellesches Journal, 68. Bd. (1868).

[2] Vergl. Anm. 2 auf p. 1118.

bestimmt wird. Der Kegelschnitt dieses Kegelschnittbüschels durch IX, $K_\gamma = [F\gamma]$, schneidet A in einem Punktepaar von J_a, B nach einem solchen von J_b. K_γ ist somit sowohl ein

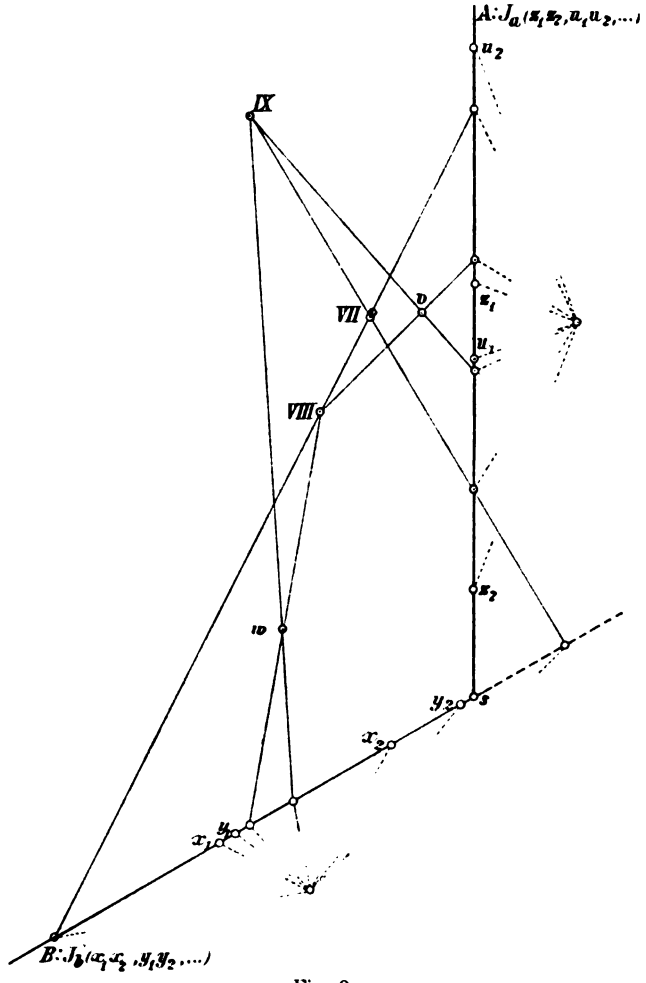


Fig. 2.

Kegelschnitt des durch J_a, VII, VIII, IX, als auch ein Kegelschnitt des durch J_b, VII, VIII, IX bestimmten Kegelschnittbüschels. Die vierten Grundpunkte dieser beiden Büschel, v und w, können mit dem Lineal allein konstruiert werden. K_γ ist nunmehr durch VII, VIII, IX, v, w bestimmt.

Mit Berücksichtigung dieser Modifikation lassen sich die Methoden von Chasles und Steiner linear, und zwar mit Hilfe von 58, beziehungsweise 52 geraden Linien durchführen; daß die Steiner'sche Methode linear durchgeführt werden kann, dürfte noch nicht bekannt sein.

Dritte Konstruktion.

Die Flächenbüschel durch I II III IV V VI VII VIII und I II III IV V VI VII IX bestimmen in α Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten I II III r und I II III t. Die gesuchte Fläche F,

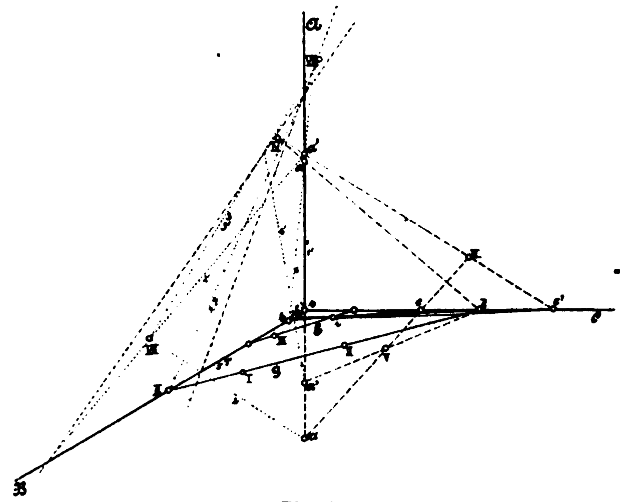


Fig. 3.

welche diesen Flächenbüscheln gemein ist, schneidet α nach $K_\alpha =$ I II III $r\,t$. v. Staudt[1] bestimmt die Punkte r und t bloß mittels des Lineals, jedoch auf sehr komplizierte Weise; eine sehr einfache, lineare Konstruktion dieser Punkte soll im folgenden mitgeteilt werden.

$\Phi =$ [I II] III IV V VI VII VIII ist eine Fläche des Büschels I...VIII; sie schneidet α nach den Erzeugenden $G =$ [I II] und

[1] v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, 3. Heft (1860); § 39, Nr. 582 ff.

$E = [\mathrm{III}\, r]$. E wird folgendermaßen bestimmt: G schneidet β in $\bar{c}$, γ in $\bar{b}$; $\bar{c}$ IV V VI sind die Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels, in welchem $[\Phi\beta]$ enthalten ist. Drei andere Kegelschnitte dieses Büschels, $[\bar{c}\,\mathrm{IV}]$ [V VI], $[\bar{c}\,\mathrm{V}]$ [IV VI] und $\bar{c}$ IV V VI s, schneiden auf C die Punkte c, c', s, auf A die einer Involution angehörigen Punktepaare aa, $a'a'$, $s(s)$ aus. Durch aa VII VIII $\bar{b}$, $a'a'$ VII VIII $\bar{b}$ und $s(s)$ VII VIII $\bar{b}$ sind Kegelschnitte eines Kegelschnittbüschels in γ bestimmt, die B in $\bar{b}$ und in b, b', s schneiden. Nun ist

$$(cc's\ldots)\,\pi\,(aa, a'a', s(s)\ldots)\,\pi\,(bb's\ldots);$$

die Punktreihen $cc's\ldots$ und $bb's\ldots$ befinden sich somit in perspektiver Lage, $i = [bc.b'c']$ ist das Perspektivzentrum $E = [\mathrm{III}\, i]$ ist die zweite in α gelegene Erzeugende von Φ. Die Ermittlung der Punkte b und b' geschieht am einfachsten auf Grund des Pascal'schen Satzes mit Hilfe der Sechsecke aa VII VIII $\bar{b}b$ und $a'a'$ VII VIII $\bar{b}b'$.

$\Phi^+ = [\mathrm{I\;III}]$ II IV V VI VII VIII ist eine zweite Fläche des Flächenbüschels I... VIII, $[\Phi^+\alpha]$ zerfällt in die Geraden $G^+ = [\mathrm{I\;III}]$ und $E^+ = [\mathrm{II}\, j]$, wenn j das Perspektivitätszentrum der Punktreihen $cc's\ldots$ und $b^+b'^+s\ldots$ bedeutet.[1]

$r = [EE^+]$ ist der vierte Grundpunkt des durch das Flächenbüschel I...VIII in α bestimmten Kegelschnittbüschels. Steiner, der $[\Phi\alpha]$ und $[\Phi^+\alpha]$ auf die geschilderte Art konstruiert, bestimmt noch die Kegelschnitte $[\Phi\beta]$, $[\Phi^+\beta]$, $[\Phi\gamma]$, $[\Phi^+\gamma]$ und erhält als Schnittpunkte der beiden letzteren nebst VII, VIII zwei weitere Punkte von $[F\gamma]$; es sind dies dieselben Punkte, welche in unserer ersten Konstruktion mit p, q bezeichnet wurden.[2]

[1] $[G^+C] = \bar{c}^+$, $[G^+B] = \bar{b}^+$; die Kegelschnitte $[\bar{c}^+\mathrm{IV}]$ [V VI], $[\bar{c}^+\mathrm{V}]$ [IV VI], $\bar{c}^+$IV V VI s schneiden auf C die Punkte c, c', s, auf A die einer Involution angehörigen Punktepaare aa^+, $a'a'^+$, $s\,(s)$ ein. Mit Hilfe der Pascal'schen Sechsecke a^+a VII VIII $\bar{b}^+b^+$ und a'^+a' VII VIII $\bar{b}^+b'^+$ werden auf B die Punkte b^+ und b'^+ linear bestimmt. (s) braucht nicht gezeichnet werden.

[2] $[\Phi\alpha]$ und $[\Phi^+\alpha]$ schneiden B in Punktepaaren jener Involution, die gelegentlich der Besprechung unserer zweiten Konstruktion mit J_b bezeichnet wurde.

$\Phi_0 = [\mathrm{I\,II}]\,\mathrm{III\,IV\,V\,VI\,VII\,IX}$ und $\Phi_0^+ = [\mathrm{I\,III}]\,\mathrm{II\,IV\,V\,VI\,VII\,IX}$ sind Flächen des Flächenbüschels I II III IV V VI VII IX. Φ_0 schneidet α nach den Erzeugenden $G = [\mathrm{I\,II}]$ und $E_0 = [\mathrm{III}\, i_0]$, Φ_0^+ nach $G^+ = [\mathrm{I\,III}]$ und $E_0^+ = [\mathrm{II}\, j_0]$; $t = [E_0 E_0^+]$ ist somit der vierte Grundpunkt des durch das genannte Flächenbüschel in α bestimmten Kegelschnittbüschels.

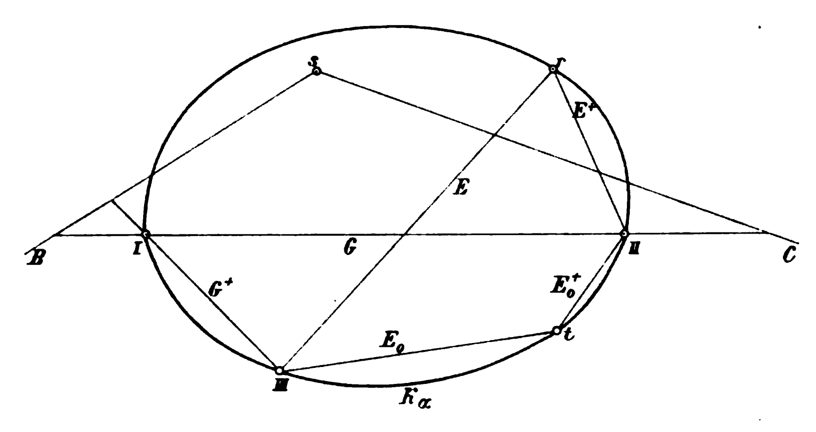
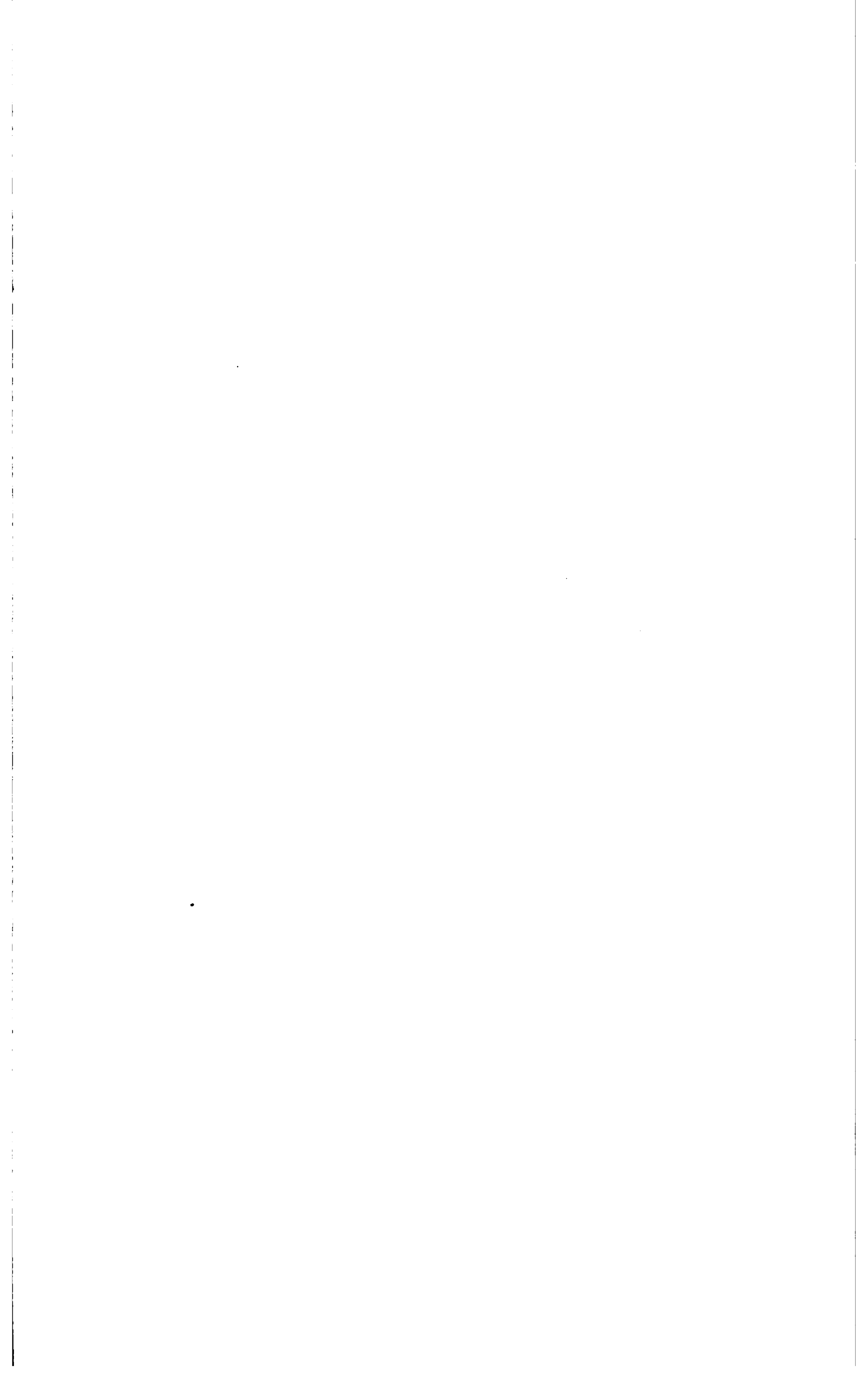


Fig. 4.

Vom Kegelschnitt $K_\alpha = [F\alpha]$ kennt man jetzt fünf Punkte: I, II, III, r, t; unsere Aufgabe ist somit gelöst. Die angegebene Konstruktion erfordert insgesamt nur 44 gerade Linien, eine Zahl, die von der Anzahl der Linien, welche man zur Durchführung anderer Methoden braucht, weit übertroffen wird.[1]

[1] Nach Adler braucht man zur Durchführung der Rohn'schen Konstruktion ungefähr 90 gerade Linien, zur Durchführung der Adler'schen Methode außer einem festen Kreise genau 83 Gerade; durch passende Wahl des Hilfskreises kann aber die letztere Zahl bedeutend reduziert werden, etwa auf 50.



Über die Zerfallskonstante von Ac*A*

von

Dr. **V. F. Hess.**

Aus dem II. physikalischen Institut der k. k. Universität Wien.

(Mit 1 Tafel und 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Juli 1907.)

I. Zweck der Untersuchung.

In der Literatur finden sich merkwürdigerweise sehr abweichende Angaben über die Zerfallsperiode von Ac*A*, deren Aufklärung das Ziel der vorliegenden Untersuchung war.

Bekanntlich entsteht aus der Emanation des Actiniums ein strahlenloses Produkt, Ac*A*, mit einer Halbierungszeit von rund 36 Minuten, aus welchem eine α-, β- und γ-strahlende Substanz, Ac*B*, sich bildet, die in etwa 2 Minuten auf die Hälfte abklingt.

Verfolgt man die Abklingung der induzierten Aktivität, so bemerkt man bei kurzer Expositionsdauer ein anfängliches Wachsen der Aktivität (das Maximum trifft nach etwa 8 Minuten ein), hierauf eine Abklingung, die allmählich in eine rein exponentielle nach der Konstante des Ac*A* übergeht. Bei längerer Exposition verflacht sich der anfängliche Anstieg und wird bei sehr langer Exposition ganz unmerklich.

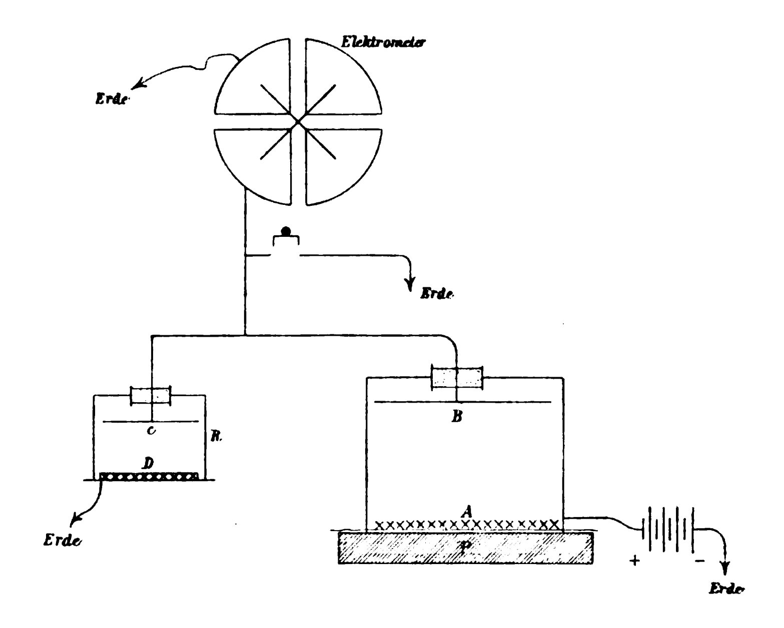
Die von den verschiedenen Forschern gefundenen Halbierungskonstanten für Ac*A* zeigen Abweichungen, die aus den Beobachtungsfehlern nicht mehr erklärt werden können.[1]

---

[1] Siehe T. Godlewski, Über die Eigenschaften des Aktiniums. Jahrb. f. Rad. u. Elektron., 3, p. 157.

Es schien mir daher wünschenswert, mit einer exakten Meßmethode die Abklingung der induzierten Aktivität bei variierten Versuchsbedingungen zu verfolgen.

Die Meßmethode mittels eines Blattelektrometers, wie es die meisten Beobachter anwendeten, ist bei einer so rasch abklingenden Strahlung nicht exakt genug, da jede einzelne Messung viel zu lange dauert und keine Mittelwerte gewonnen werden können.



Nun hat Dr. Bronson[1] eine sehr präzise Methode angegeben, die »Methode der konstanten Ausschläge«. Ich habe mich ebenfalls derselben bedient und möchte vorerst die Erfahrungen mitteilen, die ich mit derselben gemacht habe.

II. Bronson's »steady deflection method«.

Die Schaltung ist, wie aus der Figur ersichtlich, genau die von Bronson und Rutherford angegebene.

Das eine Quadrantenpaar bleibt ständig geerdet, das andere ist ständig mit dem Versuchsgefäß verbunden; dieses war auf

[1] Bronson, Sill. Journ. (1905, Februar).

einer Ebonitunterlage P gestellt und die äußere Belegung mit dem positiven Pole einer kleinen Weston-Hochspannungsbatterie (System Dr. Krüger) verbunden, deren negativer Pol geerdet war. Am Boden des Versuchsgefäßes wurden die aktiven Substanzen A gelegt.

Bronson's Methode besteht bekanntlich darin, daß das mit dem Versuchsgefäß verbundene Quadrantenpaar durch einen sehr hohen Widerstand R ständig zur Erde geleitet ist, weshalb die Aufladung durch den Sättigungsstrom im Versuchsgefäß nur so lange dauert, bis sie durch die langsame Entladung mittels R kompensiert ist.

Nach dem Vorgange Rutherford's verwendete ich als Widerstand R einen zweiten Luftkondensator, in dem sich ein sehr stark aktives Poloniumpräparat D befand, welches die Luft so stark ionisierte, daß das Ohm'sche Gesetz befolgt war.

Die Elektrometernadel war ständig auf 100 Volt geladen, das Elektrometer war eines vom Dolezalek'schen Typus (Papiernadel und Luftdämpfung).

Da die Luft des Laboratoriums sehr trocken war, hatte ich Schwierigkeiten, den Quarzfaden dauernd leitend zu erhalten. Insbesondere bemerkte ich, daß die Oberfläche der Siegellackkittungen an den Häkchen die Leitfähigkeit am ehesten verlor.

Mit Erfolg wendete ich den Kunstgriff an, die Siegellackkittungen, nachdem der Faden bereits leitend gemacht war, in feinstes Aluminiumpulver zu tauchen, das infolge der starken Adhäsion sofort einen leitenden Überzug bildete.

Die Bronson'sche Methode erwies sich für radioaktive Messungen, welche sich nur auf kurze Zeiträume erstrecken, innerhalb deren sich die Empfindlichkeit nicht ändert, als sehr zweckmäßig.

Die Empfindlichkeit kann bei konstanter Nadelladung durch zwei Mittel variiert werden: entweder man verändert die Größe des als Widerstand dienenden Luftraumes C—D durch Verschieben der Platte C oder man verändert die Ionisation in diesem Raume durch Bedecken des Poloniumbleches D mit dünner Aluminiumfolie. Die Strahlung des Bleches darf aber nicht so weit geschwächt werden, daß der Luftraum C—D

das Ohm'sche Gesetz nicht befolgt; dann sind nämlich die Ausschläge keineswegs mehr proportional den Stromstärken.

Bei meinen Messungen benützte ich zwei verschiedene Empfindlichkeitsbereiche, und zwar entsprachen einem Strome von 1 Volt/min Ausschläge von 3·0 *mm*, beziehungsweise 38·0 *mm* (ersteren Bereich gebrauchte ich nur für einige mit dem stärksten Actiniumpräparat lange Zeit induzierte Bleche). Die Ausschläge waren nicht über die ganze Skala proportional den Stromstärken, sondern nur bis zirka 150 *mm*. Für höhere Ausschläge benützte ich eine sorgfältig hergestellte Eichungskurve.

III. Die Versuchsresultate.

Es standen mir drei verschiedene Actiniumpräparate zur Verfügung. Diese Präparate waren von Herrn Dr. Haitinger und Dr. Ulrich in Atzgersdorf bei Wien aus Pechblende gewonnen und aus derselben Hauptmenge, jedoch mit verschiedenen Fällungsmethoden hergestellt. Sie waren in flachen Metallschälchen aufbewahrt und bei der Aktivierung wurden kleine Silberbleche über diese Schälchen gelegt. Es wurde dafür Sorge getragen, daß dies unter vollkommenem Luftabschluß geschah, um den Einfluß des Staubes[1] tunlichst zu vermeiden.

Zur Aktivierung wurden stets ganz neue Bleche verwendet, um jeden Zweifel wegen Verunreinigung der Oberfläche auszuschließen. Die Bleche waren nicht immer gleich groß.

Die Induktionszeiten wurden zwischen 1·5 Minuten und 24 Stunden variiert.

Im folgenden seien nur einige mit dem stärksten Präparat (Nr. I) erhaltenen Abfallsbeobachtungen in extenso mitgeteilt. Von den übrigen Präparaten seien nur die bei den verschiedenen Beobachtungsreihen erhaltenen Halbierungszeiten mitgeteilt. In der Kolumne log J sind die Logarithmen der in willkürlichen Einheiten gemessenen Aktivitäten verzeichnet. t bedeutet die Zeit nach Beendung der Induktion.

[1] Brooks, Phil. Mag., 1902.

Versuchsresultate mit Präparat Nr. I.

Versuch 1.

Expositionszeit 5 Minuten. Präparat Nr. I.

Zeit zwischen Herausnehmen des Bleches und der ersten Beobachtung 4·2 Minuten.

t	log J	t	log J
4·2	2·0497	39·3	1·8382
6·8	2·0763	46·0	1·7858
10·2	2·0714	53·8	1·7141
14·8	2·0382	61·0	1·6546
21·5	1·9856	70·5	1·5786
24·6	1·9554	78·8	1·5101
30·2	1·9141	89·0	1·4250
36·5	1·8593	101·0	1·3295

Auf graphischem Wege wurde die Halbierungskonstante

$$HC = 36\cdot 1 \text{ Minuten}$$

gefunden (siehe Kurve I).

Versuch 2.

Expositionsdauer 10 Minuten. Präparat Nr. I.

t	log J	t	log J
4·0	2·3245	44·6	2·0418
7·0	2·3348	50·2	1·9994
10·2	2·3239	58·8	1·9244
13·7	2·2954	64·5	1·8782
18·2	2·2592	73·3	1·8114
23·0	2·2268	82·6	1·7280
28·7	2·1688	92·7	1·6414
34·0	2·1359	97·4	1·6017
38·4	2·0965	105·2	1·5378

Auf graphischem Wege ermittelte Halbierungskonstante:

$$HC = 36\cdot 0 \text{ Minuten}$$

(siehe Kurve II).

Versuch 3.

Expositionsdauer 7 Minuten. Präparat Nr. I.

t	log J	t	log J
3·7	2·1694	43·5	1·9046
7·1	2·1780	48·5	1·8613
11·8	2·1653	53·3	1·8222
15·3	2·1346	58·7	1·7720
18·7	2·1052	64·1	1·7288
21·7	2·0831	71·7	1·6734
25·3	2·0597	79·6	1·5945
33·6	1·9822	91·7	1·4948
39·0	1·9387		

Daraus ergibt sich

$$HC = 35 \cdot 8 \text{ Minuten}$$

(hiezu Kurve III).

Versuch 4.

Expositionsdauer 5 Minuten. Präparat Nr. I.

t	log J	t	log J
4·0	1·9554	43·0	1·6943
8·0	1·9741	48·7	1·6525
11·3	1·9637	54·4	1·6042
15·0	1·9336	61·0	1·5386
18·5	1·9000	68·8	1·4793
21·8	1·8803	75·6	1·4275
25·7	1·8465	86·2	1·3383
30·0	1·8077	94·7	1·2637
37·8	1·7449		

Aus dieser Abklingung (Kurve IV) folgt:

$$HC = 36 \cdot 2 \text{ Minuten.}$$

Versuch 5.

Expositionsdauer 4 Minuten. Präparat Nr. 1.

t	log J	t	log J
5·0	1·8855	41·0	1·6568
9·0	1·9201	45·2	1·6256
12·7	1·8831	51·0	1·5722
17·0	1·8587	56·5	1·5275
22·0	1·8111	63·2	1·4719
25·3	1·7886	70·7	1·4123
30·0	1·7449	81·0	1·3137
35·5	1·7006	99·0	1·1793

Aus der entsprechenden Kurve V ergibt sich:

$HC = 36 \cdot 0$ Minuten.

Versuch 6.

Expositionsdauer 30 Minuten. Präparat Nr. I.

t	log J	t	log J
4·0	2·5340	49·0	2·1865
10·0	2·5053	52·5	2·1599
14·8	2·4618	57·9	2·1115
19·5	2·4324	63·8	2·0626
24·5	2·3898	69·5	2·0212
29·5	2·3515	75·9	1·9678
34·2	2·3097	85·0	1·8881
38·0	2·2810	92·7	1·8252
42·5	2·2380	100·5	1·7581

Der lineare Teil der entsprechenden Kurve VI liefert die Halbierungszeit:

$HC = 36 \cdot 4$ Minuten.

Versuch 7.

Expositionsdauer 12 Stunden. Präparat Nr. I.

t	log J	t	log J
3·0	2·8014	41·0	2·5018
6·0	2·7851	46·5	2·4519
10·0	2·7622	53·0	2·4008
15·0	2·7207	59·7	2·3472
21·5	2·6666	65·6	2·2981
26·6	2·6312	75·3	2·2094
30·8	2·5866	85·3	2·1396
36·4	2·5376	99·0	2·0196

Daraus folgt (siehe Kurve VII):

$HC =$ **35·9** Minuten.

Versuch 8.

Expositionsdauer 1 Stunde. Präparat Nr. I.

t	log J	t	log J
4·0	2·6216	44·2	2·3159
8·5	2·5960	58·1	2·2036
11·5	2·5813	62·2	2·1678
16·9	2·5403	68·7	2·1066
23·0	2·4880	73·5	2·0685
31·0	2·4284	79·3	2·0259
36·3	2·3835	98·1	1·9542
39·5	2·3542	107·5	1·8751

Dieser Abklingung entspricht (Kurve VIII):

$HC =$ **36·2** Minuten.

Versuch 9.

Expositionsdauer 2·5 Minuten. Präparat Nr. I.

t	log J	t	log J
4·0	1·6930	48·4	1·4313
9·2	1·7446	52·6	1·4017
15·2	1·7045	57·5	1·3569
18·3	1 6736	65·2	1·2915
27·0	1·6092	67·7	1·2731
29·0	1·5971	76·2	1·2143
36·0	1·5307	88·7	1·1113
40·7	1·5019	99·0	1·0188
44·5	1·4709		

Hier ergibt sich (aus Curve IX):

$HC =$ **36·6** Minuten.

Versuch 10.

Expositionsdauer 1·5 Minuten. Präparat Nr. I.

t	log J	t	log J
6·2	1·6542	38·5	1·4506
10·3	1·6879	41·7	1·4175
15·0	1·6506	45·5	1·3891
18·5	1·6166	52·0	1·3296
23·5	1·5749	55·2	1·3074
27·5	1·5394	62·5	1·2466
31·5	1·5105	68·3	1·2021
35·8	1·4781	73·0	1·1590

Der lineare Teil der Kurve X ergibt:

$HC =$ **35·6** Minuten.

Ferner wurden mit Präparat Nr. I noch folgende Versuchsresultate erzielt (der Kürze wegen seien nur die auf graphischem Wege ermittelten Halbierungszeiten mitgeteilt):

Versuch 11. Präparat Nr. I.

Exposition 2 Minuten: $HC = 36 \cdot 0$ Minuten.

Versuch 12. Präparat Nr. I.

Exposition 20 Minuten: $HC = 36 \cdot 2$ Miuuten.

Versuch 13. Präparat Nr. I.

Exposition 120 Minuten: $HC = 35 \cdot 9$ Minuten.

Versuch 14. Präparat Nr. I.

Exposition 10 Minuten: $HC = 35 \cdot 8$ Minuten.

Versuch 15. Präparat Nr. I.

Exposition 6 Stunden: $HC = 36 \cdot 3$ Minuten.

Es ergibt sich somit als Mittelwert der beim Präparat Nr. I gefundenen Halbierungskonstanten (36·1, 36·0, 35·8, 36·2, 36·0, 36·4, 35·9, 36·2, 36·6, 35·6, 36·0, 36·2, 35·9, 35·8, 36·3):

Mittelwert $HC = \mathbf{36 \cdot 07}$ Minuten.

Versuchsresultate mit Präparat Nr. II.

Präparat Nr. II war bedeutend schwächer als Nr. I. Versuche mit sehr kurzer Expositionszeit konnten nicht durchgeführt werden, da dann die aktivierten Bleche viel zu schwach aktiv waren, als daß die Abklingung durch längere Zeit präzis verfolgt werden konnte, trotz der sehr empfindlichen Versuchsanordnung.

Ich erhielt folgende Resultate:

Expositionsdauer 10 Minuten:

Versuch 16. . . . . . $HC = 36 \cdot 3$ Minuten
» 17. . . . . . $HC = 36 \cdot 0$ »
» 18. . . . . . $HC = 36 \cdot 0$ »

Expositionsdauer 30 Minuten:

Versuch 19......$HC = 35 \cdot 9$ Minuten
» 20......$HC = 35 \cdot 9$ »
» 21......$HC = 36 \cdot 2$ »

Expositionsdauer 60 Minuten:

Versuch 22......$HC = 36 \cdot 1$ Minuten
» 23......$HC = 36 \cdot 2$ »
» 24......$HC = 35 \cdot 8$ »

Expositionsdauer 6 Stunden:

Versuch 25......$HC = 36 \cdot 0$ Minuten.

Expositionsdauer 24 Stunden:

Versuch 26......$HC = 35 \cdot 9$ Minuten
» 27......$HC = 36 \cdot 3$ »
» 28......$HC = 36 \cdot 0$ »

Als Mittelwert (Versuche 16 bis 28) für Präparat Nr. II ergibt sich mithin:

$HC =$ **36·05** Minuten.

Versuchsresultate mit Präparat Nr. III.

Präparat Nr. III war ungefähr halb so stark wie Nr. I, doch gestattete die empfindliche Anordnung des Elektrometers noch, mit vollständiger Sicherheit auch Induktionskurven bei sehr kurzer Expositionsdauer aufzunehmen. Die Ergebnisse sind in vollständiger Übereinstimmung mit den bisher mitgeteilten Resultaten.

Es wurden folgende Halbierungskonstanten gefunden:

Expositionsdauer 5 Stunden:

Versuch 29......$HC = 36 \cdot 1$ Minuten.

Expositionsdauer 2 Stunden:

Versuch 30......$HC = 35 \cdot 6$ Minuten
» 31......$HC = 36 \cdot 2$ »

Expositionsdauer 1 Stunde:

Versuch 32......$HC = 36 \cdot 3$ Minuten.
» 33......$HC = 36 \cdot 0$ »

Expositionsdauer 25 Minuten:

Versuch 34......$HC = 36 \cdot 2$ Minuten.

Expositionsdauer 15 Minuten:

Versuch 35......$HC = 36 \cdot 4$ Minuten.

Expositionsdauer 10 Minuten:

Versuch 36......$HC = 36 \cdot 1$ Minuten.

Expositionsdauer 5 Minuten:

Versuch 37......$HC = 36 \cdot 5$ Minuten
» 38......$HC = 36 \cdot 2$ »
» 39......$HC = 35 \cdot 8$ »
» 40......$HC = 35 \cdot 9$ »

Mittelwert für Präparat Nr. III:

$HC =$ **36·11** Minuten.

IV. Diskussion und Zusammenfassung der Resultate.

1. Meine an drei verschiedenen Ac-Präparaten mittels der Bronson'schen Methode aufgenommenen 40 Induktionskurven ergeben für den rein exponentiellen Teil nur wenig voneinander abweichende Halbierungskonstanten.

Es wurde gefunden für

Präparat I: $HC = 36 \cdot 07$ Min. (Mittelwert aus 15 Versuchen),
» II: $HC = 36 \cdot 05$ » (» » 13 »),
» III: $HC = 36 \cdot 11$ » (» » 12 »).

Somit als Gesamtmittel der Halbierungskonstante von Ac*A*:

$HC =$ **36·07** Minuten.

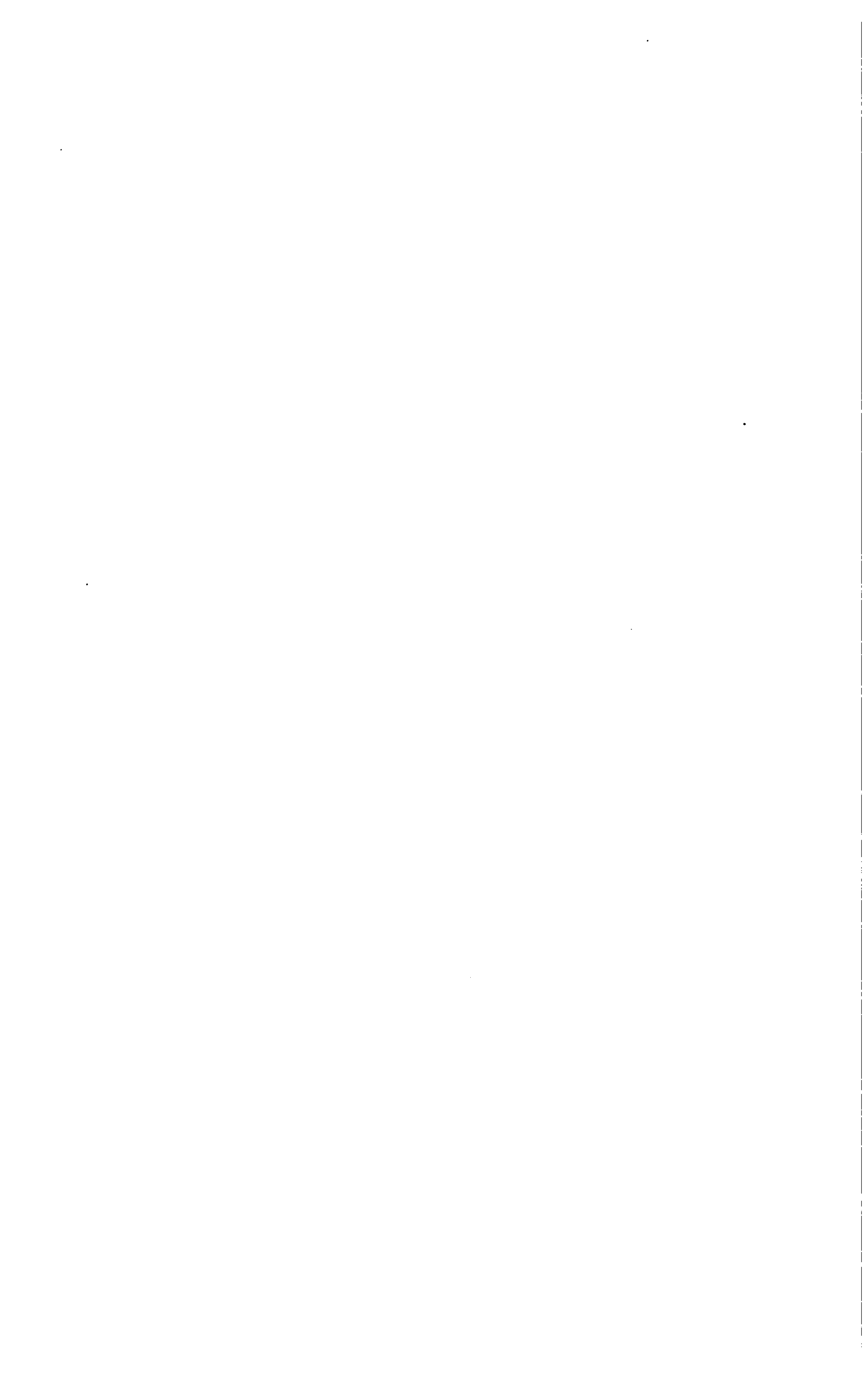
Die extremsten der gefundenen Werte waren 35·6 und 36·6 Minuten.

2. Die innerhalb weiter Grenzen vorgenommene Variierung hinsichtlich der Aktivierungszeit hatte, wie aus der folgenden Zusammenstellung ersichtlich, auf die Halbwertszeit keinerlei konstatierbaren Einfluß.

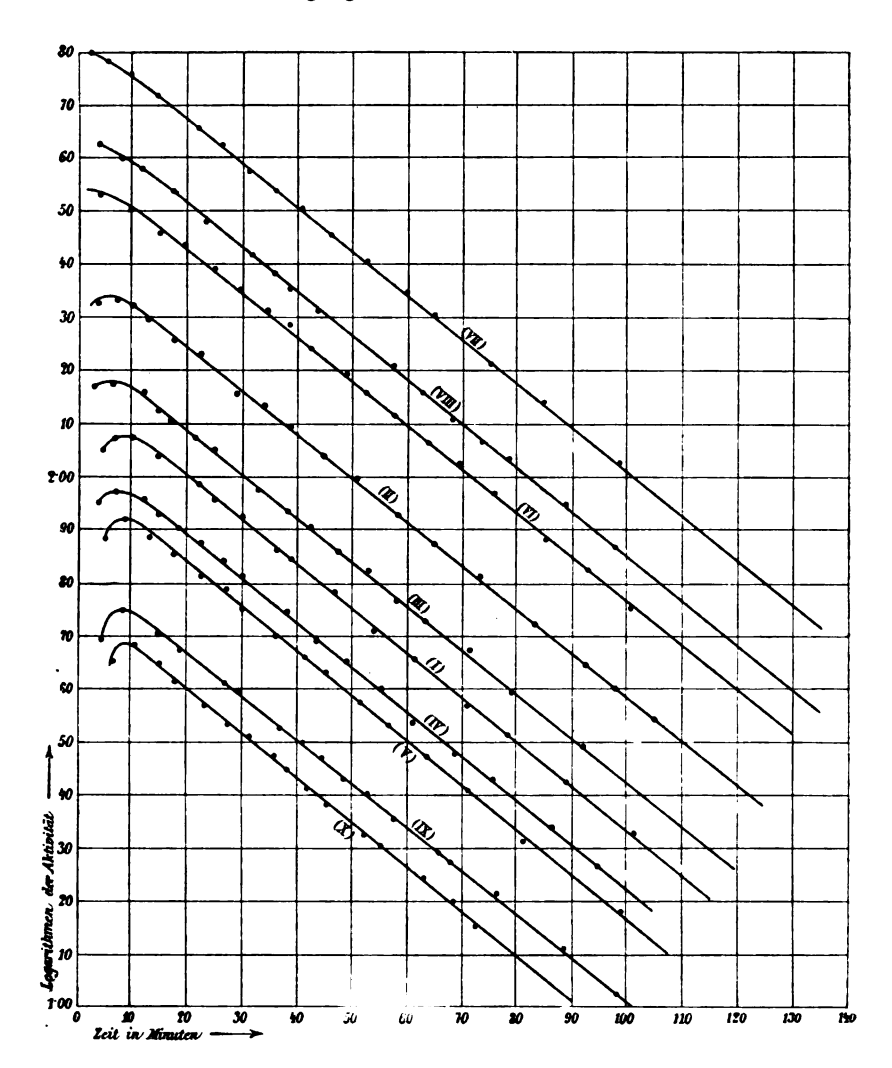
Dauer der Aktivierung	Gefundene Halbwertszeiten
1 bis 5 Minuten	36·1, 36·2, 36·0, 36·6, 35·6, 36·0, 36·5, 36·2, 35·8, 35·9, im Mittel **36·09** Minuten
5 bis 10 Minuten	36·0, 35·8, 35·8, 36·3, 36·0, 36·0, 36·1, im Mittel **36·00** Minuten
10 bis 60 Minuten	36·4, 36·2, 36·2, 35·9, 35·9, 36·2, 36·1, 36·2, 35·8, 36·4, 36·2, 36·0, 36·3, im Mittel **36·14** Minuten
Länger als 60 Minuten	35·9, 35·9, 36·3, 36·0, 35·9, 36·3, 36·0, 35·6, 36·2, 36·1, im Mittel **36·02** Minuten

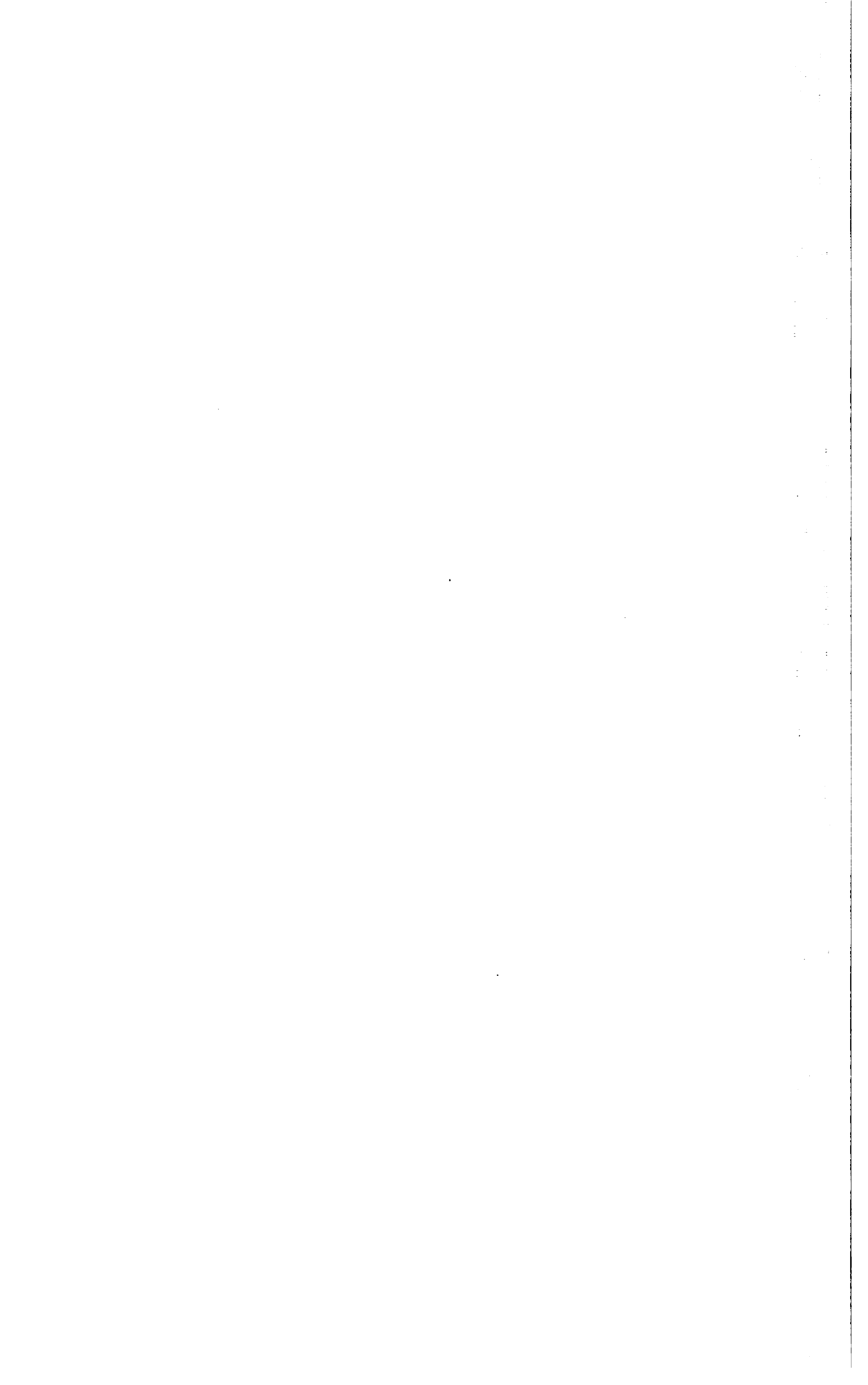
3. Es erscheint somit fraglich, ob die die Beobachtungsfehler übersteigenden Abweichungen in den bisher in der Literatur angegebenen Werten der Halbierungskonstante von Ac *A* auf tatsächliche Verschiedenheiten (Beimengung von unbekannten radioaktiven Stoffen) bei Actiniumpräparaten verschiedener Darstellungsweise begründet sind.

4. Die Versuche sollen fortgesetzt werden, sobald mir noch andere Präparate ganz verschiedener Provenienz zur Verfügung stehen.



Zeitliche Abklingung der induzierten Aktivität von Actinium.





Der Peltiereffekt Nickel-Kupfer zwischen 20 und 450° C.

von

Dr. Paul Cermak.

(Mit 1 Textfigur.)

Aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. Juni 1907.)

Anschließend an meine Arbeit über den Peltiereffekt Eisen-Konstantan zwischen 0 und 560° C.[1] bestimmte ich für denselben Bereich der Temperatur den Peltiereffekt Nickel-Kupfer. Es wurde bei dieser Arbeit genau die gleiche Versuchsanordnung benutzt, wie bei der früheren.

In einem elektrischen Ofen befand sich ein Lecher'sches[2] Kalorimeter. In dasselbe ragte die eine Lötstelle eines Nickel-Kupferelementes zur Bestimmung des Peltiereffektes und ein 0·06 *mm* dünnes Konstantandrähtchen, mit dessen Hilfe die Joule'sche Wärme eines bestimmten Stromes gemessen wurde. Als Badflüssigkeiten für das Kalorimeter wurden auch diesmal bis 200° C Petroleum, bis 380° C. Reten und bis 450° C. Chrysen verwendet. Auch betreffs der Beobachtungsweise und der Auswertung des Peltiereffektes genügt es wohl, auf meine frühere Arbeit zu verweisen.

Kürzlich wurde von Herrn Rziha[3] im hiesigen Institute der Peltiereffekt Nickel-Kupfer zwischen den Temperaturen

---

[1] P. Cermak, diese Sitzungsberichte, Bd. CXV, Abt. IIa, p. 657 (1907).

[2] E. Lecher, diese Sitzungsberichte, Bd. CXVI, Abt. IIa, p. 1506 (1906).

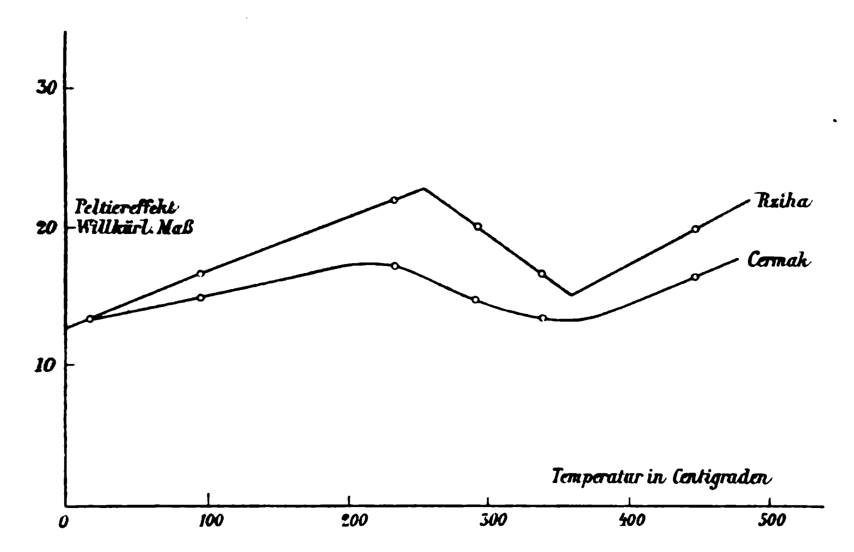
[3] K. Rziha, diese Sitzungsberichte, Bd. CXVI, Abt. IIa (1907).

200 und 800° C. beobachtet. Seine Methode, die sich gut eignet, den Verlauf der Abhängigkeit von der Temperatur zu untersuchen, läßt keine Bestimmung absoluter Werte des Peltiereffektes zu. Ich habe bei meinen Untersuchungen nur sechs Punkte herausgegriffen, und zwar die bei Zimmertemperatur, bei 95° C., bei 235, 290, 340 und 445° C. Es wurden zur Gewinnung der Werte bei diesen Temperaturen jedesmal mindestens zehn Beobachtungen gemacht, deren Mittel den wirklichen absoluten Wert wohl mit großer Sicherheit angeben dürften. In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse verzeichnet:

	Temperatur					
	19° C.	95° C.	235° C.	290° C.	340° C.	445° C.
Einzelne Werte in Grammkalorien. 10^{-3}	2·04	2·23	2·53	2·07	1·97	2·27
	2·08	2 12	2·38	1·94	1·84	2·42
	2·05	2·27	2·49	2·13	1·92	2·35
	1·70	2·09	2·29	2·15	2·07	2·42
	1·83	2·18	2·52	1·98	1·82	2·29
	1·98	2·14	2·45	2·06	1·88	2·38
	1·87	2·08	2·41	2·22	1·96	2·46
	1·83	2·20	2·53	2·02	1·94	2·50
	2·00	2·13	2·49	1·99	1·85	2·35
	1·81	2·07	2·44	2·08	1·87	2·41
Mittelwerte . .	1·92	2·15	2·45	2·06	1·91	2·38

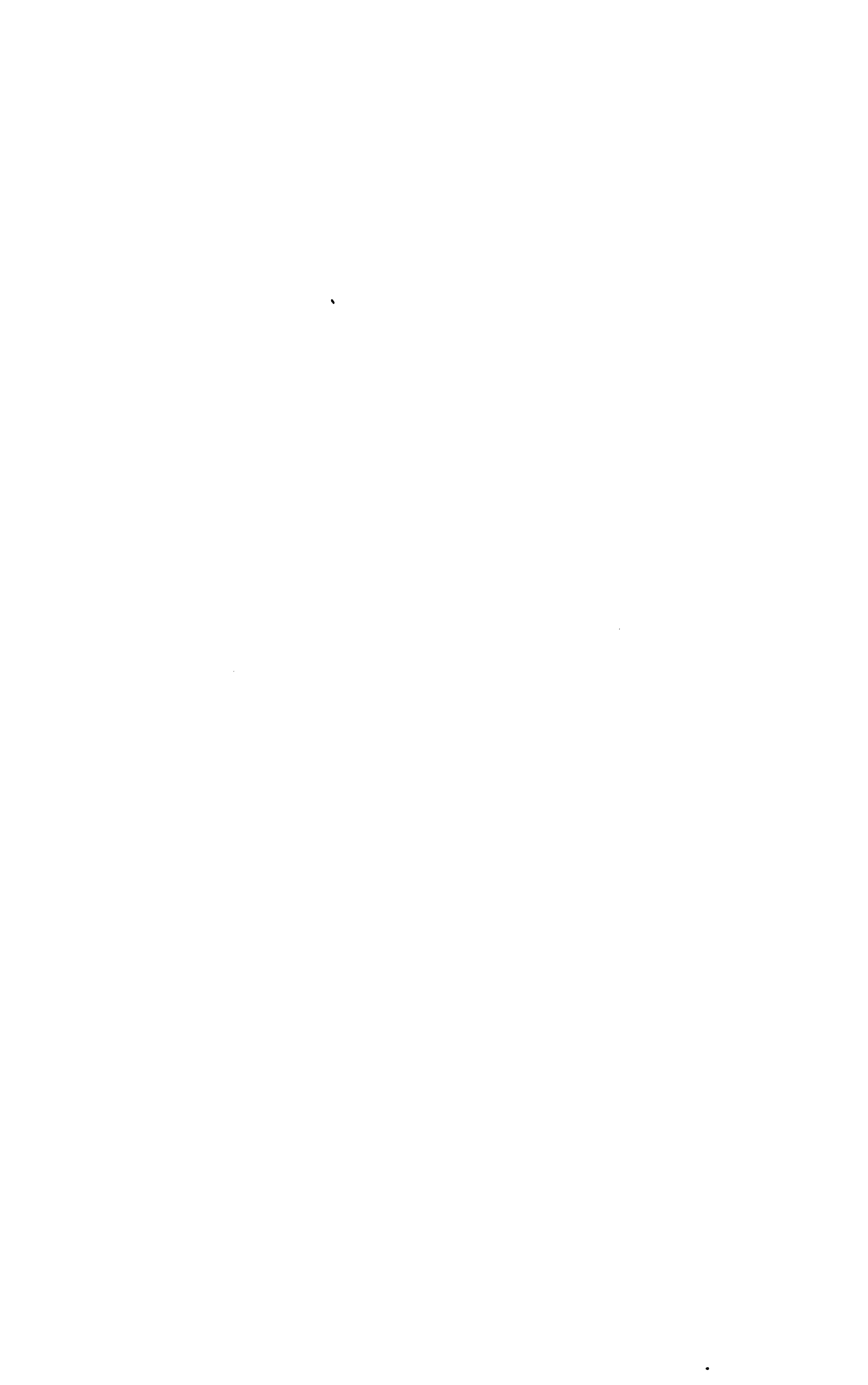
Die so gewonnenen Werte zeigen eine hinlängliche Übereinstimmung mit denen, die K. Rziha gefunden hat. Um dies zu zeigen, ist in das nebenstehende Diagramm der Verlauf beider Versuchsreihen eingezeichnet mit der Annahme, daß

die Werte bei Zimmertemperatur, die sich am genauesten bestimmen lassen, übereinstimmen. Jedenfalls kommt bei



beiden Methoden das zweimalige Umwenden der Kurve zu deutlichem Ausdrucke.

Herrn Prof. Lecher bin ich für vielseitige Förderung während der Untersuchungen zu großem Danke verpflichtet.



Über eine der Brown'schen Molekularbewegung in den Flüssigkeiten gleichartige Molekularbewegung in den Gasen und deren molekularkinetischer Erklärungsversuch

von

Dr. **Felix Ehrenhaft.**

Aus dem I. physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Juli 1907.)

Die kinetische Theorie der Gase überträgt die Gesetze der Bewegung und des Stoßes greifbarer Massen auf die Moleküle der Gase. Es wird wohl kaum je der Beweis erbracht werden können, daß die Gasmolekeln selbst sich mit den ihnen zugedachten Eigenschaften bewegen und damit die kinetische Theorie der Materie von einer der fruchtbarsten heuristischen Hypothesen zu einer die Naturwahrheiten beschreibenden Wissenschaft erhoben werden. Bisher hat man die Berechtigung der Voraussetzungen einzig durch das Zutreffen der Konsequenzen anerkannt.

Und doch gibt es ein den Mikroskopikern wohlbekanntes Phänomen, die Brown'sche Molekularbewegung in den Flüssigkeiten, die stets wieder an die Naturwahrheit der molekularkinetischen Hypothesen gemahnt. Trotz vielfacher experimenteller Untersuchungen sind diese Studien zu keinem abschließenden Resultate gelangt, da die kinetische Theorie der Flüssigkeiten heute noch nicht so weit entwickelt ist, um aus ihr irgend welche sichere Schlüsse auf das Brown'sche Phänomen zu ziehen oder vor allem umgekehrt aus den experimentellen Untersuchungen des letzteren Rückschlüsse auf die

kinetische Theorie der Flüssigkeiten zu machen. Dagegen ist die kinetische Theorie der Gase heute bis zu hoher Vollendung gediehen, so daß eine Untersuchung der Konsequenzen der kinetischen Theorie hier aussichtsreicher erscheint.

Eine der Brown'schen Molekularbewegung in den Flüssigkeiten gleichartige Erscheinung in den Gasen war aber bis heute noch nicht nachgewiesen.[1] Erhöhtes Interesse für dieses Phänomen wird hauptsächlich durch zwei Untersuchungen von Einstein[2] und Smoluchowsky angeregt, die beide auf verschiedenen Wegen zu ähnlichen Resultaten gelangen.

R. v. Smoluchowsky berechnet nach einer ganz umfassenden Kritik der experimentellen und theoretischen Arbeiten über die Brown'sche Bewegung in den Flüssigkeiten auf Grund von kinetischen und Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen das mittlere Quadrat Λ^2 der Entfernung eines Teilchens, das in einem Medium suspendiert ist, aus seiner Anfangslage. Hierbei sind zwei typische Fälle zu unterscheiden. Entweder ist der Radius des Teilchens groß gegen die mittlere Weglänge der umliegenden Molekeln. Dann sind die Zusammenstöße des Teilchens mit den Molekeln nicht ganz zufällig; ein Fall, bei dem die Rechnung keine exakte Durchführung gestattet und der realisiert wäre bei den Suspensionen in Flüssigkeiten, da die in denselben mikroskopisch oder ultramikroskopisch sichtbaren Teilchen stets Dimensionen haben, die groß sind gegen die mittlere Weglänge der Flüssigkeitsmolekeln. Aus bereits vorerwähnten Gründen ist dieser Fall auch nicht von so großem Interesse.

Oder der Radius des in dem Medium suspendierten Teilchens ist klein gegen die Weglänge der umliegenden Molekeln. Die einzelnen Zusammenstöße sind dann voneinander völlig unabhängige Ereignisse. Man kann dann die kleinen suspendierten Teilchen als Indices der ungeordneten Bewegung der umliegenden Molekeln betrachten und es könnte dieser Fall etwa als Modell der Bewegung von Molekülkomplexen in einem Gase gelten.

---

[1] M. v. Smoluchowsky, Ann. d. Physik, 1906, p. 774.

[2] A. Einstein, Ann. d. Physik, 17, p. 549 (1905); 19, p. 371 (1906).

Bei der Kleinheit der mittleren Weglänge der Flüssigkeitsmolekeln und bei der Grenze, die der Mikroskopie gesetzt ist, erhellt, daß dieser Grenzfall, der ein Bild der ungeordneten Bewegung der Molekeln geben könnte, nur in einem gasförmigen Medium zur Beobachtung gelangen kann.

Der erste Schritt wäre also der Nachweis der Existenz einer Molekularbewegung in den Gasen, die der Brown'schen Bewegung in den Flüssigkeiten analog ist, ein Nachweis, der mit den heutigen Mitteln vom Verfasser auf nachfolgende Weise gelungen ist:

Für die Beobachtung scheint die ultramikroskopische Methode am zweckmäßigsten. Die obere Quarzplatte der Küvette, die für ultramikroskopische Untersuchungen von Flüssigkeiten bei Zeiß erhältlich ist, wurde abgehoben und die Küvette sodann direkt an die Frontlinie des Mikroskopobjektives *C* gekittet.

So konnte durch einen Aspirator ein Gasstrom unmittelbar an der Frontlinie des Ultramikroskopes vorbeigeführt und durch Schließen von Glashähnen vor und nach der Küvette zur Ruhe gebracht werden. Es zeigt sich, daß bei genügender Enge der zuführenden Rohre und Bohrungen der Hähne die Gasmasse fast unmittelbar zur Ruhe gelangt. Saugt man etwa eine Zigarettenrauch enthaltende Gasmasse durch die Küvette, so ist es unschwierig, auf dieselbe Weise wie bei den Flüssigkeiten Beugungsbilder der ultramikroskopisch sichtbar werdenden Teilchen scharf einzustellen.

Man beobachtet nun bei Teilchen aller Substanzen von ultramikroskopischer und vielleicht etwas größerer Größenordnung eine lebhaft vibrierende tanzende zitternde Bewegung und die dadurch bedingte Ortsänderung der einzelnen Teilchen, die in ganz ungeordneter Bewegung begriffen erscheinen, wenn genügende Vorsichtsmaßregeln jede Strömung und Konvektion verhindern. Das ganze Phänomen bietet ein Bild, das völlig mit dem Eindruck übereinstimmt, den man der Brown'schen Molekularbewegung in den Flüssigkeiten entnimmt. Nur tritt das Phänomen in den Gasen mit bedeutend erhöhter Lebhaftigkeit auf. In der Einstellebene des Mikroskopes erscheint

das einzelne Teilchen je nach Größe als stärker oder schwächer leuchtender Punkt, der beim Verlassen der Einstellebene sich in ein System von kreisförmigen konzentrischen Beugungsringen auflöst. Jedes einzelne Teilchen erscheint in einer lebhaft zitternden Bewegung und ändert dabei seine Lage im Raume in unregelmäßigen Zickzackwegen mit Geschwindigkeiten, die um so größer sind, je weniger intensiv die Beugungsphänomene, also je kleiner das beobachtete Teilchen ist. Als gutes Demonstrationsobjekt dient Zigaretten- oder Zigarrenrauch, wenn sich die größeren Rauchteilchen bereits abgesetzt haben, ferner Salmiakdampf. Eben bei diesen Substanzen ist man jedoch nicht in der Lage, die Größe der einzelnen Teilchen zu regulieren, sondern es erscheinen Teilchen verschiedener Größe in der Luft suspendiert, die alle mit abnehmender Größe einer Molekularbewegung zunehmender Lebhaftigkeit unterworfen erscheinen. Zinkoxyddampf, erzeugt durch oszillierende Entladung zwischen Zinkkugeln, die Verbrennungsgase gewöhnlicher Bogenlampenkohlen enthalten Teilchen, die sich als Demonstrationsobjekte ebenfalls gut eignen.

Aus den Versuchen erhellt, daß man es hier mit dem Analogon der Brown'schen Molekularbewegung in den Flüssigkeiten in den Gasen, mit einer Erscheinung gleicher Allgemeinheit zu tun hat wie in den Flüssigkeiten.

Die Molekularbewegung bleibt zeitlich ebenso unveränderlich, solange die Teilchen schweben, sie ist von äußeren Umständen auf keinerlei Weise zu beeinflussen oder aufzuhalten. Wenn man irgend einen Teil des Gesichtsfeldes plötzlich stärker belichtet, was bei der ultramikroskopischen Anordnung durch seitliche Verschiebung des Beleuchtungsobjektives leicht möglich erscheint, das Phänomen ist an der frisch durchstrahlten Stelle mit gleicher Lebhaftigkeit zu finden. Der Strahlungsdruck, der bei Teilchen dieser Größenordnung bereits von Belang sein könnte, wäre doch nur im stande, Bewegungen mit einer bestimmten Richtungstendenz zu erzeugen, nie aber gerade jene charakteristische ungeordnete Bewegung, bei der Teilchen in jede Richtung gleichzeitig das Gesichtsfeld zitternd durcheilen. Wie bei den Flüssigkeiten, so ist auch hier mit zunehmender Erwärmung des Mediums

Zunahme der Lebhaftigkeit der Molekularbewegung verbunden und dies ist die einzige Möglichkeit, die Bewegung zu beschleunigen oder zu verzögern.

Die Bewegungsrichtung der Teilchen wird in gasförmigen Medien natürlich durch die Erdschwere stärker beeinflußt wie in Flüssigkeitssuspensionen. Je größer ein Teilchen, desto stärker macht sich der Einfluß geltend und desto rascher sinkt das Teilchen. Im Ultramikroskop sieht man von einem solchen Teilchen zunächst ein sehr lichtstarkes System von konzentrischen Beugungsringen, die sich, sobald das Teilchen bis in die Einstellebene des Ultramikroskopes gesunken ist, in ein punktförmiges Beugungsbild zusammenziehen. Bei weiterem Sinken löst sich dasselbe wieder in kreisförmige Beugungserscheinungen auf. Während des Faltens beobachtet man gleichzeitig, daß die Teilchen nicht in lotrechter Richtung, sondern in einer Zickzacklinie fallen. Die Bewegung superponiert sich also aus der Fallbewegung und den seitlichen Bewegungsimpulsen infolge der Molekularbewegung.

Bei kleinen Teilchen, die etwa in der ultramikroskopischen Größenordnung liegen, macht sich der Einfluß der Schwere fast gar nicht geltend. Die beobachtbare Molekularbewegung solcher Teilchen erfolgt natürlich räumlich. Es erscheint z. B. ein derartiges Teilchen in der Einstellebene als leuchtender Punkt, verläßt die Einstellebene durch Molekularimpulse und erscheint dadurch je nach der Entfernung von der Einstellebene von mehr oder weniger kreisförmigen Beugungsringen umgeben. Es ist oft sehr leicht zu beobachten, daß ebendasselbe Teilchen als punktförmiges Beugungsbild zu wiederholten Malen im Wechsel von konzentrischen Ringen umgeben erscheint, durch Molekularimpulse zu wiederholten Malen über die Einstellebene gehoben wird, sodann wieder sinkt. Die Fallbewegung wird also von der Molekularbewegung überdeckt. Ebendiese Beobachtung ist schon beim einfachsten Demonstrationsobjekt, beim Zigarettenrauch, zu machen. Die größeren Teilchen sinken in Zickzacklinien zu Boden, die kleineren bleiben in lebhafter Molekularbewegung begriffen, oft minutenlang schwebend.

Von besonderem Interesse erscheint der Fall, in dem die mittlere Weglänge der umgebenden Molekeln groß ist gegen die Lineardimension der suspendierten Teilchen.

Bedenkt man, daß die mittlere Weglänge in atmosphärischer Luft unter normalen Umständen von der Größenordnung $1 . 10^{-5}$ *cm* ist, so erhellt, da die ultramikroskopische Beobachtung in Flüssigkeiten noch Metallteilchen von der Größenordnung 10^{-6} *cm* zu erkennen gestattet, daß es prinzipiell nicht ausgeschlossen ist, Teilchen, die kleiner sind als die mittlere Weglänge in atmosphärischer Luft, in dieser zu beobachten, um so mehr als der kleinere Brechungsexponent der Luft die untere Grenze der Sichtbarmachung nur noch erweitert, also die Sichtbarkeit noch kleinerer Teilchen ermöglicht als etwa im Wasser.

Die Erzeugung derartiger Teilchen wurde durch Verdampfen von Edelmetallen im galvanischen Lichtbogen bewerkstelligt. Um definierte Substanzen beobachten zu können, wurde zwischen Silber- oder Platinelektroden von der Dicke von 5 *mm* ein galvanischer Lichtbogen hergestellt. Das verdampfende Metall kondensiert an der Luft und erfüllt dieselbe mit feinen Metallteilchen. Die Menge und Feinheit des sich entwickelnden Silberdampfes, respektive der in der Luft suspendierten Silberteilchen hängt von der Stromstärke ab. Bringt man den Strom dieser Luft durch einen Aspirator vor die Frontlinse des Ultramikroskopes, dann sieht man ein ähnliches Bild lebhafter Bewegung wie beim Zigarettenrauch. Je größer die erzeugende Stromstärke ist, desto intensiver sind die sichtbar werdenden Beugungserscheinungen, desto größer sind also die Teilchen, desto geringer ist deren Molekularbewegung und desto rascher sinken sie in Zickzacklinien zu Boden. Stellt man jedoch den Lichtbogen mit jener Minimalstromstärke her, die ihn gerade noch unterhält, dann gelingt es, Silberteilchen in der Luft zu suspendieren, die bis zu 30 Minuten schwebend bleiben, wie man sich durch wiederholtes Absaugen aus dem Gefäß, in dem man den Lichtbogen unterhielt, überzeugen kann.

Diese Teilchen entwerfen im Ultramikroskop in der Einstellebene Beugungspunkte, die gerade noch bei an Dunkelheit akkomodiertem Auge sichtbar werden, die also an der

unteren Grenze der mit dem Ultramikroskop noch sichtbar zu machenden Teilchen liegen. Dieselben sind in einer ungeordneten Bewegung begriffen, die von außerordentlicher Lebhaftigkeit ist. Es gelingt ohne Schwierigkeit, ein und dasselbe Teilchen viele Minuten lang in dieser lebhaften Bewegung auf seiner ganz unregelmäßigen Bahn zu verfolgen, bis es aus dem Bereiche des beleuchtenden Kegels kommt.

Diese Versuche erweisen in einer unzweifelhaften Weise die Existenz einer der Brown'schen Molekularbewegung in den Flüssigkeiten gleichartigen Bewegung in den Gasen. Teilchen von der Größenordnung der mittleren Weglänge der Gasmolekeln und etwas größere Teilchen fallen in einer Zickzacklinie, die Geschwindigkeit des Niedersinkens ist eine größere als die durch die Molekularbewegung bedingte Ortsänderung. Teilchen, die an der Grenze der ultramikroskopisch noch sichtbar zu machenden Größe liegen, sind in so lebhafter Molekularbewegung begriffen, daß die Fallbewegung von dieser ganz überdeckt wird. Es gelingt also in den Gasen auch insbesondere den Fall zu beobachten, bei dem die suspendierten in Molekularbewegung begriffenen Teilchen klein sind gegen die mittlere Weglänge der umliegenden Molekeln.

Es erübrigt also nur, zu untersuchen, inwieweit die experimentellen Resultate sich in quantitativer Weise mit den Resultaten der molekularkinetischen Hypothesen decken. Von den Methoden, die im Bereiche einfacher experimenteller Möglichkeit liegen, wurde zunächst jene in Ausführung gebracht, die eine direkte Bestimmung der mittleren sekundlichen Entfernung Λ eines Teilchens infolge der Molekularbewegung ergibt, um selbe mit den Resultaten der Theorie von Smoluchowsky zu vergleichen. Die naheliegendste Methode, mit einem Projektionsokular die Bahn und daher die Geschwindigkeit eines derartigen Teilchens photographisch zu fixieren, scheitert an der weitaus zu geringen Lichtintensität des von den Teilchen zerstreuten Lichtes. Es war bloß die zwar primitive Methode der direkten Messung ausführbar, die aber überraschend gute Resultate gibt. Verwendet wurde das

Zeiß'sche Okularmikrometer 4, in dem ein Netz von 18 Quadraten enthalten war. Die Seitenlänge eines Quadrates betrug bei Anwendung des Objektives *C* 16.10^{-4} *cm*.

Nachdem der Gasstrom, in dem z. B. Zigarettenrauch suspendiert ist, zur Ruhe gekommen ist, die größeren Teilchen sich abgesetzt haben, muß man sich die Sicherheit verschaffen, daß die Bewegung der im Gesichtsfelde sichtbaren Teilchen eine ungeordnete ist, die durch den Umstand zu erlangen ist, daß gleichzeitig Teilchen der verschiedensten Bewegungsrichtungen das Gesichtsfeld durcheilen. Sodann ist es unschwierig, die Bahn eines Teilchens zu verfolgen und zwei Punkte der Bahn bestimmten Punkten des Okularnetzes zuzuordnen und gleichzeitig eine Zeitmessung zu machen. Die eventuell beobachtbaren Zickzackkrümmungen der Bahn mit in Rechnung zu ziehen, ist auf das Resultat von keinem nennenswerten Einflusse.

Nimmt man unter vorerwähnten Vorsichtsmaßregeln z. B. an Zigarettenrauch die angedeuteten Messungen vor, so weichen die Einzelresultate voneinander ab. Schon die verschiedene Größe der suspendierten Teilchen bedingt Verschiedenheit der sekundlichen Ortsänderung, abgesehen von der zu erwartenden Unordnung der Geschwindigkeit ein und desselben Teilchens. Der Mittelwert einer Reihe von Messungen ergibt aber auffallend gut übereinstimmende Resultate, wie aus nachfolgender Tabelle ersichtlich, in der die eingetragenen Zahlen die in 1 sec zurückgelegte Zahl der Quadratseiten des Okularnetzes bedeuten, wenn Zigarettenrauch der österreichischen Zigarette Memphis verwendet wird.

Λ von Zigarettenrauch.

Messung .	I	II	III	IV	V
In 1 sec zurückgelegte Zahl der Quadratseiten des Okulars	1·4	2·0	1·2	1·5	1·2
	1·4	2·0	2·1	2·0	1·3
	2·3	1·4	3·0	2·0	0·8
	2·2	2·8	1·0	0·8	3·0
	1·3	2·0	1·0	1·6	1·7
	2·2	0·9		0·8	1·3
	1·2	2·8		1·5	1·4
Mittel ...	$1 \cdot 7_1$	$1 \cdot 6_4$	$1 \cdot 5_7$	$1 \cdot 4_6$	$1 \cdot 3_6$
Ortsänderung pro sec Λ ..	$2 \cdot 7.10^{-3}$	$2 \cdot 6.10^{-3}$	$2 \cdot 6.10^{-3}$	$2 \cdot 2.10^{-3}$	$2 \cdot 2.10^{-3} \frac{cm}{sec}$

$$\text{Mittlere Ortsänderung pro Zeiteinheit } \Lambda = 2 \cdot 5.10^{-3} \frac{cm}{sec}.$$

Die größte beobachtete Ortsänderung betrug $\Lambda = 4 \cdot 8.10^{-3} \frac{cm}{sec}$, die kleinste $\Lambda = 1 \cdot 3.10^{-3} \frac{cm}{sec}$.

Smoluchowsky berechnet für Teilchen von der Größenordnung $10^{-4}\, cm$ $\Lambda = 1 \cdot 4.10^{-3}$ in Luft von normaler Dichte und Temperatur. Über die Größe der Rauchteilchen genaue Angaben zu machen, ist schwierig. Da die Beobachtungen nur an den langen schwebenden Teilchen vorgenommen wurden, die jedenfalls unter der Größenordnung $10^{-4}\, cm$ liegen, erscheint eine der Brown'schen Molekularbewegung analoge Bewegung in den Gasen von einer Lebhaftigkeit, wie sie Smoluchowsky berechnete, nachgewiesen.

Von speziellem Interesse erscheint der Fall, in dem die Teilchen nachweisbar klein sind gegen die mittlere Weglänge der umliegenden Gasmolekeln, ein Fall, der bei Teilchengrößen, die an der Grenze der ultramikroskopischen Sichtbarkeit liegen, erfüllt ist. Zu diesem Zwecke wurden Silberteilchen nach früher beschriebener Methode durch die

minimalste Stromstärke erzeugt und auf dieselbe Methode deren Ortsänderung Λ in der molekularen Bewegung gemessen. Nachfolgende Tabelle enthält die Resultate.

Λ von Silberteilchen an der Grenze der ultramikroskopischen Sichtbarkeit.

Messung	I	II	III	IV
In 1 sec zurückgelegte Zahl der Quadratseiten des Okulars	2·0	2·2	1·8	2·4
	1·6	1·5	5·0	4·2
	8·4	6·2	15·0	3·0
	2·2	2·0	3·0	4·0
	3·5	6·0	1·5	5·0
	6·0	2·0	3·0	4·7
		6·6	2	2·8
		3·0	2·4	2·8
			3·3	
			7·5	
Mittel	2·9	2·7	2·9	3·0
Ortsänderung pro sec Λ..	$4{\cdot}6.10^{-3}$	$4{\cdot}3.10^{-3}$	$4{\cdot}6.10^{-3}$	$4{\cdot}9.10^{-3}\ \frac{cm}{sec}$

Es beträgt somit die mittlere Ortsänderung pro Sekunde

$$\Lambda = 4{\cdot}6.10^{-3}\frac{cm}{\text{sec}}.$$

Die angeführten Messungen sind bloß Vertreter einer langen Serie von Messungen gleichen Resultates. Man sieht auch hier die große Abweichung der einzelnen Messungen und völliges Übereinstimmen der Mittelwerte, die bei diesen wesentlich kleineren Teilchen höher liegen wie beim Zigarettenrauch.

In diesem Falle ist, da die Teilchengröße klein ist gegen die mittlere Weglänge der umgebenden Molekeln, die Formel von Smoluchowsky exakt anwendbar. Substituiert man in derselben

$$\Lambda = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{R}\sqrt{\frac{c}{N}}$$

für Luft normaler Dichte und Temperatur für $N = 4.10^{19}$, $c = 48.10^{3}$. Bedenkt man ferner, daß die in Luft suspendierten

Teilchen in erster Näherung von den in Wasser suspendierten Teilchen der kolloidalen Metalle[1] nicht erheblich abweichen werden und daß sie an der Grenze der Sichtbarkeit liegen, so substituiert man für $R = 3.10^{-6}\,cm.$[1]

Obige Formel ergibt daraus für

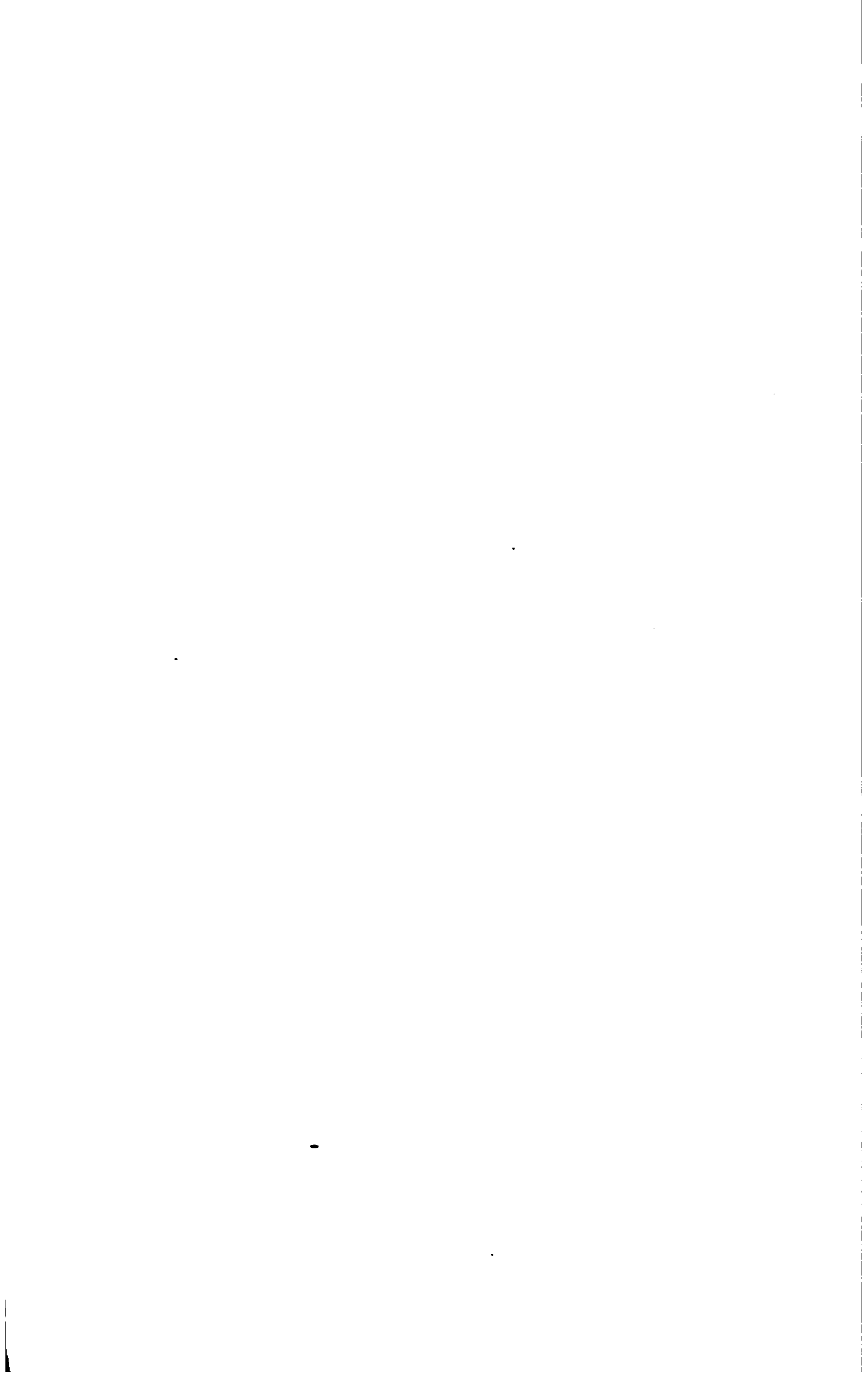
$$\Lambda = 4\cdot 8.10^{-8}.$$

Wenn man auch die Größe von R auf $100\,\%$ auf oder ab nicht genau fixieren kann, jedenfalls stehen Theorie und Experiment in einer Übereinstimmung, die in Hinblick auf die geringe Sicherheit der Zahlen der kinetischen Gastheorie als weitaus ausreichend zu bezeichnen ist.

Weitere Möglichkeit der Prüfung wäre gegeben durch Untersuchungen über die Änderung von Λ mit Temperatur oder Verdünnung, die einer zukünftigen Untersuchung vorbehalten bleiben sollen.

Wenn auch ein exakter Nachweis der Naturwahrheit der kinetischen Hypothesen erst durch Nachweis zu erbringen wäre, daß diese nicht nur die zweckmäßigsten, sondern auch die einzigen sind, die das Phänomen der Molekularbewegung suspendierter Teilchen in Flüssigkeiten und Gasen zu erklären im stande sind; jedenfalls wäre es möglich, in dieser Studie eine neue Stütze der molekularkinetischen Hypothesen zu sehen.

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CXIV, Abt. IIa, Juli 1905. F. Ehrenhaft.



Über die photographische Lichtstärke von Fernrohren

von

Dr. **Egon** R. v. **Oppolzer** in Innsbruck.

(Mit 1 Tafel.)

(Eingereicht am 18. März 1904.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Mai 1907.)

Vom Standpunkte der geometrischen Optik werden alle achsenparallel auffallenden Strahlen von einem aberrationsfreien Spiegel oder einer vollkommenen Linse in einem Punkte vereinigt. Die Lichtstärke in diesem ist jedenfalls

$$L = \gamma \cdot \frac{\pi}{4} \cdot O^2$$

zu setzen, indem von der Öffnung ein Lichtzylinder von dem Querschnitt $\frac{\pi}{4} \cdot O^2$ aufgefangen, wenn mit O der Durchmesser, die »Öffnung«, bezeichnet wird, dann hievon ein Bruchteil γ beim Spiegel reflektiert, bei der Linse durchgelassen wird, welchen Bruchteil γ wir als das »optische Vermögen« bezeichnen wollen; diese Vermögen hängen selbstverständlich von der Wellenlänge, dem spezifischen Material der optischen Flächen und bei Linsen von ihrer Dicke ab.

Die Abbildung findet aber nicht annähernd punktförmig statt, indem ja mannigfache Einflüsse, wie die Beugung am Rande der Eintrittspupille, die unregelmäßigen Strahlenbrechungen in der Atmosphäre, die Vibrationen des Instruments, die ungestörte geradlinige Ausbreitung des Lichtes verhindern.

Selbst bei idealen Luftverhältnissen und absoluter Ruhe der optischen Achse tritt das Beugungsscheibchen mit dem Durchmesser d (in linearem Maße, Millimeter) oder δ'' (im Bogenmaße, Bogensekunden) in der Fokalebene auf, für welchen die Theorie der Beugung ergibt:

$$d_0 = 2\cdot 44 . \lambda \cdot \frac{F}{O} = 2\cdot 44 . \lambda \cdot \Phi^{-1} \quad \text{in Millimeter,}$$

$$\delta_0 = \frac{2\cdot 44 . \lambda . 206265}{O} \quad \text{in Bogensekunden}$$

(λ = Wellenlänge in Millimeter, Φ = Öffnungsverhältnis).

Mit F möge die Brennweite und mit Φ das »Öffnungsverhältnis« $(O:F)$ bezeichnet werden. Für photographische Strahlen ist $\lambda = 430 . 10^{-6}\, mm$ anzunehmen, so daß

$$d_0 = 0\cdot 001049 . \Phi^{-1}, \tag{1}$$

$$\delta_0 = \frac{216\cdot 4}{O} \tag{2}$$

gesetzt werden kann. O ist dabei in Millimeter auszudrücken. Unter diesen Umständen wird die von der Eintrittspupille kommende Lichtmenge $\frac{\pi}{4} \cdot O^2$ nicht in einem Punkte, sondern in dem kleinen Beugungsscheibchen ausgebreitet; die Lichtmenge, die durch Beugung noch außerhalb des Scheibchens fällt, kommt gegen die in diesem vorhandene nicht in Betracht. Ist i die Lichtintensität pro Flächeneinheit im Scheibchen, so besteht dann die Gleichung:

$$\gamma \cdot \frac{\pi}{4} \cdot O^2 = \frac{\pi}{4} d_0^2 . i \quad \text{oder:} \quad \gamma O^2 = d_0^2 . i.$$

Die photographische Wirkung hängt aber jedenfalls nur von i ab, sobald das Beugungsscheibchen gegen das Korn der Platte groß wird, sobald es mehrere Körnchen reizt. Die Größe dieser beträgt bei grobkörnigen Platten einige Tausendstel des Millimeters. Die obige Formel (1) für das Beugungsscheibchen in linearem Maße zeigt aber, daß, wenn nicht ganz extreme

Öffnungsverhältnisse gewählt werden, in der Regel wohl stets die Körnchengröße durch den Durchmesser des Beugungsscheibchens übertroffen wird. Dann wird also die photographische Lichtstärke L:

$$L = i = \gamma \cdot \frac{O^2}{d^2} = \gamma \cdot \frac{O^2 \Phi^2}{0 \cdot 001049^2} = \frac{\gamma}{0 \cdot 001049^2} \cdot \frac{O^4}{F^2}$$

gesetzt werden können. Außer allem Zweifel gilt die Formel streng, wenn man nach der spektrophotographischen Lichtstärke fragt. Denn die Breite des Spektrographenspaltes kann schon aus mechanischen Gründen nicht unter 0·01 *mm* gewählt werden, weil dann die exakteste Pointierung nicht verbürgen könnte, daß das Sternbildchen in diesen schmalen Bezirk fällt und, da die Fokallänge der Kamera von gleicher Ordnung gewählt werden muß wie die des Kollimatorobjektivs, so bildet sich der Spalt auf der Platte mit derselben Breite 0·01 *mm* ab — infolge der Beugung am Rande der Kollimator- und Kameralinse wird diese Breite noch wesentlich vergrößert werden —; eine derartige Breite übertrifft aber die Körnchengröße so stark, daß also die spektrographische Lichtstärke zweifellos nur von Lichtstärke pro Flächeneinheit im Spalt oder, da dieser ja in der Brennebene liegt, im Beugungsscheibchen abhängt. Sollte aber dieses kleiner sein infolge einer Wahl eines extremen Φ, so wird der Spalt überhaupt nicht mit Licht ausgefüllt und eine Messung einer Linienverschiebung wird illusorisch. Bei spektrographischen Untersuchungen muß daher immer das in der Fokalebene im Spalt erzeugte Scheibchen durch irgend einen Einfluß auf die Minimalspaltbreite erweitert sein, dann ist aber die obige Formel nach den eben gemachten Erörterungen streng, wenn wir unter d_0 das tatsächliche Scheibchen als Produkt aller die geometrische Abbildung störenden Einflüsse verstehen.

Nennen wir nun den Durchmesser dieses tatsächlichen Scheibchens d, so wird er bei vollkommener Optik des Spiegels oder der Linse die Summe aus dem Durchmesser des Beugungsscheibchens und dem der Luftunruhe u sein, also:

$$d = d_0 + u' \quad \text{in Millimeter,}$$
$$\delta = \delta_0 + u \quad \text{in Bogensekunden,}$$

wo u' und u die Durchmesser in linearem und Bogenmaß des Luftunruhenscheibchens bedeuten. Das u ist nichts anderes als die doppelte Amplitude der Zitterbewegungen der Sternbildchen, wie sie durch die unregelmäßigen Strahlenbrechungen der Atmosphäre hervorgerufen werden. Da heutzutage die Technik in der Lage ist, parabolische Spiegel herzustellen, die also in der Achse aberrationsfreie Abbildung bedingen, so kann man strenge setzen:

$$L = \gamma \cdot \frac{O^2}{d^2} = \gamma \cdot \frac{O^2}{\delta^2 . F^2} \cdot 206265 = \gamma \cdot 206265 \Phi^2 \frac{1}{(\delta_0 + u)^2} =$$

$$= \gamma \cdot 206265 \frac{\Phi^2}{\left(\frac{216 \cdot 4}{O} + u\right)^2}, \quad (3)$$

weil dann nur die zwei störenden Einflüsse der Beugung und der Luftunruhe übrig bleiben. Die Vibrationen des Beobachtungsrohres können selbstverständlich keiner zahlenmäßigen Untersuchung unterworfen werden, sondern sie vermischen sich ganz mit dem Einflusse der Luftunruhe. Da in der obigen Formel L durch die Öffnung völlig bestimmt ist, so ist man in der Lage, den Einfluß der Luftunruhe auf die photographische Lichtstärke zahlenmäßig zu verfolgen. So wird z. B. das Lichtstärkenverhältnis zweier Instrumente mit den optischen Vermögen γ und γ', den Öffnungen O und O', den Brennweiten F und F' bei gleichen Luftverhältnissen sein:

$$\frac{L}{L'} = \frac{\gamma}{\gamma'} \left(\frac{\Phi}{\Phi'}\right)^2 \left(\frac{\delta'_0 + u}{\delta_0 + u}\right)^2 = \frac{\gamma}{\gamma'} \left(\frac{\Phi}{\Phi'}\right)^2 \left(\frac{\frac{216 \cdot 4}{O'} + u}{\frac{216 \cdot 4}{O'} + u}\right)^2 .$$

Führen wir das Fechner'sche Gesetz ein, so wird der Größengewinn $(L) - (L')$ des einen Instruments gegen das andere ausgedrückt sein durch:

$$\text{Größengewinn} = (L)-(L') = 2\cdot 5 \log \frac{L}{L'} =$$

$$= 2\cdot 5 \log \frac{\gamma}{\gamma'} + 5 \log \frac{\Phi}{\Phi'} + 5 \log \left(\frac{\delta_0' + u}{\delta_0 + u}\right).$$

Die obige Formel (3) zeigt, daß die Vergrößerung des Öffnungsverhältnisses ebenso wesentlich die Lichtstärke beeinflußt wie eine Vergrößerung der Öffnung, ferner daß mit zunehmender Luftunruhe die Lichtstärke überhaupt immer mehr von dem Öffnungsverhältnis allein abhängt. Diese Folgerung erscheint ja auch im vorhinein natürlich. Bei großer Luftunruhe erscheinen eben die Sterne als leuchtende Flächen. Die Helligkeit der Abbildung von leuchtenden Flächen hängt aber nach einem bekannten optischen Satze nur von dem Öffnungsverhältnis und nicht von der Öffnung ab.

Es mögen nun die aufgestellten Formeln durch ein Beispiel erläutert werden. Hiezu soll der große und kleine Potsdamer Refraktor und ein Reflektor, den ich mir zur Konstruktion vorzuschlagen erlaube, herangezogen werden.

Die optischen Konstanten für diese Instrumente sind:

	Potsdamer Refraktor		Reflektor
	großer	kleiner	
O = Öffnung in Millimeter........	800	340	400
F = Brennweite in Millimeter	12000	3400	1000
Φ = Öffnungsverhältnis	1:15	1:10	1:2·5
γ = Optisches Vermögen	0·49	0·66	0·80
δ_0 = Durchmesser des Beugungsscheibchens in Bogensekunden	0″271	0″637	0″541

Für die optischen Vermögen habe ich die in Potsdam bestimmten Werte genommen und für den Reflektor das Reflexionsvermögen 0·80, das bei frischer Politur des Silberglasspiegels sicherlich höher, selbst für die photographischen

Strahlen, anzunehmen ist. Für visuelle kann man das Reflexionsvermögen 0·90 setzen.

Rechnen wir nun nach der Formel (3) für diese drei Instrumente die entsprechenden Lichtstärken für verschiedene Luftunruhen u aus, wie sie nach den Untersuchungen Exner's und Villiger's Platz greifen können (diese Sitzungsberichte, Bd. CXI, p. 1265), so erhalten wir die folgenden, in willkürlichen Einheiten ausgedrückten Lichtstärken:

I. Lichtstärken (in willkürlichen Einheiten).

	Luftunruhe u =			
	0″ (ideal)	1″	3″	5″
Großer Refraktor	2·965	0·135	0·020	0·008
Kleiner Refraktor	1·627	0·246	0·050	0·021
Reflektor	43·732	5·390	1·021	0·417

Hieraus wird der ungemein starke Einfluß der Luftunruhe ersichtlich.

Ebenso erkennt man die enorme Überlegenheit der Instrumente mit großem Öffnungsverhältnisse. Schon bei ganz normaler Luft ($u = 1''$) wird der große Refraktor fast unbrauchbar, nur bei idealer Luft ($u = 0''$), die an den seltenen Abenden, an denen das Beugungsscheibchen sichtbar ist, herrschen würde, wäre der große Refraktor etwas überlegen. Dies haben auch die Potsdamer Beobachtungsresultate ergeben. Noch deutlicher wird der Einfluß der Luftunruhe aus der folgenden Tabelle hervorgehen, welche den Größenverlust bei der Luftunruhe u gegen die ideale Luft angibt:

II. Größenverlust infolge der Luftunruhe.

	Luftunruhe				
	1″	2″	3″	4″	5″
Großer Refraktor......	3·35	4·62	5·41	5·99	6·44
Kleiner Refraktor......	2·05	3·08	3·78	4·31	4·73
Reflektor	2·27	3·36	4·08	4·62	5·05

Bedenkt man nun, daß aus den obigen Lichtstärken sich folgende Größengewinne (siehe Tabelle III) ergeben und ferner, daß die Potsdamer Instrumente die vierte Sterngröße kaum zu erreichen im stande sind, so ersieht man aus der Größenverlusttabelle (II), daß der große Refraktor bei Luft $u = 2''$, der kleine schon bei $u = 3''$ fast untauglich, der Reflektor aber stets tauglich bleibt, weil er gegen den kleinen Refraktor einen Größengewinn von über drei Größenklassen erreicht und hiemit nahe die siebente Größe zu messen gestattet; bei der extremen Luftunruhe $u = 5''$ gehen aber erst fünf Größen verloren, so daß noch die hellsten Sterne bis zweiter Größe untersucht werden können. Es ist dies ein großer Vorteil des Reflektors, daß er selbst bei unruhiger Luft, die sehr häufig an klaren Abenden herrscht, zu spektrographischen Arbeiten herangezogen werden kann.

III. Größengewinne.

Luftunruhe	Großer—kleiner Refraktor	Kleiner Refraktor—Reflektor
$u = 0''$	+0·65	—3·57
1	—0·65	—3·35
2	—0·88	—3·30
3	—0·97	—3·28
4	—1·03	—3·26
5	—1·06	—3·26

Das derzeit wohl photographisch lichtstärkste Instrument dürfte das Bruce-Teleskop in Heidelberg sein mit 16 Zoll Öffnung und 1:5 Öffnungsverhältnis der dreilinsigen Objektive Petzval'schen Typus. Das Öffnungsverhältnis des Reflektors ist also doppelt so groß und die Öffnung von nahe gleicher Größe. Durch dieses extremere Öffnungsverhältnis gewinne ich gegen das Bruce-Teleskop 1·5 Größen, welcher Größengewinn infolge der hiebei noch nicht berücksichtigten Einflüsse der optischen Vermögen zu niedrig angesetzt ist. Im folgenden werden dieselben berechnet werden.

Es erübrigt nun zu untersuchen, ob nicht die Wahl eines Linsensystems mit extremem Öffnungsverhältnis einem Spiegel vorzuziehen ist. Vor allem hatte mich ursprünglich folgende Überlegung geleitet. Bei spektrographischen Messungen, wo der Spalt sich in der optischen Achse unmittelbar befindet, braucht die Abbildung also nur dort in der Achse vollkommen zu sein, außerhalb können die Abbildungsfehler beliebig hohe Werte erreichen. Es legt dies nahe, daß man durch diesen günstigen Umstand das Linsensystem (infolge Fortfallens der Sinusbedingung) einfacher und hiemit lichtstärker gestalten kann. Auf Grund dieser Bedingungen schlug ich der Firma Zeiß ein zweilinsiges Objektiv vor, das auch durch ihren Mitarbeiter, Herrn König, berechnet und das ich auch in kleinem Maßstab ausführen ließ.

Die damit erzielten Resultate, die ich ebenfalls einem Mitarbeiter der Firma, Dr. Villiger, verdanke, zeigen die große Überlegenheit dieses Objektivs an Lichtstärke, sogar auch etwas an Präzision der Abbildung gegen das beste heutige System, das Zeiß'sche Planar, selbstverständlich in unmittelbarster Nähe der Achse. Beide hier wiedergegebenen Aufnahmen wurden gleichzeitig mit gleicher Öffnung beider Objektive gemacht, sind also streng vergleichbar. Die große Lichtstärke wird sofort durch die bedeutendere Schwärzung des Himmelsgrundes erkannt. Handelt es sich also bei Untersuchungen nicht um ein großes Gesichtsfeld, sondern um möglichste Lichtstärke in der Achse, so bringt die Anwendung eines dreilinsigen Objektivs unnötige Nachteile und man wird mit Vorteil zu dem zweilinsigen, eben besprochenen Objektiv greifen. Solcher Untersuchungen gibt es ja außer den spektrographischen noch viele. Bei der photographischen Photometrie einzelner Objekte, z. B. kleiner Planeten oder einzelner Nebelteile oder Partien des Zodiakallichtes u. s. w. oder variabler Sterne. Trotz dieser ermutigenden Resultate bin ich auf den Vorschlag der Firma Zeiß, einen Spiegel zu wählen, aus folgenden Gründen eingegangen:

Sind N brechende Flächen mit dem Brechungsexponenten n vorhanden, so wird von dem auffallenden Lichte durch Reflexionsverlust nach Fresnel

$$\left(1-\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\right)^N$$

durchgelassen. Bestehen die Flächen aus verschiedenen Glassorten, wie dies ja bei achromatischen Systemen sein muß, so kann man für n das Mittel der einzelnen Brechungsexponenten setzen, um dem Einflusse der Reflexion genügend Rechnung zu tragen.

Außerdem geht Licht durch Absorption in den Glasmassen verloren; ist die durchschnittliche Dicke der Linse D und der durchschnittliche Absorptionskoeffizient $\varkappa$, so geht nur der Bruchteil $e^{-\varkappa D}$ des in die Glasmasse eben eingedrungenen Lichtes durch. Es wird daher die durchgelassene Intensität I aus der auffallenden I_0 wie folgt gefunden:

$$I = I_0\left\{1-\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\right\}^N \cdot e^{-\varkappa D}.$$

Nun ist aber $I:I_0$ das, was wir optisches Vermögen genannt haben, also weiter:

$$\gamma = \frac{I}{I_0} = \left\{1-\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\right\}^N \cdot e^{-\varkappa D}.$$

Die Dicke D ist aus technischen Gründen abhängig von der Öffnung; man kann als Durchschnittsresultat

$$D = 0{\cdot}075 \times O$$

für eine Linse setzen, so daß bei N Linsen

$$D = 0{\cdot}075 \times N \times O$$

angenommen werden kann. Hiedurch wird die Lichtstärke nach Formel (3):

$$L = \left\{1-\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\right\}^N \cdot e^{-0{\cdot}075\varkappa . N . O} . 206265 \cdot \frac{\Phi^2}{(\delta_0+u)^2}.$$

Nach Vogel's Untersuchungen (Sitzungsber. Akad. Berlin, 1896, p. 623) kann man für die Jenenser Gläser setzen:

	Visuell		Photographisch	
	n	ε	n	ε
Flint »Oppolzer« 340........	1·5835	0·840	1·6010	0·615
Crown »Planar« 203........	1·5210	0·850	0·5320	0·692
Mittel........	1·552	0·845	1·5665	0·6535

wobei ε die Diathermasie bezeichnet, bezogen auf eine Planplatte von 100 *mm*. Hiemit ist:

$$\varepsilon = e^{-100\varkappa},$$

so daß sich der Absorptionskoeffizient $\varkappa$ auf 1 *mm* Dicke bezieht. Mit diesen numerischen Daten wird die Lichtstärke visuell:

$$L = 0 \cdot 9532^N e^{-0 \cdot 000126307 . O . N} . 206265 \cdot \frac{\Phi^2}{(\delta_0 + u)^2},$$

photographisch:

$$L = 0 \cdot 9513^N e^{-0 \cdot 00031906 . O . N} . 206265 \cdot \frac{\Phi^2}{(\delta_0 + u)^2}$$

eines achromatischen Objektivs mit N Linsen, der Öffnung O und des Öffnungsverhältnisses Φ gefunden. Bequemer ist es, wenn wir die Lichtstärke (L) wieder in Größenklassen ausdrücken, so daß die Lichtstärke in Größenklassen visuell:

$$(L) = -0 \cdot 05202 . N - 0 \cdot 0001372 . O . N + 5 \log \Phi - \\ -5 \log \left(\frac{289 \cdot 4}{O} + u \right),$$

photographisch:

$$(L) = -0 \cdot 05425 . N - 0 \cdot 0006928 . O . N + 5 \log \Phi - \\ -5 \log \left(\frac{216 \cdot 4}{O} + u \right)$$

ist.

Aus dieser Formel findet man leicht, daß von etwa 18 *m* Öffnung an eines zweilinsigen Systems eine Vergrößerung der Öffnung einen Lichtverlust mit sich bringt, während diese Grenze für photographische Systeme bei 7 *m* Öffnung erreicht wird.

Ferner ersieht man sofort, daß Silberspiegel mit einem Lichtverlust von 10% ($\gamma = 0 \cdot 90$) für visuelle Strahlen unter sonst gleichen Umständen (gleicher Öffnung, gleichem Öffnungsverhältnis, gleicher Luftunruhe) stets einem achromatischen System überlegen sind, weil ihr Vermögen (0·90) in Größenklassen —0·1164, also stets größer für alle Öffnungen als bei einem vierlinsigen ($N = 4$) (—0·20808) ist.

In der Achse ist ein Silberspiegel stets einem Linsensystem an Lichtstärke für *visuelle* Beobachtung überlegen. Hiezu kommt noch der Vorteil, daß bei ersterem jeder chromatische Fehler beseitigt ist. Vorausgesetzt ist natürlich hiebei die Tatsache, daß heute ein in der Achse aberrationsfreier (also parabolischer) Spiegel herstellbar ist.

Für die photographischen Strahlen ergibt sich eine bei kleinen Öffnungen geringe Überlegenheit der Linse, weil für diese Strahlen das Reflexionsvermögen ziemlich geringer ist (= 0·80). Man erhält wieder leicht aus der obigen Formel, daß von 33 *mm* Öffnung an ein Silberspiegel einem Objektiv in der Achse überlegen ist.

Aus der folgenden Tabelle (p. 1162) wird der Größengewinn: Spiegel minus zwei- respektive dreilinsigem Objektiv ersichtlich.

Aus dieser Tabelle zeigt sich eine entschiedene Überlegenheit des Spiegels von 300 *mm* Öffnung an, die noch durch den Vorteil der vollständigen Achromasie und der Abwesenheit von Zentrierungsfehlern nicht unwesentlich erhöht wird; nachdem ferner heutzutage eine frische Versilberung leicht vor jedem Beobachtungsabende vorgenommen werden kann, so unterliegt es keinem Zweifel, daß die Spiegelteleskope einer großen Zukunft entgegensehen. Die früheren teilweisen Mißerfolge lagen in schlechtem Reflexionsvermögen, nicht minder aber daran, daß die Spiegeldicke viel zu gering genommen wurde, so daß Verbiegungen eintraten.

Größengewinn.

Öffnung in Millimeter	Spiegel — zweilinsiges Objektiv		Spiegel — dreilinsiges Objektiv	
	visuell	photographisch	visuell	photographisch
25	+0·00	—0·01	+0·15	—0·01
50	·11	+0·01	·16	+0·02
75	·12	·03	·17	·04
100	·12	·04	·18	·07
200	·15	·11	·22	·17
300	·18	·18	·26	·27
400	·20	·25	·31	·38
500	·23	·32	·35	·48
1000	·37	·67	·55	1·00
2000	·64	1·36	·96	2·04
3000	·92	2·05	1·37	3·08

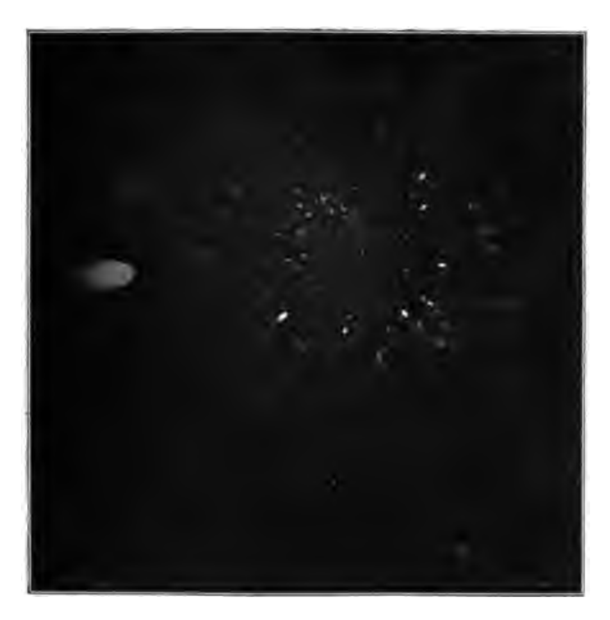
Bei 400 *mm* Öffnung gewinne ich also noch gegen das Heidelberger dreilinsige Bruce-Teleskop 0·38 Größen, durch das extremere Öffnungsverhältnis 1·50 Größen, also zusammen fast zwei Größenklassen. Der Reflektor dürfte also auch das photographisch lichtstärkste Instrument werden, falls nicht ein ähnliches von noch größerer Öffnung gebaut werden sollte. Allerdings wird das ausnutzbare Gesichtsfeld bloß einige Zehntelgrade betragen, indem bei derartig extremem Öffnungsverhältnisse die Bilder schon nahe der Achse unbrauchbar werden.

Wird nun dieser Reflektor zu spektrographischen Untersuchungen herangezogen und soll seine volle Lichtstärke ausgenutzt werden, so muß das Öffnungsverhältnis der Kollimatorlinse des Spektrographen dem des Spiegels gleich sein. Da die Kamerabrennweite, wenn die Genauigkeit (mittlerer Fehler)

einer Linienmessung ± 1 *km* etwa betragen soll, etwa 400 *mm* lang sein muß bei einer Dispersion $1\,\mu\mu = 400''$, so müßte als Öffnung der Kollimator- und Kameralinse 160 *mm* genommen werden, die Höhe der Prismen ebensogroß. Da dies unter keinen Umständen ratsam wäre, so geht man mit Vorteil zu größeren Dispersionen, d. h. mehr Prismen über und kann dann kleinere Brennweiten wählen. Der Spektrograph soll folgendermaßen konstruiert werden:

Brennweite der Kollimatorlinse 40 *mm*, ihre Öffnung 16 *mm*; dieselbe Öffnung naturgemäß die Kameralinse mit 80 *mm* Brennweite. Es wird mit ihm allerdings der mittlere Fehler einer Geschwindigkeitsmessung auf das Dreifache, ± 3 *km*, steigen, aber die Helligkeit des Spektrums wird so erhöht, daß noch zwei Größenklassen gewonnen werden können. Es steht also zu erwarten, daß ich mit ihm die neunte Größe erreichen kann mit einer für statistische Untersuchungen ausreichenden Genauigkeit, da die durchschnittliche Sterngeschwindigkeit über 16 *km* pro Sekunde beträgt.





Mit Objektiv »Oppolzer«.



Mit Objektiv »Planar«.

Beitrag zur Theorie des Pfaff'schen Problems

von

Karl Carda in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Juli 1907.)

Im folgenden sollen einige Bemerkungen zur Theorie des Pfaff'schen Problems mitgeteilt werden. Zunächst wird ein Theorem über eine Zerlegung der Punkttransformationen des n-fachen Raumes bewiesen. Dieses Theorem führt zu einer Vereinfachung des von Herrn Frobenius gegebenen Beweises der Invarianz von $\varkappa, \varkappa_1, \varkappa_2$ des Pfaff'schen Problems. Hieran schließt sich ein gruppentheoretischer Beweis eines Theorems von H. Grassmann über schiefsymmetrische Determinanten. Das Theorem von Cayley ergibt sich als einfache Folge. Schließlich wird eine sich von selbst darbietende Verallgemeinerung des Grassmann'schen Theorems angegeben.

1.

Wir wollen das folgende Theorem beweisen:

Theorem.

Jede Punkttransformation des n-fachen Raumes R_n ist bei passender Bezeichnung der Variabeln äquivalent der Aufeinanderfolge von n Punkttransformationen des R_n, wobei immer nur je eine Variable transformiert wird,

$$T_k \begin{cases} x_k^{(k)} = \varphi_k(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k-1)}), \\ x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} \text{ für } i \neq k; \end{cases}$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

$$T \equiv T_1 T_2 T_3 \ldots T_n.$$

Wir betrachten eine beliebige Punkttransformation T des R_n

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n); \quad i = 1, 2, 3, \ldots n. \tag{1}$$

Es ist also die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \neq 0.$$

Es ist klar, daß man nötigenfalls stets die Variabeln derart passend umnumerieren kann, daß jedes f_i die Variable x_i wirklich enthält. Wir können also ohne weiteres voraussetzen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \neq 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Dann lassen sich die Gleichungen (1) auf die folgende Form bringen:

$$T\begin{cases} x'_1 = \varphi_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n), \\ x'_i = \varphi_i(x'_1, x'_2, \ldots x'_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots x_n); \quad i = 2, 3, \ldots n. \end{cases} \tag{2}$$

Die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

ist bekanntlich gleich dem Produkte

$$\prod_1^n {}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}.$$

Dieses Produkt ist von Null verschieden, da die Gleichungen (2) eine Punkttransformation darstellen. Hieraus folgt, daß jede Funktion φ_i die Variable x_i sicher explicit enthält.

Es ist nun leicht, die Punkttransformation (2) in n Punkttransformationen zu zerlegen. Wir setzen

$$x_i = x_i^{(0)}, \; x'_i = x_i^{(n)}; \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Wir definieren n Punkttransformationen in folgender Weise mit Rücksicht auf die Gleichungen (2):

$$T_k \begin{cases} x_k^{(k)} = \varphi_k(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k-1)}), \\ x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} \text{ für } i \neq k. \end{cases} \tag{3}$$

Wir haben nun die Identität zu beweisen:

$$T \equiv T_1 T_2 T_3 \ldots T_n.$$

Den Beweis führen wir einfach durch den Schluß von m auf $m+1$. Wir setzen voraus, die Zusammensetzung der ersten m Transformationen habe die Form

$$T_1 T_2 T_3 \ldots T_m \begin{cases} \nu = 1: & x_1^{(m)} = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ 1 < \nu \leqq m: & x_\nu^{(m)} = \varphi_\nu(x_1^{(m)}, \ldots, x_{\nu-1}^{(m)}, x_\nu, \ldots x_n), \\ \nu > m: & x_\nu^{(m)} = x_\nu. \end{cases} \tag{4}$$

Wir wollen diese Transformation mit der Transformation T_{m+1} zusammensetzen. Es ist

$$T_{m+1} \begin{cases} \nu = m+1: & x_\nu^{(m+1)} = \varphi_\nu(x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}), \\ \nu \neq m+1: & x_\nu^{(m+1)} = x_\nu^{(m)}. \end{cases}$$

Nun ergibt die Zusammensetzung von (4) mit T_{m+1}:

$$T_1 T_2 T_3 \ldots T_m T_{m+1} \begin{cases} \nu = 1: \quad x_1^{(m+1)} = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \\ 1 < \nu < m+1: \\ \qquad x_\nu^{(m+1)} = \varphi_\nu(x_1^{(m)}, \ldots x_{\nu-1}^{(m)}, x_\nu, \ldots, x_n), \\ \nu = m+1: \\ \qquad x_\nu^{(m+1)} = \varphi_\nu(x_1^{(m)}, \ldots x_{\nu-1}^{(m)}, x_\nu^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}), \\ \nu > m+1: \quad x_\nu^{(m+1)} = x_\nu. \end{cases}$$

Wir können auch setzen:

$$\begin{cases} \nu = 1: & x_1^{(m+1)} = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \\ 1 < \nu < m+1: & x_\nu^{(m+1)} = \varphi_\nu(x_1^{(m)}, \ldots, x_{\nu-1}^{(m)}, x_\nu, \ldots, x_n), \\ \nu = m+1: & x_\nu^{(m+1)} = \varphi_\nu(x_1^{(m)}, \ldots, x_{\nu-1}^{(m)}, x_\nu, \ldots, x_n), \\ \nu > m+1: & x_\nu^{(m+1)} = x_\nu. \end{cases}$$

Es ist aber $x_\nu^{(m)} = x_\nu^{(m+1)}$ für $\nu \neq m+1$. Demnach erhält man:

$$T_1 T_2 T_3 \ldots T_m T_{m+1} \left\{ \begin{array}{l} \nu = 1: \quad x_1^{(m+1)} = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \\ 1 < \nu \leqq m+1: \\ \quad x_\nu^{(m+1)} = \varphi_\nu(x_1^{(m+1)}, \ldots, x_{\nu-1}^{(m+1)}, x_\nu, \ldots, x_n), \\ \nu > m+1: \quad x_\nu^{(m+1)} = x_\nu. \end{array} \right. \tag{5}$$

Hiemit ist gezeigt, daß die Gleichungen (4) auch für $m+1$ gelten, wenn sie für m gelten. Es ist also nur noch zu zeigen, daß $T_1 T_2$ die angegebene Form besitzt.

Es ist

$$T_1 \left\{ \begin{array}{l} x_1^{(1)} = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \\ x_\nu^{(1)} = x_\nu \text{ für } \nu \neq 1. \end{array} \right.$$

$$T_2 \left\{ \begin{array}{l} x_2^{(2)} = \varphi_2(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}), \\ x_\nu^{(2)} = x_\nu^{(1)} \text{ für } \nu \neq 2. \end{array} \right.$$

Daher ergibt sich für die Zusammensetzung beider:

$$T_1 T_2 \left\{ \begin{array}{l} \nu = 1: \quad x_1^{(2)} = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \\ 1 < \nu \leqq 2: \quad x_\nu^{(2)} = \varphi_\nu(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}), \\ \nu > 2: \quad x_\nu^{(2)} = x_\nu. \end{array} \right.$$

Hieraus erhält man weiter

$$T_1 T_2 \left\{ \begin{array}{l} \nu = 1: \quad x_1^{(2)} = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \\ 1 < \nu \leqq 2: \quad x_\nu^{(2)} = \varphi_\nu(x_1^{(2)}, x_2, \ldots, x_n), \\ \nu > 2: \quad x_\nu^{(2)} = x_\nu. \end{array} \right.$$

Die Formel (4) für die Zusammensetzung $T_1 T_2 T_3 \ldots T_m$ ist also richtig für $m = 2$, also ist sie nach dem Früheren für jedes m richtig. Insbesondere ergibt sich für $m = n$

$$T_1 T_2 T_3 \ldots T_n \left\{ \begin{array}{l} \nu = 1: \; x_1^{(n)} = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ 1 < \nu \leqq n: \; x_\nu^{(n)} = \varphi_\nu(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{\nu-1}^{(n)}, x_\nu, x_{\nu+1}, \ldots, x_n). \end{array} \right.$$

Hiemit ist das aufgestellte Theorem bewiesen.

2.

Wir betrachten im R_n einen beliebigen Pfaff'schen Ausdruck

$$\Delta \equiv \sum_1^n {}_i \, a_i \, dx_i$$

und eine beliebige infinitesimale Transformation

$$Xf \equiv \sum_1^n {}_i \, \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Wir bilden den Ausdruck

$$J \equiv \sum_1^n {}_i \, a_i \xi_i. \tag{6}$$

Herr Engel hat gezeigt, daß dieser Ausdruck bei allen Punkttransformationen des R_n invariant bleibt. Daß die Gleichung $J = 0$ diese Eigenschaft besitzt, ist begrifflich klar, denn sie drückt die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aus, daß alle Bahnkurven von Xf zugleich Integralkurven der Pfaff'schen Gleichung $\Delta = 0$ sind. Um die Invarianteneigenschaft von J zu beweisen, genügt es offenbar nach dem Theorem des vorigen Artikels zu zeigen, daß J bei allen Transformationen

$$\begin{aligned} x'_1 &= \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \\ &\vdots \\ x'_n &= x_n \end{aligned} \qquad \begin{gathered} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} = \varphi_\nu\right) \\ (\varphi_1 \not\equiv 0) \end{gathered} \tag{7}$$

invariant bleibt. Es ist vermöge (7)

$$\sum_1^n {}_i \, a_i \, dx_i = \sum_1^n {}_i \, a'_i \, dx'_i = a'_1 \cdot \sum_1^n {}_\nu \, \varphi_\nu \, dx_\nu + \sum_2^n {}_\nu \, a'_\nu \, dx_\nu.$$

Es ist also

$$a_1 = a'_1 \varphi_1,$$

$$\nu > 1: \quad a_\nu = a'_1 \varphi_\nu + a'_\nu. \tag{8}$$

Andererseits ist

$$\sum_1^n \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_1^n \xi'_i \frac{\partial f}{\partial x'_i}.$$

Also folgt

$$\sum_1^n \xi_i \varphi_i = \xi'_1$$

$$\nu > 1: \quad \xi_\nu = \xi'_\nu. \tag{9}$$

Nun ist

$$J = \sum_1^n a_\nu \xi_\nu = a_1 \xi_1 + \sum_2^n a_\nu \xi_\nu = a'_1 \varphi_1 \xi_1 + \sum_2^n (a'_1 \varphi_\nu + a'_\nu) \xi'_\nu$$

$$= a'_1 \cdot \sum_1^n \xi_\nu \varphi_\nu + \sum_2^n a'_\nu \xi'_\nu = \sum_1^n a'_\nu \xi'_\nu.$$

Hiemit ist der Beweis erledigt.

3.

Mit dem Pfaff'schen Ausdruck

$$\Delta = \sum_1^n a_i \, dx_i$$

sind gewisse Systeme linearer Gleichungen invariant verknüpft. Die Rangzahlen $\varkappa_1, \varkappa, \varkappa_2$ derselben sind Invarianten von Δ.

Wir setzen

$$a_{ik} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}.$$

und betrachten zunächst das System

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^n a_\nu \xi_\nu = 0 \\ -a_i\xi_0 + &\sum_1^n a_{i\nu}\xi_\nu = 0; \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Der Rang dieses Systems wird mit $\varkappa_1$ bezeichnet. Um zu zeigen, daß $\varkappa_1$ eine Invariante von Δ ist, genügt es, alle Punkttransformationen von der Form (7) heranzuziehen.

Wir setzen noch

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_k} \equiv \varphi_{ik}$$

und erhalten mit Rücksicht auf (7) und (8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial x_\nu} &= a'_1 . \varphi_{1\nu} + \varphi_1 . \left(\frac{\partial a'_1}{\partial x'_1} \cdot \varphi_\nu + \frac{\partial a'_1}{\partial x'_\nu}\right) \\ \frac{\partial a_\nu}{\partial x_1} &= a'_1 . \varphi_{\nu 1} + \varphi_\nu . \frac{\partial a'_1}{\partial x'_1} \cdot \varphi_1 + \frac{\partial a'_\nu}{\partial x'_1} \cdot \varphi_1 . \end{aligned} \qquad \nu > 1$$

Demnach ergibt sich

$$a_{1\nu} = \varphi_1 . a'_{1\nu} . \tag{11}$$

Weiter folgt für $i > 1$, $\nu > 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_i}{\partial x_\nu} &= a'_1 . \varphi_{i\nu} + \varphi_i \left(\frac{\partial a'_1}{\partial x'_1} \cdot \varphi_\nu + \frac{\partial a'_1}{\partial x'_\nu}\right) + \frac{\partial a'_i}{\partial x'_1} \cdot \varphi_\nu + \frac{\partial a'_i}{\partial x'_\nu} , \\ \frac{\partial a_\nu}{\partial x_i} &= a'_1 . \varphi_{\nu i} + \varphi_\nu \left(\frac{\partial a'_1}{\partial x'_1} \cdot \varphi_i + \frac{\partial a'_1}{\partial x'_i}\right) + \frac{\partial a'_\nu}{\partial x'_1} \cdot \varphi_i + \frac{\partial a'_\nu}{\partial x'_i} . \end{aligned}$$

Hieraus leitet man ab:

$$a_{i\nu} = \varphi_i . a'_{1\nu} + \varphi_\nu . a'_{i1} + a'_{i\nu}; \quad i > 1, \nu > 1. \tag{12}$$

Das System (10) geht also über in

$$\sum_1^n a'_\nu \xi'_\nu = 0,$$

$$-a'_1 \varphi_1 \xi_0 + \sum_1^n \varphi_1 . a'_{1\nu} \xi_\nu = 0$$

$$i > 1: \quad -(a'_1 \varphi_i + a'_i)\xi_0 + \varphi_1 a'_{i1} \xi_1 + \sum_2^n (\varphi_i a'_{1\nu} + \varphi_\nu . a'_{i1} + a'_{i\nu})\xi_\nu = 0.$$

Da $\varphi_1 \not\equiv 0$ ist, kann die zweite Gleichung vereinfacht werden:

$$-a'_1 \xi_0 + \sum_1^n a'_{1\nu} \xi_\nu = 0.$$

Nunmehr kann auch die dritte Gleichung vereinfacht werden zu

$$-a'_i \xi_0 + \varphi_1 a'_{i1} \xi_1 + \sum_2^n (\varphi_\nu a'_{i1} + a'_{i\nu})\xi_\nu = 0.$$

Führen wir vermittels Gleichung (9) die ξ'_ν ein, so kommt

$$-a'_1 \xi_0 + \sum_1^n a'_{1\nu} \xi'_\nu = 0 \quad (\text{wegen } a'_{11} \equiv 0)$$

$$-a'_i \xi_0 + a'_{i1} \varphi_1 \xi_1 + a'_{i1} . \sum_2^n \varphi_\nu \xi_\nu + \sum_2^n a'_{i\nu} \xi_\nu = 0; \quad i > 1$$

oder endlich

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^n a'_\nu \xi'_\nu = 0 \\ &-a'_i \xi_0 + \sum_1^n a'_{i\nu} \xi'_\nu = 0; \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Die Lösungen der linearen Systeme (10) und (13) sind vermöge (9) ein-eindeutig aufeinander bezogen. Hieraus folgt sofort, daß diese Systeme den gleichen Rang $\varkappa_1$ besitzen.

Setzt man den Parameter ξ_0 gleich Null, so erhält man ein lineares System, dessen Rang $\varkappa$ ebenfalls eine Invariante ist.

Wenn man den Rang des linearen Systems

$$\sum_{1}^{n} {}_{\nu}\, a_{i\nu}\xi_\nu = 0; \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

mit $\varkappa_2$ bezeichnet, so ist auch $\varkappa_2$ eine Invariante, denn bei dem Beweise der Invarianz von $\varkappa_1$ wurde die Gleichung

$$\sum_{1}^{n} {}_{\nu}\, a_\nu \xi_\nu = 0$$

zur Umformung des linearen Systems nicht benutzt.

Hiemit ist gezeigt, daß $\varkappa_1, \varkappa, \varkappa_2$ bei jeder Punkttransformation (7) invariant sind, also sind sie überhaupt bei jeder Punkttransformation des R_n invariant.

4.

H. Grassmann hat das interessante Theorem bewiesen: Der Rang einer schiefsymmetrischen Determinante ist eine gerade Zahl.

Mit Hilfe äußerst einfacher Begriffe der Lie'schen Gruppentheorie gelingt es, einen durchsichtigen synthetischen Beweis dieses Theorems zu geben.

Es sei

$$D \equiv |a_{ik}|; \quad a_{ik} = -a_{ki}; \quad i, k = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Wir betrachten die Linearformen

$$L_i \equiv \sum_{1}^{n} {}_{k}\, a_{ik} x_k; \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n. \qquad (14)$$

Ist $D \neq 0$, so ist n gerade, also der Rang von D auch gerade. Wir können also stets $D = 0$ voraussetzen. Dann

sind nicht alle L_i voneinander unabhängig. Es seien gerade m der Linearformen (14) voneinander unabhängig. Dann ist m der Rang von D.

Durch passende zyklische Vertauschungen der Indices

$$\begin{array}{r} 1\ 2\ 3\ 4 \ldots n \\ 2\ 3\ 4 \ldots n \\ 3\ 4 \ldots n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

können wir stets erreichen, daß gerade die m ersten Linearformen voneinander unabhängig sind, während jede der übrigen von den m ersten abhängig ist. Es ist also

$$L_q \equiv \sum_1^m {}_s\, C_{qs} L_s,$$

$$q = m+1, m+2, \ldots, n.$$

Diese Identität zerfällt in die Gleichungen

$$a_{qk} = \sum_1^m {}_s\, C_{qs} a_{sk}, \tag{15}$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots n;$$
$$q = m+1, m+2, \ldots n.$$

Die Gleichungen (15) lassen eine schöne begriffliche Deutung zu. Wir bringen sie auf die folgende Form, wobei wir zugleich k passend beschränken:

$$-a_{kq} + \sum_1^m {}_s\, C_{qs} a_{ks} = 0. \tag{16}$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots m;$$
$$q = m+1, m+2, \ldots n.$$

Diese Gleichungen drücken aus, daß die Linearformen $L_1, \ldots L_m$ die folgenden $n-m$ infinitesimalen Translationen in sich gestatten:

$$X_q f \equiv -\frac{\partial f}{\partial x_q} + \sum_1^m {}_s\, C_{qs} \frac{\partial f}{\partial x_s}, \tag{17}$$

$$q = m+1, m+2, \ldots, n.$$

Diese infinitesimalen Translationen sind offenbar voneinander unabhängig. Es fragt sich, ob die Linearformen (14) noch eine weitere Translation in sich gestatten, die von den Translationen (17) unabhängig ist. Ist eine solche vorhanden, so kann sie offenbar auf die Form gebracht werden:

$$Xf \equiv \sum_1^m {}_s\, c_s \frac{\partial f}{\partial x_s}. \tag{18}$$

Die Linearformen (14) gestatten diese Translation dann und nur dann, wenn

$$\sum_1^m {}_s\, c_s a_{is} = 0; \quad i = 1, 2, 3, \ldots m,$$

also dann und nur dann, wenn

$$|a_{ik}| = 0; \quad i, k = 1, 2, 3, \ldots, m.$$

Ist also m ungerade, so gibt es immer eine Translation von der Form (18), welche die L_i gestatten.

Da die Linearformen $L_1, \ldots, L_m$ voneinander unabhängig sind, so kann man stets vermöge einer linearen Transformation neue Variable $y_1, \ldots, y_n$ derart einführen, daß man hat

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv y_1, \\ L_2 &\equiv y_2, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ L_m &\equiv y_m. \end{aligned}$$

Man sieht sofort, daß die allgemeinste infinitesimale Translation, welche jedes L_i in sich transformiert, sich aus den $n-m$ infinitesimalen Translationen

$$Y_q f \equiv \frac{\partial f}{\partial y_q}; \quad q = m+1, m+2, \ldots, n$$

ableiten läßt. Da jede lineare Transformation jede Translation wieder in eine Translation überführt, so folgt, daß die Linearformen (14) auch in den $x_1, \ldots, x_n$ gerade $n-m$ voneinander unabhängige infinitesimale Translationen in sich gestatten. Ist m ungerade, so gestatten sie nach dem Früheren mindestens $n-m+1$ derartige Translationen. Hieraus schließt man, daß m eine gerade Zahl sein muß. Hiemit ist das Grassmann'sche Theorem bewiesen.

5.

Es sei

$$D \equiv |a_{ik}|; \quad a_{ik}+a_{ki} = 0, \; n = \text{gerade Zahl}.$$

Nach Grassmann's Theorem verschwinden alle Adjunkten A_{ik} vermöge $D = 0$, weil der Rang von D stets eine gerade Zahl ist. Da A_{ik} von niedrigerem Grade ist als D, so muß D in Faktoren zerfallen:

$$D \equiv P^\mu Q^\nu \ldots.$$

Hierin bedeuten $P, Q, \ldots$ irreduzible Polynome. Es ist klar, daß $\mu, \nu, \ldots$ nur die Zahlenwerte eins oder zwei besitzen können. Nehmen wir zunächst $\mu = 1$ an. Es sei a_{ik} eine Variable, die in P wirklich vorkommt. Nun ist bekanntlich

$$2 A_{ik} \equiv \frac{\partial D}{\partial a_{ik}} \equiv \frac{\partial P}{\partial a_{ik}} \cdot Q^\nu \ldots + P . f,$$

wo f ein gewisses Polynom bezeichnet. Nun kann A_{ik} nicht vermöge $P = 0$ verschwinden, weil $P, Q, \ldots$ als irreduzibel vorausgesetzt sind. Also kann μ nur den Wert zwei besitzen. Ist außer P noch ein anderes Polynom Q vorhanden, so folgt ebenso $\nu = 2$ u. s. w. Demnach ergibt sich das Theorem von Cayley

$$D \equiv (\text{Polynom})^2.$$

6.

Schließlich soll eine Erweiterung des Grassmann'schen Theorems angegeben werden.

Theorem.

Genügen die Elemente a_{ik} einer Determinante D, deren Rang kleiner als ihr Grad ist, entweder den Bedingungen

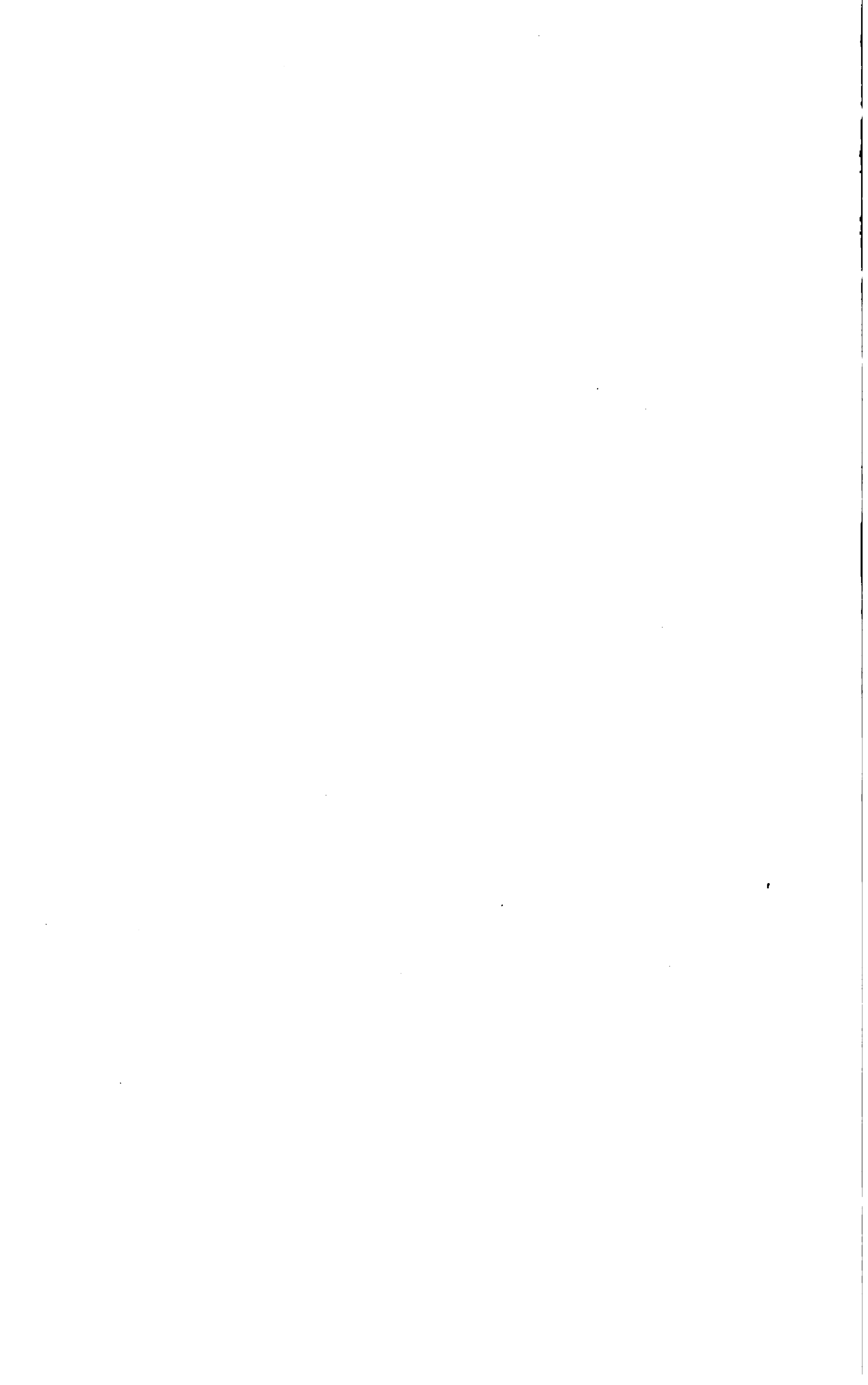
$$a_{ik} = a_{ki};$$
$$i, k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

oder den Bedingungen

$$a_{ik} + a_{ki} = 0, \quad i \neq k;$$
$$i, k = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

so enthält D mindestens eine Hauptunterdeterminante, deren Rang gleich jenem von D ist.

Der Beweis ist einfach.



Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Klasse erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden vier gesonderten Abteilungen, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abteilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Kristallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.

Abteilung II a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abteilung II b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abteilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Tiere sowie aus jenem der theoretischen Medizin.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichnisse ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Alfred Hölder, k. u. k. Hof- und Universitätsbuchhändler (Wien, I., Rothenthurmstraße 13), zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Teile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Teile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 14 K — 14 M.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Originalauszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird wie bisher acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 5 K — 5 M.



SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVI. BAND. VIII. HEFT.

JAHRGANG 1907. — OKTOBER.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 9 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1907.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN KOMMISSION BEI ALFRED HÖLDER.

K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER.

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

INHALT

des 8. Heftes, Oktober 1907, des CXVI. Bandes, Abteilung II a, der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Klasse.

Preis des ganzen Heftes: 2 K 35 h — 2 M 35 pf.

SITZUNGSBERICHTE

DER

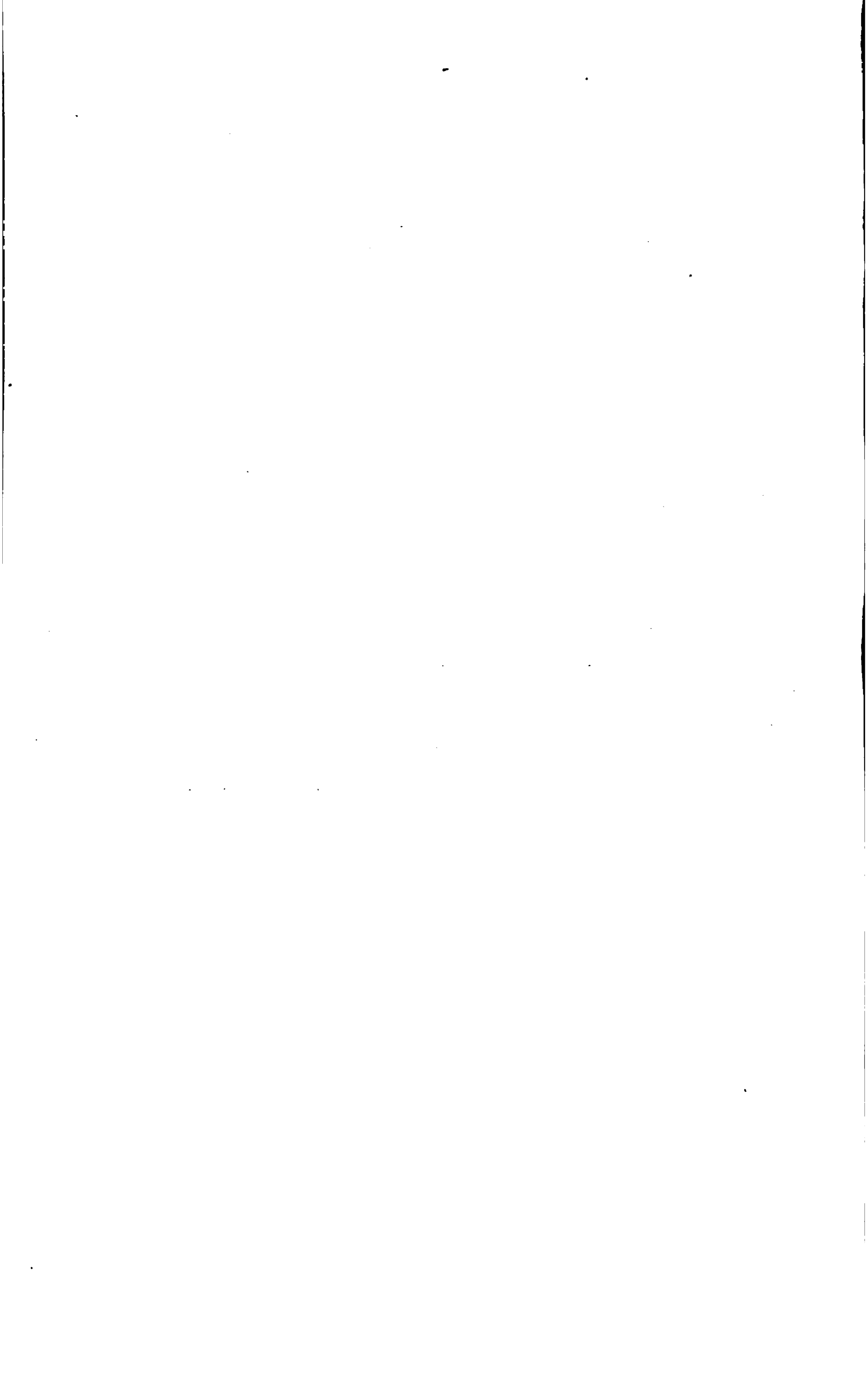
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVI. BAND. VIII. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



Über die Beziehung zwischen Druck und Temperatur bei mit der Höhe variablen Temperaturgradienten

von

Dr. Albert Defant.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 24. Oktober 1907.)

Bei Untersuchungen über meteorologische Probleme, in denen es namentlich auf eine Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf atmosphärische Vorgänge ankommt, hat man bis jetzt fast ausschließlich als Beziehung zwischen Druck und Temperatur die Poisson'sche Formel angewendet; damit beschränkte man sich von vornherein nur auf jene Fälle, in denen von einer Wärmezu- oder -abfuhr abgesehen werden konnte. Alle diese Untersuchungen lieferten uns trotz dieser Einschränkung so wichtige Ergebnisse, daß damit das Verständnis meteorologischer Vorgänge wesentlich gefördert wurde. Trotzdem wäre es wohl wünschenswert, wenn möglich, uns von diesen beschränkenden Voraussetzungen zu befreien und zu versuchen, die Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auch auf jene Prozesse auszudehnen, in denen die Wärmezu- oder -abfuhr nicht mehr vernachlässigt werden kann. Dadurch gestalten sich zwar sowohl die Ableitungen sowie alle auftretenden Formeln viel komplizierter und man könnte sogar fürchten, durch den mehr mathematisch-deduktiven Gang der Rechnung den Überblick über die weitere Entwicklung des Problems zu verlieren. Jedoch mathematische Schwierigkeiten, die sich bei Inangriffnahme eines Problems einzustellen pflegen, sollten uns nicht zurückschrecken, die

umfangreicheren Rechnungen zu unterlassen, vielleicht auf Kosten wichtiger Folgerungen, die man aus den abgeleiteten Formeln mit Leichtigkeit eventuell ziehen könnte und die man sicher vielleicht nie auf statistischem Wege aus dem vorliegenden Beobachtungsmaterial ermitteln hätte können.

Die wichtigste Grundformel, die man zu weiteren Entwicklungen unumgänglich besitzen muß, ist die Beziehung zwischen Druck und Temperatur. Solange man sich auf adiabatische Prozesse beschränkte, genügte die einfache Poisson'sche Formel, aus der sich dann weitere Folgerungen für die Temperaturabnahme mit der Höhe ableiten ließen. Für die in der Meteorologie wichtigen Fragen ist die durch die Poisson'sche Formel gegebene Beziehung zwischen Druck und Temperatur etwas unbequem. Führt man für die Druckänderung die entsprechende Höhenänderung ein, so erhält man leicht den Wert der Temperaturabnahme mit der Höhe. Wie bekannt, ergibt sich dafür fast 1° C. pro 100 *m*. Hätten wir eine trockene Atmosphäre, bei welcher bloß durch Konvektionsströmungen Wärme zugeführt wird, so würde die Temperaturabnahme mit der Höhe überall 1° pro 100 *m* betragen. Diesen thermischen Zustand der Atmosphäre nennt man deshalb den Zustand des thermisch-konvektiven Gleichgewichtes. Jedes Luftteilchen befindet sich im indifferenten Gleichgewichtszustande.

Die Poisson'sche Gleichung ist etwas allgemeiner als die Beziehung, die uns zu jeder Höhe die entsprechende adiabatische Temperatur gibt, da sie uns gestattet, aus den beobachteten Luftdruckwerten direkt die entsprechenden Temperaturen zu berechnen; auf jeden Fall gilt jedoch die Poisson'sche Beziehung nur im Falle eines konvektiven Temperaturgleichgewichtes.

Beträgt die Temperaturabnahme mit der Höhe mehr oder weniger als 1° pro 100 *m*, so gilt die Beziehung nicht mehr; und gerade dieser Wert der Temperaturabnahme bildet eine Grenze zwischen labilem und stabilem Gleichgewichtszustand und tritt daher in der Atmosphäre wohl ziemlich selten auf.

Deshalb war es wohl wünschenswert, eine Beziehung zwischen Druck und Temperatur bei gegebenem vertikalen

Temperaturgradienten zu besitzen. Uns kommt es hier nicht darauf an, zu untersuchen, wann und wie die angenommenen vertikalen Temperaturgradienten entstehen, sondern uns handelt es sich bloß um die Frage: wie kann ich bei gegebenem Luftdruck und gegebenem vertikalen Temperaturgradienten die in dieser Höhe dadurch bedingte Temperatur berechnen.

Wir gehen wieder aus vom ersten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie, welcher lautet:

$$\frac{dQ}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} - AR \frac{T}{p} \frac{dT}{dt}; \tag{1}$$

für adiabatische Zustandsänderungen $\frac{dQ}{dt} = 0$ ergibt sich

$$\frac{c_p}{AR} \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \tag{2}$$

und integriert zwischen den Grenzen T, p und T_0, p_0 die Poisson'sche Gleichung

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{c_p}{AR}}. \tag{3}$$

Aus Gleichung 2) folgt, da stets, wenn x die Höhe bedeutet, $dp = -\rho\, dx$ und $p = \rho RT$ ist,

$$\frac{c_p}{A} \frac{dT}{dt} = -\frac{dx}{dt} \quad \text{oder} \quad T = T_0 - \frac{A}{c_p} x. \tag{4}$$

Dabei ist T die Temperatur in der Höhe x, T_0 die Temperatur an der Erdoberfläche $x = 0$. Die durch die Poisson'sche Beziehung zwischen Druck und Temperatur gegebene vertikale Temperaturverteilung ist linear. Trägt man diese Funktion in ein Koordinatensystem ein, in dem die Ordinatenachse die Höhen x, die Abszissenachse die Temperaturen T enthält, so erscheint die Adiabate 4 als eine beinahe unter 45° gegen die Abszissenachse geneigte gerade Linie. Der Temperaturgradient für adiabatische Temperaturverteilung ist daher

$$\frac{\delta T_a}{\delta x} = -\frac{A}{c_p} = -\alpha_0.$$

Wir nehmen jetzt zuerst eine lineare vertikale Temperaturverteilung in der Atmosphäre an, bei welcher also der Temperaturgradient konstant ist, jedoch vom adiabatischen als verschieden angenommen wird. Für einen solchen konstanten Temperaturgradienten ist die Entwicklung sehr einfach. Ist $\alpha_0 = -\frac{\delta T_a}{\delta x}$ der adiabatische und $\alpha = -\frac{\delta T}{\delta x}$ der von uns angenommene ebenfalls, wie α_0 konstante Temperaturgradient, so definieren wir $\varphi = \frac{\alpha_0}{\alpha}$.

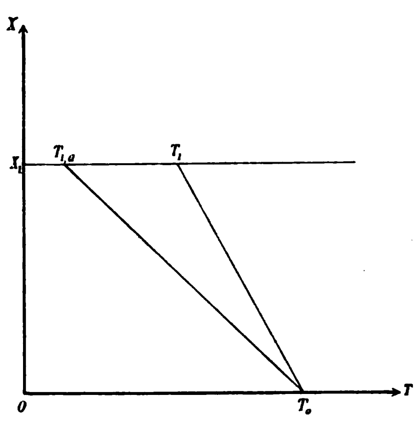


Fig. 1.

Da nun

$$\frac{\delta T_a}{\delta x} = \frac{T_a - T_0}{x - x_0} \quad \text{und} \quad \frac{\delta T}{\delta x} = \frac{T - T_0}{x - x_0}$$

ist, so folgt

$$\varphi = \frac{T_a - T_0}{T - T_0}.$$

Um die Entwicklung anschaulicher zu machen, denken wir uns die Luft in vertikaler Bewegung begriffen; die Luft steige auf und die Temperatur in jeder Lage sei definiert nach unserem vorgegebenen Gradienten $\alpha = -\frac{\delta T}{\delta x}$: In einer Höhe x_1 habe nach diesem Temperaturgradienten α die Luft

die Temperatur T_1. Würde die Luft adiabatisch aufgestiegen sein, so würde sie in derselben Höhe die Temperatur $T_{1,a}$ besitzen, die definiert ist nach der Gleichung 3).

Die Temperaturabnahme mit der Höhe nach unserem angenommenen Temperaturgradienten α können wir uns nun folgendermaßen entstanden vorstellen. Wir lassen die Luft adiabatisch aufsteigen und führen ihr dann in jedem Augenblicke so viel Wärme zu oder ab, als sie benötigt, um die vorgegebene Temperatur T_1 anzunehmen. Für konstante Temperaturgradienten brauchen wir die Wärmemenge erst am Schlusse der adiabatischen Bewegung hinzuzufügen; anders verhält es sich bei Temperaturgradienten, die von der Höhe x selbst abhängen. Bei konstantem Gradienten können wir somit den Prozeß uns in zwei Teile gedacht denken: zuerst lassen wir die Luft adiabatisch bis zur Höhe x_1 aufsteigen; dabei nimmt sie die Temperatur $T_{1,a}$ an, hierauf führen wir ihr noch so viel Wärme zu, bis die Luft die nach dem Temperaturgradienten α vorgegebene Temperatur T_1 angenommen hat. Diese Wärmemenge ist leicht zu bestimmen. Da alles unter konstantem Drucke p_1 vor sich geht, ist sie gegeben durch

$$Q = c_p(T_1 - T_{1,a}). \tag{5}$$

Bei mit der Höhe veränderlichem Temperaturgradienten ist die Sache etwas komplizierter. Der vorgegebene Temperaturgradient sei nun jetzt nicht mehr konstant, sondern von der Höhe x abhängig. Die Temperatur der Luft nehme nach einem bestimmten vorgegebenen Gesetz ab. Der Temperaturgradient an jeder Stelle ist dann die geometrische Tangente an jenem Punkte der Kurve, welche die vertikale Temperaturverteilung graphisch darstellt. Es ist dann

$$\alpha = \alpha(x) = -\frac{\delta T}{\delta x}.$$

Steigt die Luft adiabatisch auf, so habe sie in der Höhe x_1 die Temperatur $T_{1,a}$; steigt sie nach der vorgegebenen Temperaturabnahme auf, so würde sie in x_1 die Temperatur T_1 erreicht haben. Wir teilen auch in diesem Falle unseren Prozeß in zwei Teile: eine adiabatische Abnahme und ein Hinzufügen,

beziehungsweise Wegnehmen von so viel Wärme, bis die nach obigem Gesetze der Temperaturabnahme in dieser Höhe gefundene Temperatur angenommen wird. Zu diesem Zwecke teilen wir das Intervall $x_1 - x_0$ in n — der Einfachheit halber — gleiche Teile und betrachten bloß ein Intervall x_r bis x_{r+1}; dieser Streifen habe die Höhe

$$x_{r+1} - x_r = \delta_r.$$

Die entsprechenden adiabatischen Temperaturen in dieser Höhe seien $T_{a,r}$ und $T_{a,r+1}$, die vorgegebenen T_r und T_{r+1}.

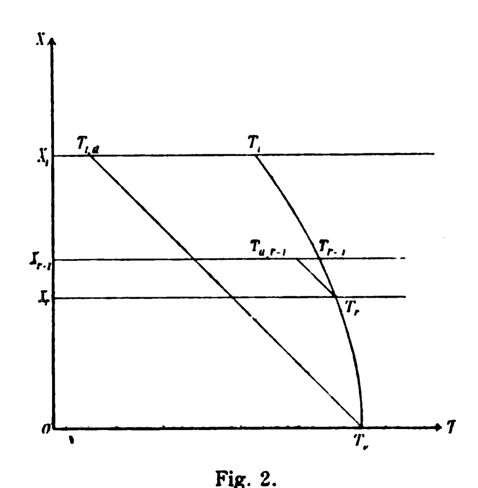


Fig. 2.

In diesem kleinen Streifen δ können wir die Temperaturgradienten als konstant betrachten. Die Wärmemenge, welche wir somit hinzufügen müssen, damit in der Höhe x_{r+1} Luft von der Temperatur $T_{a,r+1}$ die Temperatur T_r annehme, ist nach dem Früheren

$$Q_{r+1} = c_p(T_{r+1} - T_{a,r+1}).$$

Führen wir nun in jedem Intervall diese Wärmemenge zu und addieren wir schließlich alle Wärmemengen, so ist die Gesamtwärmemenge, die wir hinzufügen müssen, um die gegebene Temperaturabnahme mit der Höhe bis zur Höhe x_1 zu erhalten:

$$Q = \sum_{r=0}^{r=n} Q_{r+1} = \sum_{r=0}^{r=n} c_p (T_{r+1} - T_{a,\, r+1})$$

oder

$$Q = \sum_{r=0}^{r=n} c_p \left(\frac{T_{r+1} - T_r}{\delta_r} - \frac{T_{a,\, r+1} - T_{a,\, r}}{\delta_r} \right) \delta_r .$$

Gehen wir nun zum Grenzfalle $\lim n = \infty$ über, so wird die Summe rechts nichts anders als die klassische Definition des bestimmten Integrals zwischen den Grenzen x_0 und x_1; weiter, da für $\lim n = \infty$ $\lim \delta_r = 0$ wird, ist

$$\lim_{\delta = 0} \frac{T_{r+1} - T_r}{\delta_r} = \frac{\delta T}{\delta x} \quad \text{und} \quad \lim_{\delta = 0} \frac{T_{a,\, r+1} - T_{a,\, r}}{\delta_r} = \frac{\delta T_a}{\delta x} .$$

Somit wird

$$Q = c_p \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\delta T}{\delta x} - \frac{\delta T_a}{\delta x} \right) dx .$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß die Funktion, welche die vorgegebene Temperaturabnahme mit der Höhe ausdrückt, eine monotone, überall differenzierbare Funktion sei. Wir schließen damit alle jene vertikalen Temperaturverteilungen aus, in denen Sprünge der Temperatur vorkommen. Diese Fälle können nur in der Art behandelt werden, daß man die ganze Durchführung der Rechnung in zwei Teile teilt, wobei die Sprungschichte der Temperatur die Grenze des ersten und zugleich den Anfang des zweiten Prozesses bildet.

Alsdann definieren wir die Funktion

$$\varphi(x) = -\frac{\delta T_a}{\delta x} : -\frac{\delta T}{\delta x} = \frac{d T_a}{d T} = \frac{\alpha_0}{\alpha(x)} . \qquad 6)$$

Da nun der adiabatische Gradient konstant ist, und zwar

$$\frac{\delta T_a}{\delta x} = -\frac{A}{c_p} ,$$

so ist

$$\varphi(x) = -\frac{A}{c_p} : -\frac{\delta T}{\delta x} = \frac{A}{c_p}\,\frac{\delta x}{\delta T}. \qquad 7)$$

Für die zugeführte Wärmemenge erhalten wir sodann nach einigen Umformungen

$$Q = c_p \int_{x_0}^{x_1} (1-\varphi(x)) \frac{\delta T}{\delta x}\, dx = c_p \int_{T_0}^{T_1} (1-\varphi(x))\, dT. \qquad 8)$$

Ist die Funktion, welche die Temperaturabnahme mit der Höhe ausdrückt, monoton und stets differenzierbar, so ist es $\varphi(x)$ auch. Diese eingeführte Funktion $\varphi(x)$ kann nur Werte zwischen den Grenzen 0 und $+\infty$ annehmen; für $\varphi(x) = 1$ ist der Temperaturgradient α gleich dem adiabatischen α_0; für alle $\varphi(x) < 1$ nimmt die angenommene Temperaturverteilung nach dem vertikalen Gradienten α viel rascher ab als nach dem adiabatischen α_0; ist dagegen $\varphi(x) > 1$, so nimmt die Temperatur der Luft weniger rasch ab als nach dem adiabatischen Gesetze.

Die Differentialgleichung des Problems gestaltet sich somit folgendermaßen: Aus der thermischen Gleichung

$$\frac{dQ}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} - AR \frac{T}{p} \frac{dp}{dt}$$

folgt für isentrope Zustandsänderungen $\frac{dQ}{dt} = 0$ die Poisson'sche Gleichung

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{T_{1,a}}{T_0}\right)^{\frac{c_p}{AR}}.$$

Damit ist die adiabatische Temperatur $T_{1,a}$ für die Höhe x_1 bestimmt. In unserem Falle müssen wir somit in der Höhe x_1 der Luft noch die Wärmemenge hinzufügen, welche die Temperatur von $T_{1,a}$ auf T_1 erhöht oder erniedrigt. Für ein Zeitelement dt wird diese Wärmemenge nach Gleichung 8)

$$\frac{dQ}{dt} = c_p(1-\varphi(x))\frac{dT}{dt}$$

sein.

Die Differentialgleichung, die somit für jede Höhe gleich nach Integration zwischen den gewünschten Grenzen die Temperatur nach der vorgegebenen Temperaturabnahme liefert, lautet:

$$c_p(1-\varphi(x))\frac{dT}{dt} = c_p\frac{dT}{dt} - AR\frac{T}{p}\frac{dp}{dt}$$

oder

$$0 = c_p\varphi(x)\frac{dT}{dt} - AR\frac{T}{p}\frac{dp}{dt},$$

somit

$$\frac{c_p}{AR}\varphi(x)\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p}$$

und integriert zwischen den Grenzen T_0, p_0 und T_1, p_1:

$$\frac{c_p}{AR}\int_{T_0}^{T_1}\frac{\varphi(x)}{T}dT = \log\frac{p}{p_0} \qquad 9)$$

oder infolge der Gleichung 7)

$$\frac{1}{R}\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{T} = \log\frac{p}{p_0}. \qquad 10)$$

Die Integralgleichung 9) kann man nur dann auflösen, falls $\varphi(x)$ in gegebener expliziter Form vorliegt. In der zweiten Form 10) muß dagegen die Temperatur T als Funktion der Höhe x explizit gegeben sein.

Betrachten wir dagegen bloß Fälle, in denen der Temperaturgradient in jeder Höhe konstant ist, also den Fall einer linearen vertikalen Temperaturverteilung, so ist $\varphi = \text{const}$; somit wird

$$\frac{c_p\varphi}{AR}\log\frac{T_1}{T_0} = \log\frac{p_1}{p_0}$$

oder

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\varphi \frac{c_p}{AR}}. \qquad 11)$$

Diese Beziehung zwischen Druck und Temperatur ist sehr ähnlich der Poisson'schen Gleichung und unterscheidet sich nur im Exponenten der rechten Seite der Gleichung, indem noch eine Konstante als Faktor hinzutritt, der von Null an als Wert alle positiven Zahlen annehmen kann. Gleichung 11) gilt jedoch nur unter Voraussetzung, daß der Temperaturgradient durch die ganze Höhe konstant ist, somit das Gesetz der Temperaturabnahme mit der Höhe gleich dem adiabatischen durch eine Gerade graphisch darstellbar sei.

Um ein Beispiel für einen mit der Höhe veränderlichen Temperaturgradienten zu geben, benützen wir jene Mittelwerte der Lufttemperatur für die Atmosphäre über der mitteldeutschen Tiefebene, die Berson und Süring in den Ergebnissen der Berliner wissenschaftlichen Luftfahrten abgeleitet haben. Diese Werte der Temperatur beanspruchen zwar, da aus verhältnismäßig wenig Beobachtungen gebildet, keinen größeren Grad von Genauigkeit; auf jeden Fall geben sie aber ein gutes Beispiel für eine stetige Änderung des Temperaturgradienten mit der Höhe. Sie stellen nur mittlere Verhältnisse dar; in den einzelnen Jahreszeiten weicht die Temperaturverteilung in der Vertikalen manchmal erheblich von diesen Mittelwerten ab; sie sind jedoch sehr geeignet, ein Bild der mittleren Wärmeverteilung über der mitteldeutschen Tiefebene zu geben. Wir benützen hier jene Werte, die Bezold in seiner Abhandlung:[1] »Theoretische Betrachtungen über die Ergebnisse der wissenschaftlichen Luftfahrten« mitteilt.

Die mittleren Temperaturen für die einzelnen Höhen folgen in folgender Tabelle; daneben sind für die einzelnen Höhen die Temperaturgradienten (Temperaturabnahme pro 100 *m*) mitgeteilt.

---

[1] Wissenschaftliche Luftfahrten, Braunschweig 1900, Bd. III, p. 283 ff. oder Bezold, Gesammelte Abhandlungen, X, p. 246.

Höhe x in Metern	$\tau_{beob.}$	$\tau_{ber.}$	$\left(-\frac{\delta T}{\delta x}\right)_{beob.}$	$\left(-\frac{\delta T}{\delta x}\right)_{ber.}$
500	7·9	8·2		
			0·50	0·48
1000	5·4	5·8		
			0·50	0·50
1500	2·9	3·3		
			0·50	0·52
2000	0·4	0·7		
			0·54	0·52
2500	— 2·3	— 2·3		
			0·54	0·54
3000	— 5·0	— 4·9		
			0·52	0·56
3500	— 7·6	— 7·7		
			0·54	0·60
4000	—10·3	—10·7		
			0·64	0·60
4500	—13·5	—13·7		
			0·64	0·64
5000	—16·7	—16·9		
			0·68	0·66
5500	—20·1	—20·2		
			0·70	0·66
6000	—23·6	—23·5		
			0·68	0·70
6500	—27·0	—27·0		
			0·68	0·70
7000	—30·4	—30·5		
			0·72	0·72
7500	—34·0	—34·1		
			0·72	0·74
8000	—37·6	—37·9		
			0·80	0·78
8500	—41·6	—41·6		
			0·80	0·78
9000	—45·6	—45·5		

Trägt man die Werte der mittleren Temperaturen graphisch ein, und zwar derart, daß die Ordinatenachse die Höhen x, die Abszissenachse die Temperaturen τ darstellt, so gibt uns diese Zustandskurve ein Bild der mittleren Temperaturverteilung in den Vertikalen. Die Temperaturabnahme mit der Höhe stellt sich als eine gegen den Ursprung schwach konkave Kurve dar. Wir haben versucht, diese Werte für die mittlere Temperaturabnahme mit der Höhe in eine Gleichung zusammenzufassen, um so eine annähernd mittleren Verhältnissen entsprechende Funktion zwischen Temperatur und Höhe zu erhalten. Diese Werte ließen sich nun am besten durch folgende Gleichung:

$$\tau = T - 273 = 10{\cdot}6 - 0{\cdot}464\,x - 0{\cdot}00163\,x^2 - - 0{\cdot}0000017\,x^3 \qquad 12)$$

wiedergeben, wobei als Einheitslänge der Temperatur 1° C., als Einheitslänge der Höhe 100 *m* gewählt wurde. Die Werte, welche man aus dieser empirischen Gleichung erhält, sind für die einzelnen Höhen ebenfalls in früherer Tabelle unter $\tau_{ber.}$ mitgeteilt; ebenso sind auch die aus Formel 12) leicht berechenbaren Temperaturgradienten für Schichten von 500 zu 500 *m* bestimmt worden. Die Abweichungen der berechneten von den beobachteten Werten sind minimal und schwanken zwischen 0·0 und —0·4° C.

Die größten Abweichungen bemerken wir in den Höhen bis zu 2000 *m*; von hier an sind sie stets sehr gering, so daß obige Gleichung die mittlere Temperaturverteilung in der Vertikalen mit genügender Genauigkeit wiedergibt. Die Hauptursache dieser größeren Abweichungen in den ersten 2000 *m* ist wohl in den häufigen Temperaturumkehrungen, in den Kondensationsprozessen und anderen sonstigen Störungen, die eben in dieser Schichte sowohl im Winter wie im Sommer am häufigsten vorkommen, zu suchen. Der Temperaturgradient ist nach Gleichung 12) somit ebenfalls eine Funktion der Höhe x, und zwar ist

$$\frac{\delta \tau}{\delta x} = \frac{\delta T}{\delta x} = -0{\cdot}464 - 0{\cdot}00327\,x - 0{\cdot}000005\,x^2.$$

Daraus ergibt sich, daß in mittleren Verhältnissen die vertikale Temperaturverteilung sich durch eine Reihe nach steigenden Potenzen von x darstellen läßt von der Form

$$T = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \qquad 13)$$

Da nun eine solche Potenzreihe stets eine analytische Funktion ist, die als stets stetig und monoton vorausgesetzt wird, so ist die Reihe auch umkehrbar und somit x ebenfalls darstellbar mittels einer Potenzreihe nach steigenden Potenzen von T, und zwar wie folgt:

$$x = b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + b_3 T^3 + \ldots.$$

Die Koeffizienten in dieser Reihe müssen nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten aus 13) bestimmt werden und umgekehrt. Nun ist dann

$$\frac{\delta x}{\delta T} = b_1 + 2b_2T + 3b_3T^2 + \ldots$$

und weiters nach Gleichung 6)

$$\varphi(x) = \frac{\delta T_a}{\delta x} \cdot \frac{\delta x}{\delta T} = \frac{A}{c_p}(b_1 + 2b_2T + 3b_3T^2 + \ldots).$$

Somit ist

$$\int_{T_0}^{T_1} \frac{\varphi(x)}{T} dT = \frac{A}{c_p} \int_{T_0}^{T_1} \left(\frac{b_1}{T} + 2b_2 + 3b_3T + \ldots\right) dT$$

$$= \frac{A}{c_p}\left[b_1 \log\frac{T_1}{T_0} + 2b_2(T_1 - T_0) + \frac{3b_3}{2}(T_1^2 - T_0^2) + \ldots\right].$$

Nach Gleichung 9) folgt dann

$$\frac{p_1}{p_0} = e^{\frac{1}{R}\left[b_1 \log\frac{T_1}{T_0} + 2b_2(T_1 - T_0) + \frac{3b_3}{2}(T_1^2 - T_0^2) + \ldots\right]}$$

oder

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{b_1\frac{1}{R}} e^{\frac{1}{R}\left[2b_2(T_1 - T_0) + \frac{3b_3}{2}(T_1^2 - T_0^2) + \ldots\right]} \tag{14}$$

Zu unserer früheren Gleichung 11), die uns den Zusammenhang zwischen Druck und Temperatur bei konstantem vertikalen Temperaturgradienten wiedergibt, erhalten wir im Falle eines mit der Höhe veränderlichen Temperaturgradienten ein Korrektionsglied in Form einer e-Potenz, das abhängt von den Koeffizienten zweiter Ordnung in der Potenzreihenentwicklung der Temperaturfunktion nach der Höhe. Führen wir diese Rechnung im angeführten konkreten Falle durch, so erhalten wir durch Umkehrung der Potenzreihe 12)

$$x = 21{\cdot}49 - 1{\cdot}90(T - 273) - 0{\cdot}0097(T - 273)^2 -$$
$$- 0{\cdot}000211(T - 273)^3.$$

Dabei müssen wir uns erinnern, daß die gewählte Längeneinheit für die Ordinatenachse x 100 m ist. Nehmen wir 1 m

als Längeneinheit, so müssen wir die rechte Seite der Gleichung mit 100 multiplizieren. Wir erhalten alsdann für den Differentialquotienten nach T

$$\frac{\delta x}{\delta T} = -4378+32\cdot 62\,T-0\cdot 0633\,T^2.$$

Somit folgt

$$\varphi(x) = -\frac{\delta T_a}{\delta x}\cdot\frac{\delta x}{\delta T} =$$

$$= -0\cdot 00984(-4378+32\cdot 62\,T-0\cdot 0633\,T^2)$$

$$= 43\cdot 08-0\cdot 321\,T+0\cdot 000623\,T^2.$$

Nach Gleichung 9) ist dann, da $\frac{c_p}{AR} = 3\cdot 47$ ist,

$$\log\frac{p_1}{p_0} = \log\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{149\cdot 49} -1\cdot 114(T_1-T_0)+0\cdot 00218(T_1^2-T_0^2)$$

oder

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{149\cdot 49} e^{[-1\cdot 114(T_1-T_0)+0\cdot 00218(T_1^2-T_0^2)]}. \qquad 14)$$

Diese Gleichung 14) gibt uns somit die Beziehung zwischen Druck und Temperatur bei der durch Gleichung 12) gegebenen Temperaturabnahme mit der Höhe. Sie weicht in den numerischen Koeffizienten ziemlich stark von der Poissonschen Beziehung bei adiabatischer Temperaturabnahme ab. Der Exponent im Temperaturenverhältnisse hängt bloß von dem linearen Gliede in der Potenzreihenentwicklung der Höhe nach steigenden Potenzen der Temperatur ab. Die weiteren Koeffizienten in den Gliedern höherer Ordnung treten in dieser Beziehung als eine Art von Korrektionsglied in Form einer e-Potenz auf. Über die Größe der Werte, welche die e-Potenz

$$e^{[-1\cdot 114(T_1-T_0)+0\cdot 00218(T_1^2-T_0^2)]}$$

annehmen kann, können wir folgendes schließen.

Für $T_1 = T_0$ wird der Exponent gleich Null, die e-Potenz gleich 1. Da ferner stets $T_1 < T_0$ ist, so ist das erste Glied im Exponenten wesentlich positiv, das zweite dagegen stets negativ. Es muß somit für einen zweiten Wert von T_1 der Exponent verschwinden. Dabei ist natürlich $T_0 = 283 \cdot 5$ (10·6° C.) zu setzen. Für $T_1 = 227 \cdot 4$ (—45·6° C.) verschwindet zum zweiten Male der Exponent, die e-Potenz wird gleich 1.

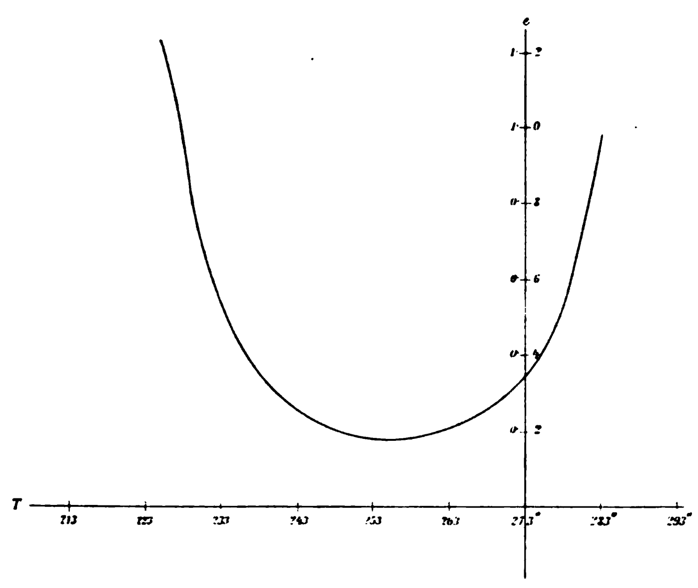


Fig. 3.

Für Werte von $T > 227 \cdot 4$ ist der Exponent stets negativ, somit die e-Potenz stets kleiner als 1. Da eine Temperatur von —45·6° C. erst in 9000 *m* auftritt, so ist für unser ganzes Intervall, in dem wir unsere Beziehung benützen können, die e-Potenz kleiner als 1.

Der kleinste Wert wird erreicht bei $T_1 = 255 \cdot 5$ (—17·5°). Folgende kleine Tabelle und Figur 3 gibt uns einen Überblick über die Werte und den Verlauf dieser e-Potenz in dem uns interessierenden Intervall:

$T_1 =$	283·6,	280,	270,	260,	255,	250,	240,	230,	226
τ in C. $=$	10·6,	+7,	—3,	—13,	—18,	—23,	—33,	—43,	—47
e-Potenz $=$	1,	0·664,	0·272,	0·200,	0·165,	0·192,	0·301,	0·741,	1·197

Nachdem wir nun die Beziehung zwischen Druck und Temperatur bei mit der Höhe veränderlichem Temperaturgradienten abgeleitet und diskutiert haben, wollen wir nun noch die erste Differentialgleichung bei Annahme eines auch mit der Zeit veränderlichen Temperaturgradienten ableiten. Die Temperatur selbst ist dann ebenfalls eine Funktion der Zeit und der Höhe. Der Einfachheit halber wählen wir nun eine lineare Temperaturverteilung

$$T = T_0 - \lambda x.$$

Dabei soll T_0 und auch λ von der Zeit t abhängen; dann wird

$$\varphi(x) = -\frac{\delta T_a}{\delta x} : -\frac{\delta T}{\delta x} = \frac{1}{\lambda}\frac{\delta T_a}{\delta x} = m,$$

wobei auch m jetzt von der Zeit abhängig ist.

Unsere Beziehung zwischen Druck und Temperatur lautet sodann unter diesen Voraussetzungen:

$$m\frac{c_p}{AR}\log T + C_1 = \log p.$$

Differenzieren wir nun nach der Zeit t, so ergibt sich

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = m\frac{c_p}{AR}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} + \frac{c_p}{AR}\log T\frac{dm}{dt}.$$

Betrachten wir bloß einen Punkt der Erdoberfläche, so können wir die totalen Differentialquotienten mit den partiellen vertauschen. Es ist also

$$\frac{1}{p}\frac{\delta p}{\delta t} = m\frac{c_p}{AR}\frac{1}{T}\frac{\delta T}{\delta t} + \frac{c_p}{AR}\log T\frac{\delta m}{\delta t}. \qquad 15)$$

Da nun

$$m = +\frac{A}{c_p}\frac{1}{\lambda}$$

und λ eine Funktion von t allein ist, so setzen wir

$$n(t) = +\frac{1}{\lambda},$$

so ist

$$-\frac{\delta x}{\delta T} = n(t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{A}{c_p}\frac{\delta n}{\delta t}.$$

Somit

$$\frac{\delta p}{\delta t} = m\frac{\rho c_p}{A}\frac{\delta T}{\delta t} + \rho T \log T\frac{\delta n}{\delta t},$$

wobei

$$\frac{\delta T}{\delta x} = -\frac{1}{n(t)}$$

ist.

Die Änderung des Luftdruckes an einem Orte somit hängt ab: 1. von der Änderung der Temperatur der Luftsäule selbst, 2. aber auch von der Änderung des Temperaturgradienten in dieser Säule. Der Betrag, den eine Änderung des Temperaturgradienten λ bei konstanter Temperatur T an der Erdoberfläche liefert, ist gegeben durch

$$\frac{\delta p}{\delta t} = \rho T \log T\frac{\delta n}{\delta t}. \tag{16)}$$

Differentialgleichung 15) gibt uns somit eine Beziehung zwischen der Änderung des Luftdruckes an einer bestimmten Stelle und der Änderung der Temperatur in der darüber liegenden Luftschichte.

Unter den vorausgesetzten Bedingungen ist Differentialgleichung 16) sofort integrierbar; sie gibt

$$p_1 - p_0 = \rho T \log T\{n_1 - n_0\}$$

oder

$$p_1 - p_0 = \rho T \log T\left\{\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_0}\right\}.$$

Sie besagt, daß die Änderung des Luftdruckes an der Erdoberfläche bei konstanter Temperatur proportional ist der Differenz der reziproken Temperaturgradienten oder, anders ausgedrückt, proportional der Differenz der einem Grade entsprechenden Höhenstufen. Wird der Luftdruck b in Millimetern

ausgedrückt und bedeutet M den Modul des Brigg'schen Logarithmensystems, so wird

$$b_1 = b_0 + \frac{\rho T \log T}{13 \cdot 596 M} \left\{ \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_0} \right\}.$$

Diese Formel gestattet uns jetzt die Änderung des Luftdruckes direkt in Millimetern aus der Änderung des vertikalen Temperaturgradienten zu berechnen.

So wird z. B.

für λ_0 (in Graden pro 100 *m*)	1,	0·9,	0·7,	0·6,	0·6° C.
und λ_1 (in Graden pro 100 *m*)	0·8,	0·8,	0·6,	0·5,	0·4° C.
bei $T = 283$ ($\tau = 10°$ C.),					
$b_1 - b_0$ (in Millimetern) . . .	3·80,	2·12,	3·64,	5·02,	12·61
bei $T = 293$ ($\tau = 20°$ C.),					
$b_1 - b_0$ (in Millimetern) . . .	3·68,	2·06,	3·53,	4·86,	12·24

Über eine Cubaturformel

von

Dr. O. v. Lichtenfels in Graz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. November 1907.)

Die bekannte Formel zur Berechnung eines Körperinhaltes mit Hilfe von Zylinderkoordinaten:

$$V = \int\int\int r.du.dr.dz$$

läßt sich, wenn man zuerst bei konstantem u die Integration nach r und z ausgeführt denkt, in einer Weise umgestalten, daß aus ihr eine einfache Integralformel hervorgeht, welche als einen sehr speziellen Fall auch die sogenannte »Guldin'sche Regel« zur Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers in sich schließt.

Die Anwendung der obigen Formel setzt voraus, daß der Schnitt, welchen die dem Winkel u entsprechende Ebene E mit dem zu kubierenden Körper bildet, entweder überhaupt ganz auf einer Seite der z-Achse gelegen ist — wobei diese auch einen Teil der Begrenzungslinie des Schnittes bilden kann — oder daß davon nur der auf einer bestimmten Seite der z-Achse gelegene Teil berücksichtigt und dann die Integration nach u entsprechend geleitet wird. Macht man also diese Annahmen, nennt man den Inhalt des Schnittes F, seinen Schwerpunkt S und ρ den Abstand des Punktes S von der z-Achse, so ist:

$$\int\int_{(F)} r.dr.dz = F.\rho,$$

und das Volumenelement erster Ordnung ist nach Ausführung dieser Integration durch

$$dV = F.\rho.du$$

gegeben. Wenn aber nun die dem Winkel $u+du$ entsprechende Ebene E' den Schnitt mit dem Schwerpunkte S' liefert, $SS'=ds$ gesetzt und der Winkel der Richtung SS' mit der in der Richtung der wachsenden u positiv gezählten Normalen zur Ebene E: α genannt wird, so kann ρdu durch $ds.\cos\alpha$, das Volumenelement durch:

$$dV = F.\cos\alpha.ds$$

ersetzt werden. In dieser Formel ist keine Beziehung auf das angewendete Koordinatensystem mehr enthalten, E und E' können Elemente irgend einer stetigen Serie von Ebenen sein, und man kann daher folgenden Satz aussprechen:

»Wird ein zu kubierender Körper K von einer stetigen, einfach unendlichen Serie von Ebenen E geschnitten, deren jede einen Schnitt liefert, welcher ganz auf einer Seite der Geraden liegt, die E mit der unendlichbenachbarten Ebene der Serie gemein hat, nennt man F den Flächeninhalt des Schnittes, S seinen Schwerpunkt, s die Bogenlänge der Kurve Σ der Punkte S, endlich α den Winkel der Tangente an Σ in S mit der Normalen zu E, so ist durch die Formel:

$$(a)\ldots \qquad V = \int_{s_0}^{s_1} F.\cos\alpha.ds$$

das Volumen von K gegeben, welches zwischen seiner sonstigen, von den Ebenen E in den Schnitten F getroffenen Begrenzung und den beiden Ebenen enthalten ist, die den Werten s_0 und s_1 von s entsprechen. F und α sind hier als Funktionen von s dargestellt angenommen.«

Zu demselben Satze kann man auch auf folgendem Wege gelangen. — Wird in der (xy) Ebene des rechtwinkeligen Systems eine Linie L gezogen, die einen endlichen Flächenraum F_1 begrenzt, durch L eine Zylinderfläche mit Erzeugenden parallel zur z-Achse gelegt und endlich dieser Zylinder durch eine Ebene:

$$(E)\ldots . z = ax+by+c$$

geschnitten, welche L nicht schneidet, so ist das Volumen zwischen C, E und der (xy) Ebene:

$$V = \iint_{(F_1)} (ax+by+c)\, dF_1.$$

Nennt man aber ξ, η die Koordinaten des Schwerpunktes von F_1, so ist:

$$\iint_{(F_1)} x dF_1 = F_1.\xi; \quad \iint_{(F_1)} y.dF_1 = F_1.\eta,$$

also:

$$V = F_1.(a\xi+b\eta+c) = F_1.\zeta,$$

wenn ζ die z-Koordinate des Schwerpunktes S der Schnittfläche von E mit dem Zylinder ist. Eine zweite Ebene E', welche so liegt, daß die Schnittgerade G von E und E' außerhalb der Zylinderfläche verläuft — oder so, daß sie höchstens einen Teil der etwaigen gemeinsamen Begrenzung der Schnittflächen von E und E' mit der Zylinderfläche bildet — liefert ebenso:

$$V' = F_1.\zeta',$$

und zwischen beiden Ebenen und der Zylinderfläche ist dann das Volumen

$$V'-V = F_1(\zeta'-\zeta)$$

enthalten. Ist nun endlich α der Winkel zwischen der Normalen zu E und der z-Achse, F der Flächeninhalt des Schnittes in E, so ist

$$V'-V = F.\cos\alpha.(\zeta'-\zeta).$$

Dies gibt, wenn E und E', wie früher, als unendlichbenachbarte Elemente einer Serie erklärt werden u. s. w., wieder die Formel

$$dV = F.\cos\alpha.ds$$

für das Volumenelement.

Die sogenannte »Guldin'sche Regel« ist schon von Monge (Applic. de l'Analyse à la Géometrie, Éd. Liouville, p. 333) auf den Fall ausgedehnt worden, daß der zu berechnende Körper von einer Wälzungsfläche begrenzt ist. Dann ist

$F =$ const, $\alpha = 0$. — Im Jahre 1903 hat ferner Stolz in diesen Sitzungsberichten, Bd. 102, p. 343, eine Verallgemeinerung publiziert, welche aus (a) durch die Annahme $\alpha = 0$ hervorgeht. Diese Bedingung zu erfüllen, ist allerdings auf unendlich viele Arten möglich. So stellen für den Fall der zentralen Fläche zweiter Ordnung:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 - \delta = 0$$

die Gleichungen:

$$x = a.t^{\alpha}; \quad y = b.t^{\beta}, \quad z = ct^{\gamma},$$

wo a, b, c willkürliche Konstanten sind, Kurven dar, deren Punkte die Schwerpunkte, d. h. die Mittelpunkte der Schnitte ihrer Normalebenen mit der Fläche sind.

Die hier dargelegte weiteste Verallgemeinerung der Guldinschen Regel, die Formel (a), welche ich seit dem Jahre 1894 in meinen Vorlesungen bringe, scheint aber bisher noch nicht bemerkt worden zu sein.

Über das Emissionsvermögen von Gesteinen, Wasser und Eis

von

Dr. Karl Siegl.

Aus dem II. physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. November 1907.)

Die Ermittlung der Emissionsfunktion des Kirchhoff'schen Gesetzes bildet den Gegenstand sehr zahlreicher Arbeiten. Die ältesten Versuche wurden in der Weise angestellt, daß man die Abkühlungsgeschwindigkeit erhitzter Körper beobachtete. Solche Versuche hat schon Newton[1] angestellt. Er zog aus seinen Messungen den Schluß, die pro Zeiteinheit ausgestrahlte Wärmemenge sei proportional der Temperaturdifferenz zwischen strahlendem Körper und Umgebung: $S = a(t-t_0)$. Dieses Gesetz ist für kleine Temperaturdifferenzen in erster Annäherung richtig, für größere aber ganz falsch.

Dulong und Petit[2] maßen die Abkühlungsgeschwindigkeit von Thermometerkugeln, welche sich in einer Hohlkugel von konstanter Temperatur befanden, und kamen zu dem Resultate, daß die pro Zeit- und Flächeneinheit von einem Körper von der absoluten Temperatur T ausgestrahlte Wärmemenge sich durch den Ausdruck darstellen läßt: $S = ma^T$, wo m und a zwei Konstanten sind.

---

[1] I. Newton, Scala graduum caloris et frigoris. Opuscula mathematica, vol. II, p. 417—423 (1701).

[2] P. L. Dulong et A. T. Petit, Des lois du refroidissement. Ann. chim. et phys., 7, p. 225—264 und 337—367 (1817).

De la Provostaye und Desains[1] prüften diese Formel und fanden, daß a keine Konstante ist. Wilhelmy[2] weist darauf hin, daß das Gesetz nicht richtig sein könne, weil S für $T = 0$ nicht 0 wird, und leitet aus den Messungen von Dulong und Petit eine andere Formel ab: $S = m.t.a^t$. Dieses Gesetz gibt aber für Temperaturen über 200° C. viel zu große Werte von S.

Rosetti[3] mißt mit der Thermosäule die Strahlung eines mit Wasser oder Quecksilber gefüllten Leslie'schen Würfels bis zu 300° und findet für die Strahlung die Formel: $S = mET^2(T-\vartheta)-u(T-\vartheta)$. m, E und u sind Konstanten, T ist die absolute Temperatur des strahlenden, ϑ die des bestrahlten Körpers. Das Gesetz von Rosetti gibt bei höheren Temperaturen zu kleine Werte von S.

Inzwischen hat Stefan[4] eine neue Gleichung aufgestellt: $S = \sigma(T^4-T_0^4)$, wo σ eine Konstante, T die absolute Temperatur des strahlenden und T_0 die des bestrahlten Körpers bedeutet. Stefan wurde auf diese Gleichung durch Zahlen geführt, welche Tyndall[5] aus Beobachtungen der Emission von glühendem Platin erhalten hatte. Er meinte, seine Gleichung gelte für alle Körper. In Wirklichkeit gibt sie aber nur die Strahlung des absolut schwarzen Körpers richtig wieder. Boltzmann[6] hat das Stefan'sche Gesetz theoretisch begründet, hob aber zu wenig scharf hervor, daß seine Ableitung nur für den schwarzen Körper gelte. In der Folgezeit suchte man deshalb die an nicht schwarzen Körpern angestellten Strahlungsmessungen immer wieder durch das Stefan'sche Gesetz dar-

---

[1] F. de la Provostaye et P. Desains, Memoire sur le rayonnement de la chaleur. Ann. chim. et phys., 16, p. 337—425 (1846).

[2] L. Wilhelmy, Über das Gesetz der Wärmeabgabe. Pogg. Ann., 84, p. 119—135 (1851).

[3] F. Rosetti, Indagini sperimentali sulla temperatura del sole. Atti Acc. Lincei, Mem. (3), 2, 1, p. 169—200 (1878).

[4] J. Stefan, Über die Beziehung der Wärmestrahlung und der Temperatur. Diese Sitzungsber., 79, p. 391—428 (1879).

[5] J. Tyndall, On luminous and obscure radiation. Phil. Mag. (4), 28, p. 329—341 (1864).

[6] L. Boltzmann, Ableitung des Stefan'schen Gesetzes. Wied. Ann., 22, p. 31—39 und 291—294 (1884).

zustellen und da dies nicht gelang, war man genötigt, neue Strahlungsgleichungen aufzustellen.

So hat Violle[1] die Strahlung von Platin beobachtet, welches sich in Tiegeln in einem Perrot'schen Ofen befand, und die Gleichung erhalten $S = mTb^{T^2}.a^T$, wo m, b und a drei Konstanten sind. Kurze Zeit darauf stellte er eine neue Formel auf: $S = mT^3(1+\varepsilon\alpha^{-T})^T$. Edler[2] prüfte die Gültigkeit dieser Formeln sowie einer inzwischen von Weber[3] aufgestellten Gleichung $S = Ae^{aT}.T$ an den Zahlen, die er bei der Untersuchung der Emission von Ruß, Eisenoxyd und Zinkweiß erhielt, und fand, daß seine Messungen besser durch die Gleichung wiedergegeben werden: $S = k(T-T_0)e^{\alpha(T-T_0)}$, wo k und α Konstanten sind, T die absolute Temperatur des strahlenden, T_0 die des bestrahlten Körpers bezeichnet.

Endlich untersuchte Paschen[4] die Strahlung von Ruß, Kohle, Eisenoxyd, Kupferoxyd und blankem Platin und kam zu dem Resultate: Das Strahlungsgesetz besitzt die allgemeine Form $S = cT^\varepsilon$, wo c und ε zwei Konstanten sind, welche von der Natur des strahlenden Körpers abhängig sind. c ist für einen nicht schwarzen Körper stets kleiner als σ und ε nähert sich um so mehr der Zahl 5, je weiter sich der strahlende Körper von dem absolut schwarzen Körper entfernt.

In jüngster Zeit hat Kurlbaum[5] eine absolute Bestimmung der Konstante σ mit den großen Mitteln der Reichsanstalt ausgeführt und erhielt $\sigma = 1{\cdot}28.10^{-12}\left[\frac{\text{Grammkal.}}{cm^2.\text{sec}}\right]$.
Durch Vergleich der Strahlung eines nicht schwarzen Körpers

---

[1] J. Violle, Intensités lumineuses des radiations émises par le platine incandescent. Compt. rend., 92, p. 866—868 (1881) und 105, p. 163—165 (1887).

[2] J. Edler, Untersuchungen über die Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur. Wied. Ann., 40, p. 531—560 (1890).

[3] H. F. Weber, Untersuchungen über die Strahlung fester Körper. Berl. Ber., 2, p. 933—957 (1888).

[4] F. Paschen, Über die Gesamtemission glühenden Platins, Wied. Ann., 49, p. 50—68 (1893). und Über Gesetzmäßigkeiten in den Spektren fester Körper, Wied. Ann., 58, p. 455—492 (1896) und 60, p. 662—723 (1897).

[5] F. Kurlbaum, Über eine Methode zur Bestimmung der Strahlung in absolutem Maße. Ann. d. Phys. u. Chem., 65, p. 746 (1898).

mit der des schwarzen lassen sich nun die Konstanten c und ε ebenfalls in absolutem Maße bestimmen. Bezeichnen wir mit Rücksicht auf die folgende Versuchsanordnung die Strahlung des Versuchskörpers mit S, die der Thermosäule mit Σ, die der Klappe mit s und die der Blenden mit σ, so gelten folgende Beziehungen:

$$\alpha_0 = p\{s+\sigma-[\Sigma+a(s-\Sigma)]\}$$
$$\alpha_1 = p\{S+\sigma-[\Sigma+a(S-\Sigma)]\},$$

wo p und a zwei Proportionalitätsfaktoren und α_0, beziehungsweise α_1 die Ausschläge bei geschlossener Klappe, beziehungsweise vorgestelltem Versuchskörper sind. Das zweite Glied in der eckigen Klammer stellt die durch die Zustrahlung von s, beziehungsweise S hervorgerufene Änderung der Ausstrahlung der Thermosäule dar. Infolge der geringen Temperaturänderung der letzteren ist diese Änderung der wirkenden Zustrahlung proportional.

$$\alpha_1-\alpha_0 = \alpha = p\{S-s-aS+as\} = p.(1-a)S-p(1-a)s$$

oder

$$\alpha = AS-B.$$

A und B sind zwei Apparatkonstanten, welche sich aus der Strahlung des schwarzen Körpers bei zwei verschiedenen Temperaturen ergeben:

$$\alpha_1 = A\sigma T_1^4-B$$
$$\alpha_2 = A\sigma T_2^4-B$$

$$A = \frac{\alpha_2-\alpha_1}{\sigma(T_2^4-T_1^4)} \quad \text{und} \quad B = A\sigma T_1^4-\alpha_1.$$

Logarithmiert man die Gleichung $\alpha = AS-B$, so ergibt sich: $\lg\frac{\alpha+B}{A} = \lg S = \lg c+\varepsilon \lg T$. Trägt man $\lg S$ und $\lg T$ in ein Koordinatensystem ein, so erhält man eine Gerade, deren Tangente ε ist. c ergibt sich zu:

$$\lg c = \lg\frac{\alpha+B}{A}-\varepsilon \lg T.$$

Eine große Schwierigkeit liegt in der Bestimmung der absoluten Temperatur *T*. Bei den früher erwähnten Messungen des Emissionsvermögens von Ruß, Kupferoxyd, Zinkweiß etc. wurden diese Substanzen in dünnen Schichten auf eine Heizplatte von bekannter Temperatur aufgetragen. Dabei zeigte sich, daß die Intensität der Strahlung von der Dicke der Schicht abhängt und ein Maximum erreicht.[1] Wird die Schichtendicke noch weiter vergrößert, so tritt wieder eine Abnahme der Strahlung ein, weil jetzt die Temperatur der Oberfläche, die ja zur Strahlung am meisten beiträgt, schon wesentlich niedriger ist als die Temperatur der Heizfläche.[2] Will man das Emissionsvermögen von Gesteinen untersuchen, so dürfen dieselben nicht pulverisiert und in dünnen Schichten aufgetragen werden, weil sich dadurch das Absorptionsvermögen und die Diathermansie der Gesteine ändert, sondern man darf nur massive Platten verwenden. Dann ist aber die Temperatur der strahlenden Oberfläche eine ganz andere als die der Heizfläche und erstere ganz genau zu ermitteln, ist sehr schwierig. Thermometer, die ja stets eine große Masse besitzen, sind von vornherein ausgeschlossen. Es kommen nur Thermoelemente und allenfalls Bolometer in Betracht. Legt man die Lötstelle des Thermoelementes einfach an die strahlende Oberfläche an, so ist die Temperatur der Lötstelle von der Art der Berührung sehr stark abhängig und das Thermoelement liefert Ausschläge, welche bis zu 30 $^0/_0$ untereinander differieren. Versuchsweise wurde ein dünnes Kupferscheibchen, mit welchem das Thermoelement verlötet war, an die strahlende Fläche gepreßt. In diesem Falle waren die Differenzen zwischen den Temperaturangaben des Thermoelementes sehr gering, aber es zeigte nicht die Temperatur, welche die strahlende

[1] E. Villari, Sul potere emissivo e sulla diversa natura del calorico emisso da diverse sostanze riscaldate a 100 gradi. Nuovo Cim. (3), 4, p. 5—34 (1878) und (4), 11, p. 436 (1900). — F. Kurlbaum, Änderung der Emission und Absorption von Platinschwarz und Ruß mit zunehmender Schichtdicke. Wied. Ann., 67, p. 846—858 (1899). — E. G. Hull, On the radiating power of shellac films of various thickness. Dublin Proc. (2), p. 90—91 (1880).

[2] F. Kurlbaum, Über die Temperaturdifferenz zwischen der Oberfläche und dem Innern eines strahlenden Körpers. Drud. Ann., 2, p. 546—559 (1900).

Fläche besaß, wenn sie frei strahlte, das Scheibchen also nicht angelegt war. Erst als der feine Draht des Thermoelementes ohne Scheibchen in einen schmalen Spalt der strahlenden Fläche versenkt wurde, ergaben sich brauchbare Werte von *T*. Die allenfalls noch vorhandene kleine Temperaturdifferenz zwischen Thermoelement und strahlender Oberfläche kommt, wie eine Überschlagsrechnung zeigte, nicht in Betracht.

Strahlung der Gesteine.

Zur Messung der Strahlung diente eine lineare Thermosäule nach Rubens.[1] Dieser stand in 33 *cm* Entfernung der strahlende Körper gegenüber. Dazwischen befanden sich drei Blenden von 2 *cm* Öffnung zur Abschirmung seitlicher Strahlung und Verhütung von Luftströmungen. Zur Bestimmung des Nullpunktes nahm die Stelle des Versuchskörpers eine Klappe ein. Thermosäule, Blenden und Klappe wurden durch Wasser auf konstanter Temperatur erhalten. Der schwarze Körper war nach der Vorschrift von Kurlbaum[2] hergestellt und konnte elektrisch geheizt werden. Die zu untersuchenden Gesteine waren in Form von 5 bis 6 *cm* breiten und 3 bis 10 *mm* dicken Platten auf einer Schieferplatte befestigt, welche durch eine vom elektrischen Strome durchflossene Platinspirale gleichmäßig geheizt wurde. In die strahlende Oberfläche wurde eine gerade Linie so tief eingeritzt, daß der 0·1 *mm* dicke Draht des Thermoelementes eben unter der Oberfläche verschwand. Die strahlende Fläche war eben abgeschliffen, doch niemals glänzend. Durch Einschalten von passenden Glühlampenwiderständen in den Stromkreis der Heizspirale wurde die Strahlung der einzelnen Gesteinsproben bei je 12 verschiedenen Temperaturen im Intervall von 60 bis 200° C. gemessen. Das Thermoelement bestand aus einem 0·1 *mm* starken Eisendrahte, welcher mit einem gleichstarken Neusilberdrahte verlötet war. Der Draht wurde mittels einer bogen-

---

[1] H. Rubens, Über eine neue Thermosäule. Zeitschr. f. Instrumentenk., 18, p. 65 (1898).

[2] F. Kurlbaum, Emission und Absorption von Platinschwarz und Ruß. Ann. d. Phys. u. Chem., 67, p. 846—858 (1899).

förmigen Feder gestreckt erhalten und so in die erwähnte Vertiefung der strahlenden Fläche eingebettet. Als Maß der Temperaturdifferenz zwischen der erwärmten und den auf konstanter Temperatur erhaltenen kalten Lötstellen dienten die ersten Ausschläge β. Diese waren bis an das Ende der Skala den Temperaturdifferenzen proportional. Der Proportionalitätsfaktor ist in den Tabellen mit *a* bezeichnet. Geeicht wurde das Thermoelement durch eine Kältemischung von fester Kohlensäure und Äther, durch schmelzendes Eis und durch die Siedepunkte von Wasser und Anilin.

Zur Messung der Ausschläge der Thermosäule und des Thermoelementes diente ein d'Arsonval-Galvanometer von 6·3 Ω innerem Widerstand und einer Empfindlichkeit von 5.10^{-9} Ampère pro Skalenteil. Vor dasselbe war außer einer gewöhnlichen Wippe noch ein zweiter Kommutator geschaltet, welcher gestattete, rasch hintereinander einmal die Thermosäule mit 6·2 Ω Vorschaltwiderstand, das andere Mal das Thermoelement mit 3000 S. E. Vorschaltwiderstand an das Galvanometer anzuschließen. Infolge der Änderung der Zimmertemperatur und der Empfindlichkeit des Galvanometers blieben die Werte von *A*, *B* und *a* nicht ganz konstant und wurden deshalb für jede Versuchsreihe neu bestimmt.

Bei jeder Messung von Strahlung und Temperatur wurde aus zehn Werten von α, beziehungsweise β das Mittel genommen. Der mittlere Fehler dieses Mittels betrug durchschnittlich für α 0·4%, für β 0·2%. Die folgenden Tabellen enthalten oben die Werte der Konstanten *A*, *B* und *a*. α bezeichnet den Ausschlag der Thermosäule, β den des Thermoelementes. *S* und *T* sind die daraus berechneten Werte der Strahlung in Grammkalorien pro Quadratzentimeter und Sekunde und der absoluten Temperatur. Bei der Konstruktion der Strahlungskurven ist es zweckmäßiger, $\frac{1}{4}\lg S$ statt $\lg S$ als Ordinate einzutragen. Diese Werte von $\frac{1}{4}\lg S$ und $\lg T$, welche zur Konstruktion der Kurven dienten, sind in den Tabellen ersichtlich. Unten sind die für die Strahlungskonstanten berechneten Werte *c* und ε angegeben.

Die untersuchten Gesteine wurden dem Verfasser zum großen Teile in sehr dankenswerter Weise von Herrn Prof. Berwerth aus dem k. k. Hofmuseum zur Verfügung gestellt.

Basaltlava.

$A = 9008$ $B = 28 \cdot 1$ $a = 3 \cdot 118$

α	$\frac{1}{4} \lg S$	S	β	$\lg T$	T
78·1	0·5179–1	0·01179	128·2	2·5239	334·1
93·6	5327	1351	160·8	5373	344·6
108·1	5449	1512	192·5	5499	354·7
128·2	5598	1735	225·6	5627	365·3
150·5	5743	1982	265·9	5778	378·3
177·9	5898	2287	311·2	5942	392·8
208·8	6050	2630	351·1	6081	405·6
244·2	6201	3023	395·8	6232	420·0
283·7	6348	3461	437·8	6369	433·4
329·2	6496	3966	486·6	6523	449·1
371·7	6618	4438	524·8	6640	461·3
411·1	6720	4876	558·0	6739	472·0

$\varepsilon = 4 \cdot 083$ $c = 0 \cdot 589 . 10^{-12}$

Basalt.

$A = 9032$ $B = 28 \cdot 2$ $a = 3 \cdot 121$

α	$\frac{1}{4} \lg S$	S	β	$\lg T$	T
79·0	0·5188–1	0·01186	132·4	2·5256	335·4
93·3	5322	1345	165·7	5392	346·1
114·8	5499	1583	211·9	5574	361·9
135·0	5642	1806	242·9	5692	370·9
153·9	5761	2016	277·8	5821	382·0
179·7	5905	2301	316·6	5960	394·5
204·6	6028	2578	353·4	6088	406·3
243·6	6196	3009	402·2	6252	421·9
283·3	6344	3448	440·0	6375	434·0
316·8	6452	3809	482·1	6508	447·5
355·3	6570	4246	515·7	6611	458·2
396·2	6680	4699	552·4	6721	470·0

$\varepsilon = 4 \cdot 089$ $c = 0 \cdot 557 . 10^{-12}$

Belgischer Marmor.

$A = 9020$ $B = 28\cdot2$ $a = 3\cdot122$

α	$\frac{1}{4}\lg S$	S	β	$\lg T$	T
75·4	0·5150–1	0·01148	128·7	2·5240	334·2
89·2	5286	1301	157·9	5360	343·6
103·4	5410	1459	190·2	5489	353·9
118·9	5531	1631	222·5	5614	364·3
139·9	5676	1864	258·1	5748	375·7
160·1	5799	2085	288·5	5859	385·4
182·3	5920	2333	325·0	5989	397·1
216·4	6083	2712	367·1	6134	410·6
257·6	6252	3168	421·6	6315	428·1
298·4	6397	3621	461·0	6441	440·7
337·2	6519	4051	501·8	6568	453·7
374·0	6623	4459	534·5	6667	464·2

$\varepsilon = 4\cdot090$ $c = 0\cdot552\cdot10^{-12}$

Tonschiefer.

$A = 9009$ $B = 28\cdot1$ $a = 3\cdot118$

α	$\frac{1}{4}\lg S$	S	β	$\lg T$	T
74·4	0·5140–1	0·01138	133·5	2·5261	335·8
86·0	5256	1266	162·8	5381	345·2
98·3	5368	1403	183·1	5462	351·7
113·2	5490	1570	217·2	5595	362·7
128·6	5601	1739	247·5	5710	372·4
149·2	5735	1968	280·6	5832	383·0
171·5	5865	2218	316·3	5960	394·5
186·6	5943	2383	342·1	6050	402·7
215·1	6078	2699	371·9	6152	412·3
244·0	6200	3020	410·1	6279	424·5
289·5	6368	3525	463·6	6451	441·7
337·6	6521	4059	511·6	6600	457·1

$\varepsilon = 4\cdot099$ $c = 0\cdot508.10^{-12}$

Humus.

$A = 9052$ $B = 28{\cdot}6$ $a = 3{\cdot}133$

α	$\frac{1}{4}\lg S$	S	β	$\lg T$	T
71·8	0·5113–1	0·01110	133·6	2·5259	335·7
83·1	5228	1234	165·1	5387	345·7
96·3	5350	1380	193·6	5500	354·8
113·5	5490	1570	230·8	5643	366·7
136·1	5650	1820	270·9	5792	379·5
156·9	5779	2049	307·9	5925	391·3
182·8	5921	2336	345·2	6055	403·2
221·8	6105	2767	402·0	6246	421·3
258·4	6253	3171	439·9	6369	433·4
287·7	6360	3499	476·6	6485	445·1
321·3	6468	3865	508·1	6582	455·2
366·5	6600	4365	550·8	6710	468·8

$\varepsilon = 4{\cdot}110$ $c = 0{\cdot}458.10^{-12}$

Rheinischer Schiefer.

$A = 8966$ $B = 28{\cdot}0$ $a = 3{\cdot}103$

α	$\frac{1}{4}\lg S$	S	β	$\lg T$	T
62·4	0·5009–1	0·01008	130·4	2·5251	335·0
75·0	5151	1149	163·3	5386	345·6
89·1	5290	1306	194·3	5510	355·6
105·1	5429	1485	230·2	5649	367·2
122·2	5560	1675	265·4	5781	378·5
147·3	5728	1955	306·4	5930	391·7
173·7	5880	2249	349·1	6080	405·5
205·5	6039	2604	397·8	6245	421·2
240·5	6191	2995	438·5	6378	434·3
284·3	6355	3483	493·2	6551	452·0
310·4	6442	3774	518·3	6629	460·2
338·9	6530	4093	545·9	6711	468·9

$\varepsilon = 4{\cdot}131$ $c = 0{\cdot}378.10^{-12}$

Schlesischer Schiefer.

$A = 8977$ $B = 28\cdot0$ $a = 3\cdot107$

α	$\frac{1}{4}\lg S$	S	β	$\lg T$	T
62·6	0·5010–1	0·01009	131·1	2·5253	335·2
75·1	5150	1148	161·5	5378	345·0
87·6	5275	1288	194·8	5511	355·7
115·7	5411	1601	227·1	5636	366·1
120·1	5544	1650	262·7	5770	377·6
141·0	5687	1883	298·6	5901	389·1
163·4	5822	2132	340·7	6049	402·6
187·5	5951	2401	367·9	6143	411·4
214·9	6081	2706	412·2	6291	425·7
248·6	6222	3082	452·1	6420	438·5
288·3	6368	3525	500·0	6570	453·9
326·7	6492	3952	533·2	6671	464·6

$\varepsilon = 4\cdot132$ $c = 0\cdot374.10^{-12}$

Gneis.

$A = 8977$ $B = 28\cdot0$ $a = 3\cdot107$

α	$\frac{1}{4}\lg S$	S	β	$\lg T$	T
59·2	0·4969–1	0·009719	130·3	2·5250	335·0
68·6	5080	0·01076	156·5	5358	343·4
82·7	5228	1234	213·0	5482	353·3
93·8	5331	1356	217·4	5599	363·0
105·3	5429	1485	241·0	5689	370·6
122·6	5562	1678	274·7	5814	381·4
138·4	5670	1854	305·6	5926	391·4
162·3	5816	2121	340·8	6050	402·7
191·9	5973	2450	388·1	6211	417·9
228·3	6139	2855	438·7	6377	434·2
266·5	6290	3281	483·5	6519	448·6
312·0	6446	3788	532·2	6668	464·3

$\varepsilon = 4\cdot142$ $c = 0\cdot341.10^{-12}$

Serpentin.

$A = 8989$ $B = 28 \cdot 1$ $a = 3 \cdot 112$

α	$\frac{1}{4}\lg S$	S	β	$\lg T$	T
57·0	0·4940–1	0·009462	128·7	2·5242	334·4
67·0	5061	0·01058	155·6	5353	343·0
83·2	5232	1238	199·5	5528	357·1
97·1	5360	1393	226·2	5631	365·7
114·2	5499	1583	265·9	5780	378·4
132·2	5628	1783	296·7	5892	388·3
153·1	5761	2016	330·5	6012	399·2
175·2	5886	2262	371·3	6152	412·3
204·0	6030	2582	412·0	6288	425·4
235·7	6169	2935	456·1	6430	439·5
265·5	6285	3266	487·9	6530	449·8
298·6	6401	3634	524·2	6641	461·4

$\varepsilon = 4 \cdot 148$ $c = 0 \cdot 323 . 10^{-12}$

Roter Sandstein.

$A = 8997$ $B = 28 \cdot 1$ $a = 3 \cdot 114$

α	$\frac{1}{4}\lg S$	S	β	$\lg T$	T
54·5	0·4907–1	0·009179	130·2	2·5248	334·8
64·5	5031	0·01029	157·2	5359	343·5
75·7	5155	1153	190·0	5490	354·0
89·6	5292	1309	221·6	5613	364·2
108·1	5450	1514	260·7	5760	376·7
132·2	5627	1782	306·9	5928	391·6
155·1	5772	2036	350·1	6079	405·4
189·7	5960	2421	403·2	6258	422·5
219·9	6101	2757	443·5	6389	435·4
259·0	6260	3192	490·1	6536	450·4
282·1	6344	3448	517·9	6621	459·3
310·5	6439	3764	547·5	6710	468·8

$\varepsilon = 4 \cdot 158$ $c = 0 \cdot 294 . 10^{-12}$

Italienischer Marmor.

$A = 9042$ $B = 28\cdot 2$ $a = 3\cdot 130$

α	$\frac{1}{4}\lg S$	S	β	$\lg T$	T
55·0	0·4910–1	0·009205	131·8	2·5252	335·1
64·1	5022	0·01020	160·4	5369	344·3
76·4	5158	1157	192·2	5495	354·4
92·2	5311	1332	226·7	5628	365·4
106·8	5435	1493	262·5	5762	376·9
126·1	5580	1706	298·1	5891	388·2
140·1	5731	1961	339·9	6038	401·6
178·0	5895	2280	389·2	6205	417·4
208·4	6021	2561	418·7	6302	426·8
240·2	6181	2968	474·0	6478	444·4
260·0	6292	3287	504·4	6572	454·2
308·7	6428	3726	546·9	6700	467·7

$\varepsilon = 4\cdot 165$ $c = 0\cdot 281 . 10^{-12}$

Quarzporphyr.

$A = 8998$ $B = 28\cdot 1$ $a = 3\cdot 115$

α	$\frac{1}{4}\lg S$	S	β	$\lg T$	T
49·6	0·4840	0·008630	141·3	2·5294	338·4
59·4	4970	9728	172·1	5419	348·3
70·5	5099	0·01095	200·2	5530	357·3
81·1	5210	1213	226·4	5631	365·7
97·3	5360	1393	268·6	5789	379·2
116·8	5517	1610	304·2	5918	390·7
131·2	5620	1770	334·0	6023	400·2
148·0	5729	1957	365·4	6131	410·3
174·1	5879	2247	406·4	6268	423·5
199·8	6009	2533	448·9	6406	437·1
244·9	6205	3034	504·9	6581	455·1
257·4	6320	3373	514·1	6609	458·0

$\varepsilon = 4\cdot 190$ $c = 0\cdot 220 . 10^{-12}$

Rötlicher Granit.

$A = 8986$ $B = 28\cdot1$ $a = 3\cdot110$

α	$\frac{1}{4}$ lg S	S	β	lg T	T
44·4	0·4767–1	0·008069	133·4	2·5262	335·9
53·7	4898	9103	166·9	5399	346·7
63·6	5022	0·01020	190·7	5494	354·3
79·3	5193	1195	235·3	5666	368·6
94·2	5335	1361	268·2	5789	379·2
110·3	5469	1540	304·9	5922	391·0
131·0	5620	1770	349·9	6080	405·5
156·4	5781	2053	391·6	6221	418·9
180·3	5913	2318	426·2	6335	430·0
202·9	6025	2570	463·7	6455	442·1
226·6	6131	2834	498·3	6563	453·2
256·1	6250	3162	532·4	6667	464·2

$\varepsilon = 4\cdot202$ $c = 0\cdot197.10^{-12}$

Mauthausner Granit.

$A = 9031$ $B = 28\cdot2$ $a = 3\cdot126$

α	$\frac{1}{4}$ lg S	S	β	lg T	T
36·4	0·4637–1	0·007158	128·6	2·5239	334·1
45·4	4778	8151	160·0	5368	344·2
56·1	4925	9333	196·8	5514	356·0
70·4	5095	0·01091	232·0	5649	367·2
84·4	5240	1247	273·4	5803	380·5
104·8	5420	1472	319·7	5969	395·3
117·9	5522	1617	350·3	6075	405·0
136·0	5649	1818	383·0	6186	415·5
159·1	5792	2074	421·3	6312	427·8
178·7	5900	2291	459·1	6433	439·8
207·1	6040	2606	496·6	6550	451·9
221·0	6145	2871	530·2	6652	462·6

$\varepsilon = 4\cdot230$ $c = 0\cdot153.10^{-12}$

Granit (Fichtelgebirge).

$A = 8978$ $B = 28\cdot0$ $a = 3\cdot108$

α	$\frac{1}{4}\lg S$	S	β	$\lg T$	T
37·0	0·4650	0·007244	134·8	2·5269	336·4
45·9	4788	8226	169·5	5410	347·5
56·2	4930	9376	199·0	5527	357·0
67·8	5070	0·01067	234·3	5663	368·4
82·1	5221	1226	276·2	5819	381·9
94·5	5372	1409	309·7	5940	392·6
114·0	5498	1582	346·2	6068	404·4
129·6	5611	1756	380·6	6185	415·4
152·6	5759	2012	415·2	6300	426·6
172·3	5871	2231	452·0	6419	438·4
201·9	6021	2561	498·0	6563	453·2
230·9	6150	2884	537·1	6682	465·8

$\varepsilon = 4\cdot239$ $c = 0\cdot141.10^{-12}$

Glimmerschiefer.

$A = 8965$ $B = 28\cdot0$ $a = 3\cdot103$

α	$\frac{1}{4}\lg S$	S	β	$\lg T$	T
32·2	0·4568–1	0·006717	127·3	2·5238	334·0
40·6	4710	7656	165·7	5396	346·4
50·9	4861	8798	199·7	5531	357·4
65·5	5045	0·01042	243·9	5701	371·6
79·0	5192	1193	281·7	5841	383·8
92·4	5320	1343	310·9	5946	393·2
106·3	5439	1498	343·9	6062	403·8
124·4	5576	1700	385·2	6203	417·2
143·2	5702	1909	414·2	6299	426·5
166·0	5838	2164	454·4	6429	439·4
198·7	5983	2473	502·6	6580	455·0
223·5	6120	2805	543·2	6703	468·1

$\varepsilon = 4\cdot255$ $c = 0\cdot122.10^{-12}$

Dolomitenkalk.

$A = 8967$ $B = 28\cdot0$ $a = 3\cdot104$

α	$\frac{1}{4}\lg S$	S	β	$\lg T$	T
31·3	0·4550–1	0·006607	132·9	2·5261	335·8
42·6	4740	7871	171·7	5420	348·3
50·9	4861	8798	204·6	5550	358·9
60·0	4980	9818	231·3	5652	367·5
73·1	5130	0·01127	272·5	5807	380·8
86·1	5261	1272	298·9	5903	389·3
99·1	5379	1418	334·5	6029	400·8
116·2	5516	1608	375·6	6170	414·0
148·1	5669	1852	412·2	6292	425·8
160·9	5809	2107	458·6	6442	440·8
185·2	5940	2377	492·1	6547	451·5
206·2	6042	2611	528·0	6657	463·1

$\varepsilon = 4\cdot260$ $c = 0\cdot116.10^{-12}$

Südtiroler Marmor.

$A = 8998$ $B = 28\cdot1$ $a = 3\cdot115$

α	$\frac{1}{4}\lg S$	S	β	$\lg T$	T
31·5	0·4552–1	0·006619	137·0	2·5276	337·0
37·6	4658	7298	160·5	5372	344·5
45·5	4782	8181	186·2	5475	352·8
55·6	4921	9298	219·4	5604	363·4
66·1	5049	0·01046	255·4	5740	375·0
77·1	5170	1170	283·9	5845	384·2
94·9	5339	1366	328·0	6002	398·3
118·7	5531	1631	379·3	6178	414·8
138·7	5670	1854	423·5	6324	428·9
160·1	5801	2091	459·6	6440	440·6
178·2	5901	2293	488·4	6530	449·8
195·5	5988	2484	514·4	6610	458·1

$\varepsilon = 4\cdot265$ $c = 0\cdot111.10^{-12}$

Rötlicher Speckstein.

$A = 9021$ $B = 28\cdot 2$ $a = 3\cdot 122$

α	$\frac{1}{4}\lg S$	S	β	$\lg T$	T
28·1	0·4488	0·006240	128·2	2·5238	334·0
35·4	4621	7053	154·2	5345	342·4
44·8	4770	8091	193·3	5501	354·9
55·6	4920	9290	225·6	5626	365·3
65·0	5035	0·01033	256·2	5741	375·1
78·3	5180	1180	296·8	5889	388·1
97·3	5358	1391	340·3	6042	402·0
117·6	5521	1616	389·8	6210	417·8
143·7	5700	1905	435·9	6361	432·6
174·9	5881	2251	489·8	6531	449·9
198·8	6002	2517	527·2	6645	461·9
219·8	6098	2749	555·7	6730	471·0

$\varepsilon = 4\cdot 274$ $c = 0\cdot 103.10^{-12}$

Glimmerfreier Granit.

$A = 9030$ $B = 28\cdot 2$ $a = 3\cdot 125$

α	$\frac{1}{4}\lg S$	S	β	$\lg T$	T
29·6	0·4516–1	0·006403	139·6	2·5285	337·7
37·8	4660	7311	175·2	5429	349·1
44·7	4768	8076	199·1	5523	356·7
55·7	4920	9290	233·5	5655	367·7
67·2	5060	0·01057	269·8	5790	379·3
87·2	5266	1278	325·9	5991	398·0
104·8	5420	1472	365·1	6126	409·8
123·3	5562	1678	402·8	6252	419·3
144·7	5705	1914	446·0	6392	435·7
167·6	5840	2168	486·7	6520	448·7
187·6	5946	2390	518·7	6618	459·0
113·3	6068	2674	555·9	6729	470·9

$\varepsilon = 4\cdot 282$ $c = 0\cdot 0955.10^{-12}$

Lehm.

$A = 9020$ $B = 28 \cdot 2$ $a = 3 \cdot 122$

α	$\frac{1}{4}$ lg S	S	β	lg T	T
28·2	0·4490–1	0·006252	137·1	2·5275	336·9
38·9	4678	7434	183·6	5463	351·8
48·3	4821	8480	212·6	5576	361·1
58·7	4960	9638	245·2	5700	371·5
71·5	5109	0·01106	286·6	5852	384·8
85·4	5250	1259	320·8	5974	395·7
98·7	5371	1407	356·8	6099	407·3
116·0	5509	1608	393·4	6222	419·0
134·1	5638	1800	432·8	6351	431·6
152·4	5754	2003	461·7	6443	440·9
176·5	5890	2270	505·1	6578	454·8
207·5	6043	2613	552·6	6721	470·0

$\varepsilon = 4 \cdot 285$ $c = 0 \cdot 0928 . 10^{-12}$

Ackererde.

$A = 9040$ $B = 28 \cdot 2$ $a = 3 \cdot 132$

α	$\frac{1}{4}$ lg S	S	β	lg T	T
25·7	0·4439–1	0·005965	134·1	2·5261	335·8
34·4	4601	6925	168·0	5399	346·7
42·8	4737	7849	201·3	5530	357·3
51·6	4889	9028	240·6	5680	369·8
67·3	5060	0·01057	284·4	5841	383·8
79·5	5190	1191	312·1	5940	392·6
94·4	5331	1356	354·1	6086	406·1
111·6	5473	1546	397·0	6230	419·8
131·0	5614	1760	432·3	6345	431·0
148·9	5730	1959	471·4	6469	443·5
174·9	5879	2247	510·6	6590	456·0
201·0	6010	2535	552·3	6715	469·4

$\varepsilon = 4 \cdot 295$ $c = 0 \cdot 0852 . 10^{-12}$

Tegel.

$A = 9053$ $B = 28\cdot3$ $a = 3\cdot134$

α	$\frac{1}{4}\lg S$	S	β	$\lg T$	T
23·8	0·4401	0·005760	131·0	2·5248	334·8
31·0	4540	6546	156·4	5352	342·9
39·1	4680	7447	194·0	5501	354·9
47·8	4811	8402	227·5	5630	365·6
59·8	4970	9728	259·6	5750	375·8
70·8	5098	0·01094	300·1	5897	388·8
86·8	5261	1272	340·6	6039	401·7
108·2	5405	1452	379·5	6171	414·1
121·9	5550	1660	424·2	6318	428·4
144·5	5702	1909	462·1	6439	440·5
169·9	5851	2190	508·3	6582	455·2
201·6	6012	2540	558·4	6732	471·2

$\varepsilon = 4\cdot300$ $c = 0\cdot0811 . 10^{-12}$

Istrianer Marmor.

$A = 9043$ $B = 28\cdot2$ $a = 3\cdot130$

α	$\frac{1}{4}\lg S$	S	β	$\lg T$	T
23·9	0·4401−1	0·005760	138·6	2·5280	337·3
30·4	4529	6480	169·4	5405	347·1
37·6	4655	7278	195·5	5508	355·5
46·4	4791	8249	225·1	5622	364·9
55·8	4920	9290	262·8	5763	377·0
67·3	5059	0·01056	298·9	5894	388·5
78·6	5181	1181	328·4	5998	397·9
95·4	5339	1366	367 1	6131	410·3
109·9	5460	1528	406·1	6261	422·8
133·6	5632	1790	452·3	6410	437·5
155·6	5770	2032	439·9	6540	450·8
186·7	5940	2377	546·9	6700	467·7

$\varepsilon = 4\cdot310$ $c = 0\cdot0741 . 10^{-12}$

Kehlheimer Kalkstein.

$A = 9060$ $B = 28 \cdot 3$ $a = 3 \cdot 136$

α	$\frac{1}{4} \lg S$	S	β	$\lg T$	T
21·5	0·4350–1	0·005495	127·2	2·5232	333·6
28·8	4498	6298	161·0	5370	344·4
37·3	4649	7238	199·2	5521	356·5
45·6	4778	8151	225·0	5620	364·8
55·1	4910	9205	259·7	5750	375·8
66·6	5050	0·01047	296·1	5882	387·4
78·6	5180	1180	329·3	5999	398·0
90·6	5295	1312	362·5	6113	408·6
107·4	5439	1498	399·3	6236	420·3
126·3	5580	1706	443·1	6378	434·3
157·4	5779	2049	500·4	6557	452·6
182·5	5917	2327	542·2	6683	465·9

$\varepsilon = 4 \cdot 315$ $c = 0 \cdot 0709 . 10^{-12}$

Weißer Sandstein.

$A = 9063$ $B = 28 \cdot 3$ $a = 3 \cdot 137$

α	$\frac{1}{4} \lg S$	S	β	$\lg T$	T
21·8	0·4356–1	0·005526	139·0	2·5280	337·3
26·6	4456	6059	166·8	5393	346·2
35·0	4610	6982	196·8	5511	355·7
43·4	4745	7907	233·1	5650	367·3
52·8	4879	8945	264·8	5768	377·4
65·7	5040	0·01038	306·7	5919	390·8
75·6	5148	1146	337·0	6025	400·4
90·1	5290	1306	370·7	6140	411·2
100·6	5382	1422	400·7	6240	420·7
129·9	5605	1746	459·4	6429	439·4
149·4	5731	1961	502·0	6561	453·0
170·0	5850	2188	534·4	6659	463·3

$\varepsilon = 4 \cdot 328$ $c = 0 \cdot 0632 . 10^{-12}$

Schlemmkreide.

$A = 9010$ $B = 28 \cdot 1$ $a = 3 \cdot 118$

α	$\frac{1}{4} \lg S$	S	β	$\lg T$	T
17·1	0·4250–1	0·005012	193·3	2·5285	337·7
22·8	4379	5644	170·0	5410	347·5
30·5	4532	6498	198·8	5524	356·8
36·5	4639	7172	229·0	5640	366·4
46·2	4791	8249	266·7	5781	378·5
56·2	4928	9358	299·5	5900	389·0
66·1	5048	0·01045	333·5	6020	399·9
78·3	5181	1181	371·3	6150	412·1
94·0	5330	1355	401·9	6252	421·9
110·3	5466	1536	444·7	6391	435·6
133·4	5634	1793	495·0	6549	451·8
155·9	5575	2042	535·8	6673	464·8

$\varepsilon = 4 \cdot 358$ $c = 0 \cdot 0483 . 10^{-12}$

Carrarer Marmor.

$A = 9058$ $B = 28 \cdot 3$ $a = 3 \cdot 135$

α	$\frac{1}{4} \lg S$	S	β	$\lg T$	T
13·6	0·4163–1	0·004626	130·8	2·5247	334·7
20·5	4329	5390	169·7	5405	347·1
27·2	4469	6132	197·3	5514	356·0
35·2	4615	7015	232·8	5650	367·3
43·1	4742	7885	267·6	5779	378·4
51·1	4857	8766	289·3	5858	385·3
61·0	4985	9863	326·6	5990	397·2
71·0	5100	0·01096	358·5	6100	407·4
84·7	5240	1247	395·5	6224	419·2
107·2	5437	1496	449·6	6399	436·4
126·2	5580	1706	491·8	6531	449·9
158·3	5785	2061	554·5	6720	469·9

$\varepsilon = 4 \cdot 369$ $c = 0 \cdot 0437 . 10^{-12}$

Kies.

$A = 9054$ $B = 28 \cdot 3$ $a = 3 \cdot 134$

α	$\frac{1}{4}\lg S$	S	β	$\lg T$	T
13·9	0·4170-1	0·004656	141·9	2·5293	338·3
20·2	4322	5356	172·9	5418	348·2
25·9	4442	5981	206·6	5550	358·9
33·8	4590	6855	238·4	5671	369·1
43·6	4750	7943	278·5	5819	381·9
53·2	4886	9003	309·4	5930	391·7
62·7	5005	0·01005	346·7	6060	403·6
79·5	5190	1191	388·5	6201	417·0
91·5	5304	1323	427·9	6330	429·5
110·4	5463	1532	471·3	6468	443·4
129·0	5600	1738	510·9	6590	456·0
154·3	5762	2017	559·8	6736	471·6

$\varepsilon = 4 \cdot 382$ $c = 0 \cdot 0389 . 10^{-12}$

Strahlung des Wassers.

Da bei der Beobachtung der Strahlung des Wassers der Temperatursteigerung sehr bald eine Grenze gesetzt ist, so wurde vor allem die Empfindlichkeit des Galvanometers auf das äußerste gesteigert, indem man den Vorschaltwiderstand ausschaltete, was freilich andrerseits die Unannehmlichkeit mit sich brachte, daß die Einstellung der Nadel viel langsamer erfolgte. Über der Wasserfläche, deren Strahlung gemessen werden sollte, wurde eine Blende und darüber ein Metallspiegel unter 45° angebracht, welcher die Strahlung in die Thermosäule hineinreflektierte. Diese Methode erwies sich aber als unbrauchbar, da der Spiegel sich stets mit Feuchtigkeit beschlug, auch dann noch, als er mit einer dünnen Schicht von Vaselinöl überzogen worden war.

Es wurde deshalb die ganze Aufstellung so umgebaut, daß die direkte Strahlung vertikal in die Thermosäule gelangte. Dabei waren nun zunächst die aufsteigenden Luftströmungen

sehr lästig. Durch eine in den Strahlengang gestellte Kautschukmembran ließ sich aber dieser störende Einfluß größtenteils beseitigen. Die Membran wurde so dünn als möglich ausgespannt und ließ zirka 75°/₀ der Strahlung durch. Unter derselben war eine große, geschwärzte Wasserblende mit einer Öffnung von 2 *cm* Durchmesser angebracht. 5 *cm* tiefer befand sich die Oberfläche der strahlenden Wassermasse. Letztere wurde elektrisch geheizt und konnte man dieselbe bis auf zirka 60° erwärmen, ohne daß die Membran sich beschlug.

Zur Messung der Temperatur wurde wie früher das Thermoelement verwendet, welches von der Wasseroberfläche vollkommen benetzt war. Der Durchmesser der strahlenden Wasserfläche betrug 9 *cm*. Für die Wahl der Dicke der strahlenden Wassermasse war folgender Vorversuch bestimmend: Es wurde in den Strahlengang ein Gefäß gestellt, dessen Boden durch eine sehr dünne Kautschukmembran gebildet war. Über der Membran befand sich eine Wassersäule von variabler Dicke. Es zeigte sich nun, daß das Wasser in einer Dicke von 5 *mm* seine eigene Strahlung sowie die des schwarzen Körpers vollständig absorbierte. Bei den eigentlichen Strahlungsmessungen hatte die strahlende Wassermasse eine Dicke von 5 *cm*. Für diese Schichtendicke hat also die Strahlung schon sicher ihr Maximum erreicht.

Die Berechnung der Strahlungskonstanten erfolgte aus der Beobachtung der Strahlung bei zwei Temperaturen:

$$\alpha_1 = AcT_1^{\varepsilon} - B$$

und

$$\alpha_2 = AcT_2^{\varepsilon} - B$$

oder die Gleichungen logarithmiert:

$$\lg(\alpha_1 + B) = \lg A + \lg c + \varepsilon \lg T_1$$

und

$$\lg(\alpha_2 + B) = \lg A + \lg c + \varepsilon \lg T_2.$$

Daraus ergibt sich ε und c zu:

$$\varepsilon = \frac{\lg(\alpha_2 + B) - \lg(\alpha_1 + B)}{\lg T_2 - \lg T_1} \qquad c = \frac{\alpha_1 + B}{AT_1^{\varepsilon}}.$$

Bei der Messung von α addiert sich zur Strahlung des Wassers natürlich stets die Strahlung der Membran. Die Erwärmung der letzteren durch die Bestrahlung ist jedenfalls sehr klein, kleiner als die der Thermosäule, und kann die Temperaturerhöhung derselben niemals 1° erreichen. Bei so geringer Erwärmung ist aber die Änderung der Strahlung der Membran proportional der auf sie wirkenden Zustrahlung. Dadurch beschränkt sich der Einfluß der Membran auf eine Änderung der Konstanten A und B.

Bei der Bestimmung von α und β wurde wieder aus je zehn Messungen das Mittel genommen. Da der Einfluß der Luftströmungen doch nur bis zu einem gewissen Grade beseitigt werden konnte, waren die Abweichungen der Werte von α untereinander größer als früher. Der mittlere Fehler des Mittels betrug $2\cdot5\,^0/_0$. Aus diesen Mittelwerten von α und β wurden nach den obigen Formeln die Strahlungskonstanten bestimmt. Diese Messungsreihe wurde zehnmal ausgeführt und aus den daraus berechneten Werten von c und ε abermals das Mittel genommen. Die folgende Tabelle gibt diese Zahlen wieder.

Strahlung des Wassers.

$A.10^{-4}$	B	a	α_1	$S_1.10^5$	α_2	$S_2.10^4$	β_2	T_2	β_1	T_1	$c.10^{12}$	ε
1·368	85·0	3·122	24·9	803	60·0	106	132·1	331·9	63·7	310·0	0·49	4·10
1·361	84·2	3·118	22·8	786	54·6	102	136·6	332·0	71·7	311·2	0·50	4·09
1·367	84·9	3·121	19·1	761	53·2	101	130·8	330·9	61·5	308·7	0·50	4·09
1·378	85·3	3·122	23·0	786	58·0	104	130·2	332·0	61·2	309·9	0·48	4·10
1·371	88·1	3·132	23·9	817	65·5	112	131·5	334·7	53·6	309·8	0·50	4·10
1·375	85·6	3·112	36·6	889	71·1	114	122·0	330·2	61·0	310·6	0·48	4·12
1·384	86·0	3·114	31·2	847	64·9	109	121·4	329·9	59·8	310·1	0·46	4·12
1·367	87·9	3·130	31·4	873	63·8	111	120·8	330·6	62·6	312·0	0·49	4·11
1·384	86·0	3·115	31·0	845	64·9	109	125·2	332·0	63·9	312·3	0·53	4·09
1·359	83·1	3·110	31·1	840	65·0	109	135·3	331·5	74·0	311·8	0·53	4·09
										Mittel..	0·496	4·101

Um zu sehen, ob das Meerwasser infolge seines Salzgehaltes wesentlich anders strahlt als reines Wasser, wurden

zwei Gefäße, eines gefüllt mit destilliertem Wasser, das andere mit konzentrierter Kochsalzlösung, nebeneinander gemeinsam in einem größeren Gefäße durch eine Heizspirale auf einer Temperatur von 47·5° erhalten und abwechselnd ihre Strahlungen beobachtet. Die auf diese Weise angestellten 40 Vergleichsmessungen ergaben, daß die Differenz der beiden Strahlungen unter der Grenze der Beobachtungsfehler liegt.

Strahlung des Eises.

Zur Messung der Strahlung des Eises wurde wieder die Aufstellung verwendet, bei welcher die Strahlung horizontal in die Thermosäule gelangte. Das Eis befand sich in einem doppelwandigen Gefäße und wurde durch feste Kohlensäure und Äther gekühlt. Die Strahlung wurde wieder bei zwei Temperaturen beobachtet. Das Thermoelement war in die Oberfläche des Eises eingeschmolzen. Der Durchmesser der letzteren betrug 8 *cm*, die Dicke der Eismasse 5 *cm*. Die Strahlung besaß ihr Maximum, da ein Vorversuch ergab, daß bereits eine Eisplatte von zirka 1 *mm* Dicke keine Strahlung mehr hindurchließ. Die strahlende Eisfläche bedeckte sich stets mit einer Schicht von feinem Schnee, welcher vor jeder Beobachtung entfernt wurde, da er die Strahlung erhöhte.[1] Wie früher, wurde aus zehn beobachteten Werten von α und β das Mittel genommen und daraus c und ε berechnet. Aus zehn auf diese Weise berechneten Werten der Strahlungskonstanten wurde wieder das Mittel genommen. Wie man aus der nachfolgenden Tabelle ersieht, ist die Strahlung des Eises von der des Wassers nicht wesentlich verschieden.

Die vorletzte Tabelle enthält die Zusammenstellung der Resultate, welche für die Strahlungskonstanten der untersuchten Körper erhalten wurden. Da diese Zahlen für den Wärmehaushalt der Erde von Bedeutung sind, so folgt zur leichteren Orientierung zum Schlusse eine Berechnung der für die Erdoberfläche typischen Strahlungen von —30 bis +30° C. im Intervall von 10 zu 10 Graden.

---

[1] Beobachtungen von J. Maurer (Meteorol. Zeitschr., XXIV, 7, p. 295 bis 301, 1907) über die nächtliche Ausstrahlung einer freien Schneefläche ergaben, daß dieselbe der Strahlung einer berußten Kupferscheibe nahekommt.

Strahlung des Eises.

$A.10^{-4}$	B	a	$-\alpha_1$	$S_1.10^5$	$-\alpha_2$	$S_2.10^5$	β_1	T_1	β_2	T_2	$c.10^{12}$	ε
1·797	169·5	3·236	136·4	184	103·3	368	240·2	216·8	110·0	257·0	0·44	4·12
1·796	169·5	3·234	135·0	192	101·0	382	239·3	217·0	112·2	256·3	0·43	4·13
1·789	168·9	3·221	136·6	181	104·3	361	242·5	215·6	115·6	255·0	0·44	4·12
1·780	168·2	3·233	135·0	187	98·5	392	241·5	215·9	104·8	258·2	0·41	4·14
1·785	168·8	3·211	138·3	171	107·6	343	238·3	216·5	114·3	255·1	0·47	4·10
1·790	169·1	3·223	137·9	174	108·4	339	241·4	216·0	118·9	254·0	0·44	4·11
1·792	169·2	3·225	137·1	179	107·3	345	238·0	217·2	117·1	254·7	0·45	4·11
1·793	169·2	3·229	136·9	180	106·0	353	237·3	217·7	112·0	256·5	0·47	4·10
1·796	169·5	3·235	136·1	186	102·4	373	241·6	216·3	113·2	256·0	0·42	4·13
1·788	168·8	3·220	135·5	186	102·8	369	240·9	216·0	115·9	254·8	0·40	4·14
										Mittel . .	0·437	4·120

Strahlungskonstanten aller Körper.

	$c.10^{12}$	ε
Basaltlava	0·589	4·083
Basalt	557	089
Belgischer Marmor	552	090
Tonschiefer	508	099
Humus	458	110
Rheinischer Schiefer	378	131
Schlesischer Schiefer	374	132
Gneis	341	142
Serpentin	323	148
Roter Sandstein	294	158
Italienischer Marmor	281	165
Quarzporphyr	220	190
Rötlicher Granit	197	202
Mauthausner Granit	153	230
Granit aus dem Fichtelgebirge	141	239
Glimmerschiefer	122	255
Dolomitenkalk	116	260
Südtiroler Marmor	111	265
Rötlicher Speckstein	103	274
Glimmerfreier Granit	0955	282
Lehm	0928	285
Ackererde	0852	295
Tegel	0811	300
Istrianer Marmor	0741	310
Kehlheimer Kalkstein	0709	315
Weißer Sandstein	0632	328
Kreide	0483	358
Carrarer Marmor	0437	369
Kies	0389	382
Wasser	496	101
Eis	437	120

Strahlungen bei verschiedenen Temperaturen, verglichen mit der Strahlung des schwarzen Körpers.

$S.10^5$ bei einer Temperatur von	—30	—20	—10	0	+10	+20	+30
Schwarzer Körper	446	525	612	711	821	943	1079
Basaltlava	324	382	448	521	604	696	798
Tonschiefer	305	360	422	492	570	657	754
Gneis	259	307	360	420	488	563	647
Mauthausner Granit	189	224	264	309	360	416	480
Glimmerschiefer	173	205	242	283	330	383	442
Dolomitenkalk	169	200	236	277	323	374	432
Ackererde	150	179	211	248	289	335	387
Weißer Sandstein	134	159	188	221	258	300	347
Kies	111	132	156	184	216	251	291
Wasser				485	563	649	745
Eis	295	348	408	476			

Über die Lage der Knotenpunkte in einseitig geschlossenen Röhren

von

Dr. N. Stücker.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. November 1907.)

Die Arbeiten, in welchen die Luftschwingungen und Resonanzverhältnisse eingehend behandelt werden, sind fast durchwegs theoretischer Natur. Schon Bernoulli, Euler und Lagrange haben diese Erscheinungen einem genaueren Studium unterzogen und eine Theorie entwickelt, die im wesentlichen darin besteht, daß die Verdichtung am offenen Ende einer Röhre gleich Null anzunehmen sei und die Luft in allen Punkten ein und desselben Querschnittes die gleiche Dichtigkeit aufweise. Nun aber widerspricht beides der Erfahrung; erstens besitzt die Luft am offenen Ende einer Röhre stets nur die Dichte der sie umgebenden Luftmenge, niemals aber die der außerhalb befindlichen Luft, und zweitens ergibt sich aus der Annahme bezüglich der konstanten Dichte für ein und denselben Querschnitt, daß sich die Wellen in einer Röhre nur parallel zu ihrer Achse fortpflanzen können, während durch die Theorien von Helmholtz und einigen anderen Physikern direkt bewiesen wird, daß die Wellen aus der Röhre divergent austreten und, da eine solche Richtungsänderung nicht plötzlich eintreten kann, sich auch innerhalb einer Röhre nicht nur parallel zur Achse bewegen. Poisson griff den Gegenstand wieder auf und erklärte, daß die Luft am offenen Ende einer Röhre wohl eine andere Dichte besäße, daß aber

jederzeit zwischen der Geschwindigkeit der Schallwellen und der Dichte der Luft eine für ein und dieselbe Röhre konstante Relation bestände. Nach Challis' Hypothese endlich tritt jede Welle, nachdem sie am geschlossenen Ende reflektiert wurde, am offenen aus, ohne eine neue Welle wieder in die Röhre zurückzusenden. Die Knotenpunkte, welche nach Euler Orte einer absoluten Stille, nach Poisson Orte von Schwingungsminima sind, existieren nach Challis in einer Röhre überhaupt nicht. Der erste Physiker, welcher die Sache vom richtigen Standpunkt aus betrachtete, war der Engländer Hopkins,[1] der auch durch sein ausgedehntes Beobachtungsmaterial einige Erscheinungen zu erklären wußte, die bis dahin unberücksichtigt blieben. Auf die Tatsache gestützt, daß die stärkste Resonanz bei einem ungeraden Vielfachen einer Viertelwellenlänge, also bei $(2n-1)\frac{\lambda}{4}$ eintritt, beobachtete er, daß die Strecke von der Röhrenmündung bis zum ersten Maximum der Resonanz stets kleiner war, als aus dem Werte für $\frac{\lambda}{2}$ zu erwarten wäre und daß diese Differenz mit der Röhrenweite zunahm; die weiteren Knotenpunkte standen jedoch durchwegs genau um den Wert einer halben Wellenlänge voneinander ab. Hopkins hat ferner gefunden, daß diese Differenz von der Schwingungszahl, also von der Höhe des betreffenden Tones unabhängig ist, ein Umstand, der mit seiner Theorie vollkommen im Einklange steht. Bei einer sehr engen Röhre (Fig. 1) werden die Wellen, da sie aus der Röhre divergent austreten, bald so zerstreut sein, daß sie durch keinerlei Reflexion wieder in die Röhre zurückgeworfen werden können. Bei sehr weiten Röhren hingegen werden sich die Wellen auch in größerer Entfernung von der Röhrenmündung noch innerhalb der Verlängerung der Röhrenwand befinden, weshalb noch ein Teil der Wellen in die Röhrenwand reflektiert werden kann. Es kommt also gewissermaßen darauf hinaus, daß eine Glasröhre scheinbar um so länger ist, je größeren

[1] Transactions of the Cambridge Phil. Soc., Vol. V, pt. II, p. 231; Pogg. Ann., XLIV, 246, 603, 1838.

Querschnitt sie besitzt. In der Tat hat nun Mousson bei am Ende trichterförmig erweiterten Röhren gefunden, daß die Korrektion fast Null wird.

Helmholtz,[1] dem wir so vielen Einblick in die Wellenlehre zu verdanken haben, hat auch dieses Kapitel eingehend behandelt, in dem er, von den Bewegungsgleichungen ausgehend, die Formel für das Korrektionsglied ableitet. Sie lautet:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \frac{R_1^2}{R} - \frac{\pi}{4} R,$$

worin R den kleineren, R_1 den größeren Radius bei trichterförmig erweiterten Röhren, die Korrektionskonstante α den

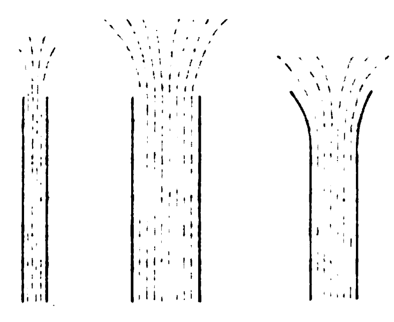


Fig. 1.

Unterschied zwischen der reduzierten und wahren Röhrenlänge bedeuten. Es ergibt sich von selbst, daß bei zylindrischen Röhren, bei denen $R = R_1$ ist, die Gleichung übergeht in:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} R.$$

Setzen wir $\alpha = 0$, so erhalten wir:

$$R_1 = R\sqrt{2},$$

das heißt, wenn sich die Radien der Röhre und ihres oberen Randes zueinander wie $1:\sqrt{2}$ verhalten, so fällt die wahre mit der reduzierten Röhrenlänge zusammen.

[1] Wissenschaftliche Abhandlungen, I, p. 303 ff.

Ich habe nun versucht, diese theoretischen Resultate durch Experimente zu prüfen. Der Apparat, dessen ich mich dazu bediente, bestand aus einem Glaszylinder vom inneren Radius $= 3 \cdot 2\ cm$, in welchem durch damit kommunizierende Zu- und Abflußgefäße eine Wassersäule allmählich veränderlicher Höhe hergestellt werden konnte. In dieses Wasser tauchten die mit Teilung versehenen Resonanzröhren ein. Sie waren mitsamt der erregenden Stimmgabel auf einem Schlitten befestigt, dessen Höhe verstellt werden konnte. Es war also in doppelter Weise Vorsorge getroffen, die Länge der resonanzgebenden Luftsäule allmählich zu vergrößern oder zu verkleinern, bis das Maximum des Resonanztones eintrat, und diese Länge genau zu messen.

Meine Beobachtungen stellte ich an Glasröhren vom Halbmesser $0 \cdot 2\ cm$ bis $3 \cdot 2\ cm$ an, und zwar für die Töne a^0, e^1, a^1, e^2, a^2 und b^8. Jede einzelne Versuchsreihe bestand aus zehn Beobachtungen, die zu einem Mittel vereinigt wurden. Die einzelnen Werte wichen nur für die tieferen Töne, bei denen das Maximum der Resonanz nicht so scharf ausgeprägt war, um $0 \cdot 2\ cm$ voneinander ab. Zur Vermeidung weiterer Fehlerquellen stellte ich das Wasserniveau abwechselnd zu hoch und zu tief ein, um durch Regulieren von beiden Richtungen aus zu demselben Resultat zu gelangen.

Die Berechnung der Korrektion α gestaltet sich sehr einfach. Bedeuten $l_0, l_1, l_2 \ldots l_n$ die Röhrenlängen vom freien Ende der Reihe nach bis zu den einzelnen Knotenpunkten und λ die Wellenlänge, so ist

$$\frac{\lambda}{2} = l_1 - l_0 = l_2 - l_1 \ldots = \frac{l_n - l_0}{n}$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{4} - l_0 = \frac{l_n - l_0}{2n} - l_0.$$

Im folgenden gebe ich nun eine Übersicht über die Werte von $l_0, l_1, l_2, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{4}$ und α für die einzelnen Tonhöhen und Röhrendurchmesser.

R (in *cm*)	0·5		0·9		1·0		1·5		1·9		2·1		2·4		2·7		3·2	
	l_0	l_1	l_0	l_1	l_0	l_1	l_0	l_1	l_0	l_1	l_0	l_1	l_0	l_1	l_0	l_1	l_0	l_1
1. a^0 ($n = 217$ Schwingungen).																		
Mittel	—	—	38·72	117·20	38·61	117·12	38·43	116·98	38·24	116·90	38·17	116·88	37·98	116·74	37·80	116·60	37·58	116·50
$\frac{\lambda}{2}$ . .	—		78·48		78·51		78·55		78·66		78·71		78·76		78·80		78·92	
$\frac{\lambda}{4}$ . .	—		39·24		39·26		39·27		39·33		39·36		39·38		39·40		39·46	
α . . .	—		0·52		0·55		0·84		1·09		1·19		1·40		1·60		1·88	
2. e^1 ($n = 326$ Schwingungen).																		
Mittel	25·41	76·87	25·26	76·81	25·18	76·76	25·00	76·69	24·80	76·56	24·69	76·48	24 53	76·38	24·33	76·20	24·08	75·92
$\frac{\lambda}{2}$ . .	51·46		51·55		51·58		51·69		51·76		51·79		51·85		51·87		51·88	
$\frac{\lambda}{4}$ . .	25·73		25·78		25·79		25·85		25·84		25·89		25·92		25·93		25·94	
α . . .	0·32		0·52		0·61		0·85		1·08		1·20		1·39		1·60		1·86	

R (in cm)	0·5		0·9		1·0		1·5	
	l_0	l_1	l_0	l_1	l_0	l_1	l_0	l_1
3. e^2 (n = 652								
Mittel......	12·10	36·91	11·91	36·80	—	—	—	—
$\frac{\lambda}{2}$........	24·81		24·89		—		—	
$\frac{\lambda}{4}$........	12·40		12·44		—		—	
α.........	0·30		0·53		—		—	

R (in cm)	0·2		0·4		0·5		0·9		1·0			1·5	
	l_0	l_1	l_0	l_1	l_0	l_1	l_0	l_1	l_0	l_1	l_2	l_0	l_1
4. a^2 (n = 870													
Mittel	9·30	28·14	9·72	29·62	9·76	29·87	9·58	29·83	9·50	29·71	49·85	9·26	29·49
$\frac{\lambda}{2}$..	18·84		19·90		20·11		20·25		20·21		20·14	20·23	
$\frac{\lambda}{4}$..	9·42		9·95		10·06		10·13		10·08			10·12	
α...	0·12		0·23		0·30		0·55		0·58			0·86	
5. b^3 (n = 1850													
Mittel	—	—	—	—	4·46	14·00	—	—	4·20	13·77	23·33	—	—
$\frac{\lambda}{2}$..	—		—		9·54		—		9·57		9·56	—	
$\frac{\lambda}{4}$..	—		—		4·77		—		4·78			—	
α...	—		—		0·31		—		0·58			—	

1·9		2·1		2·4		2·7		3·2	
l_0	l_1	l_0	l_1	l_0	l_1	l_0	l_1	l_0	l_1
Schwingungen).									
11·37	36·29	—	—	—	—	—	—	—	—
24·92		—		—		—		—	
12·46		—		—		—		—	
1·09		—		—		—		—	

1·9			2·1		2·4			2·7		3·2		
l_0	l_1	l_2	l_0	l_1	l_0	l_1	l_2	l_0	l_1	l_0	l_1	l_2
Schwingungen).												
9·09	29·40	—	8·95	29·30	8·80	29·20	49·60	8·60	29·02	8·40	28·87	49·27
20·31		—	20·35		20·40		20·40	20·42		20·47		20·40
10·16			10·18		10·20			10·21		10·24		
1·07			1·23		1·40			1·61		1·84		
Schwingungen).												
3·70	13·30	22·85	3·60	13·21	3·40	13·07	22·60	3·20	12·85	2·96	12·65	22·33
9·60		9·55	9·61		9·67		9·53	9·65		9·69		9·68
4·77			4·80		4·80			4·82		4·84		
1·07			1·20		1·40			1·62		1·88		

Übersicht über die beobachteten Werte von α.

Radius	0·5		0·9		1·0		1·5		1·9			2·1		2·4		2·7		3·2	
	l_0	l_1	l_0	l_1	l_0	l_1	l_0	l_1	l_0	l_1	l_2	l_0	l_1	l_0	l_1	l_0	l_1	l_0	l_1
									6. a^1 ($n = 435$ Schwingungen).										
Beobachtungen	18·9	57·9	19·1	58·3	19·0	58·3	18·8	58·2	18·7	58·3	97·8	18·6	58·1	18·4	58·0	18·2	57·8	17·9	57·5
	19·0	57·8	19·1	58·2	19·0	58·3	18·8	58·2	18·8	58·2	97·8	18·6	58·2	18·4	58·0	18·2	57·8	17·9	57·4
	19·3	57·9	19·1	58·2	19·1	58·2	18·8	58·3	18·7	58·2	97·8	18·5	58·2	18·4	58·0	18·2	57·8	18·0	57·4
	19·0	57·9	19·1	58·3	19·1	58·4	18·8	58·3	18·7	58·3	97·7	18·6	58·2	18·4	58·0	18·2	57·8	17·9	57·5
	19·1	58·0	19·1	58·3	19·1	58·2	18·9	58·2	18·7	58·2	97·8	18·6	58·3	18·4	58·0	18·2	57·8	17·9	57·5
	19·2	57·9	19·0	58·3	19·1	58·3	18·9	58·3	18·6	58·3	97·8	18·7	58·2	18·4	58·0	18·2	57·8	17·9	57·5
	19·0	57·9	19·1	58·2	19·0	58·3	18·8	58·2	18·7	58·3	97·8	18·6	58·2	18·4	58·0	18·2	57·8	17·9	57·6
	19·2	57·9	19·1	58·3	19·1	58·3	18·9	58·3	18·8	58·2	97·7	18·6	58·2	18·4	58·0	18·2	57·8	17·9	57·5
	19·1	57·9	19·0	58·2	19·1	58·5	18·8	58·3	18·7	58·4	97·8	18·6	58·1	18·4	58·0	18·2	57·8	17·9	57·6
	19·2	57·8	19·1	58·3	19·1	58·3	18·9	58·2	18·7	58·2	97·8	18·6	58·2	18·4	58·0	18·2	57·8	17·9	57·6
Mittel .	19·10	57·89	19·08	58·26	19·07	58·31	18·84	58·25	18·71	58·26	97·78	18·60	58·19	18·40	58·00	18·20	57·80	17·91	57·51
$\frac{\lambda}{2}$	38·89		39·18		39·24		39·41		39·55		39·52	39·59		39·60		39·60		39·60	
$\frac{\lambda}{4}$	19·44		19·59		19·62		19·70		19·76			19·80		19·80		19·80		19·80	
α	0·34		0·51		0·55		0·86		1·05			1·20		1·40		1·60		1·89	

7. Übersicht über die Korrektionen

R (in cm)	0·2	0·4	0·5	0·9	1·0	1·5	1·9	2·1	2·4	2·7	3·2
a^0	—	—	—	0·52	0·55	0·84	1·09	1·19	1·40	1·60	1·88
e^1	—	—	0·32	0·52	0·61	0·85	1·08	1·20	1·39	1·60	1·86
a^1	—	—	0·34	0·51	0·55	0·86	1·05	1·20	1·40	1·60	1·89
e^2	—	—	0·30	0·53	—	—	1·09	—	—	—	—
a^2	0·12	0·23	0·30	0·55	0·58	0·86	1·07	1·23	1·40	1·61	1·84
b^3	—	—	0·31	—	0·58	—	1·07	1·20	1·40	1·62	1·88
Mittel	0·12	0·23	0·31	0·53	0·57	0·85	1·08	1·20	1·40	1·60	1·87
Berechneter Wert [1]	0·12	0·23	0·29	0·52	0·58	0·87	1·10	1·22	1·39	1·57	1·86
Differenz	0·00	0·00	0·02	0·01	—0·01	—0·02	—0·02	—0·02	0·01	0·03	0·01

[1] Nach der im folgenden aufgestellten Formel.

8. Graphische Darstellung derselben.

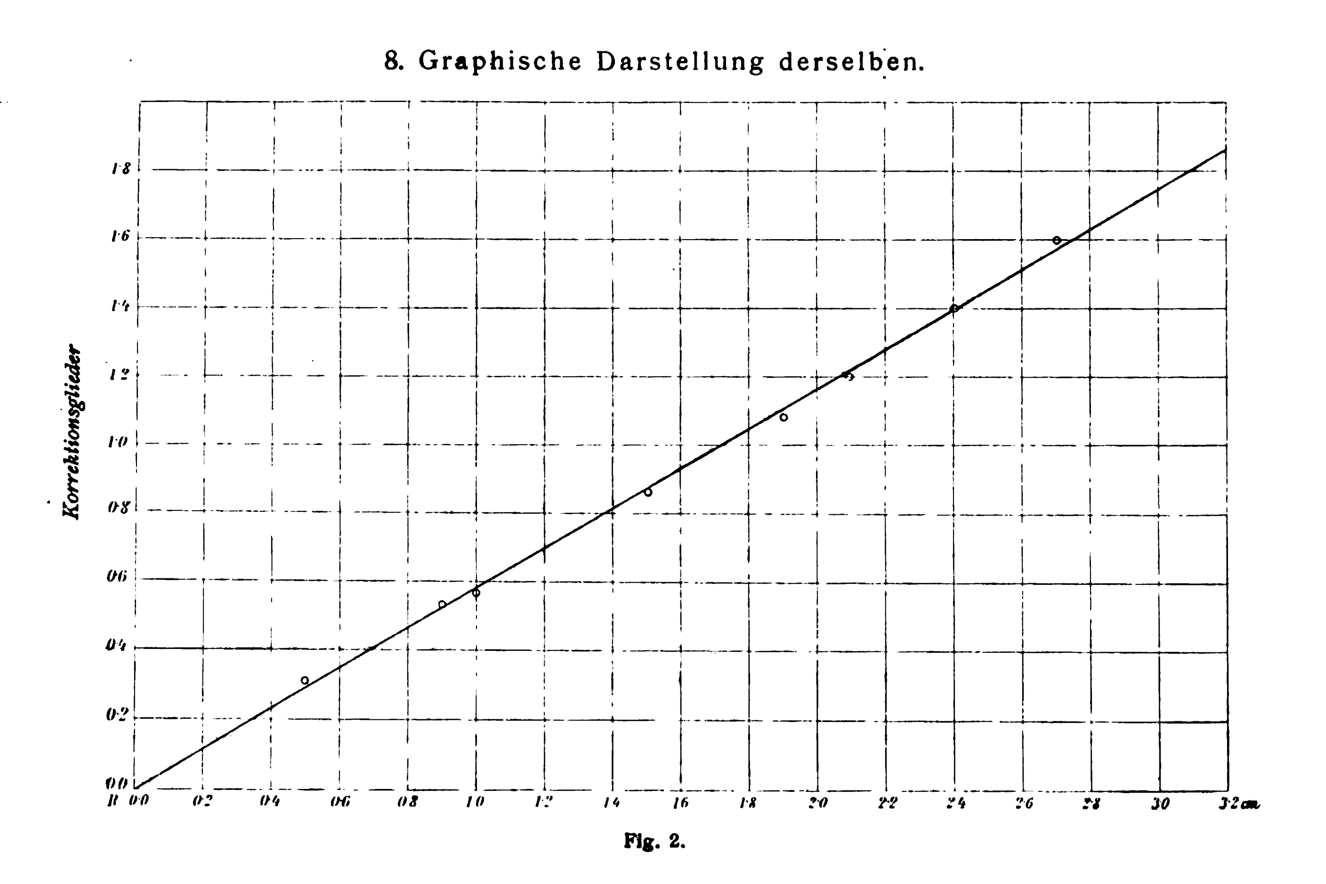


Fig. 2.

Erörterung der Versuchsdaten.

Wenn wir die Werte für die Korrektionsglieder näher betrachten, so sehen wir, daß diese in der Tat mit der Röhrenweite zunehmen; sie sind jedoch bedeutend kleiner, als nach der Helmholtz'schen Theorie zu erwarten wäre, indem sich die Relation ergibt:

$$\alpha = 0 \cdot 583\, R.$$

Diese Gleichung ist der von Helmholtz aufgestellten ähnlich, nur daß wir dort $\frac{\pi}{4}$ oder $0 \cdot 785$ als Proportionalitätsfaktor zu setzen haben. Aus den Tabellen für die Töne kürzerer Wellenlänge, bei denen außer der Differenz $l_1 - l_0$ noch $l_2 - l_1$ beobachtet wurde, kann man, da diese beiden Differenzen nur wenig voneinander verschieden sind, schließen, daß auch die Werte für die Korrektionsglieder ziemlich genau sein dürften. Berechnen wir die Proportionalitätsfaktoren für alle Werte von α und R und ziehen wir hierauf das Mittel, so erhalten wir durch Multiplikation desselben mit den einzelnen Werten von R die wahrscheinlichsten Werte der α. Nach Tabelle 7 beträgt die Differenz zwischen den beobachteten und auf die genannte Weise berechneten Werten im Maximum nur 0·03.

In der Gleichung sind α und R die einzigen variablen Größen, es muß daher α von allen anderen in Betracht kommenden Größen, daher auch von der Schwingungszahl des betreffenden Tones, unabhängig sein, was auch richtig der Fall ist und eintreten muß, wenn die Theorie richtig ist. Um zu sehen, wann das Korrektionsglied Null wird, habe ich noch Versuche mit zwei trichterförmig erweiterten Röhren angestellt, die ich im folgenden mitteile:

$R = 1 \cdot 0,\ R_1 = 1 \cdot 2$					$R' = 1 \cdot 2,\ R_1' = 1 \cdot 6$				
l_0	l_1	$\frac{\lambda}{2}$	$\frac{\lambda}{4}$	α	l_0	l_1	$\frac{\lambda}{2}$	$\frac{\lambda}{4}$	α'
9·90	30·18	20·28	10·14	0·24	10·09	30·32	20·23	10·11	0·02

Das Verhältnis $\frac{R_1}{R}$ beträgt im ersten Falle 1·2, im zweiten 1·33. Da wir wissen, daß für $\frac{R_1}{R} = 1{\cdot}20$ sich $\alpha = 0{\cdot}24$ und für $\frac{R_1'}{R'} = 1{\cdot}33$ sich $\alpha' = 0{\cdot}02$ ergibt, so erhalten wir $\frac{R_1'}{R'} - \frac{R_1}{R} = 0{\cdot}13$ und $\alpha - \alpha' = 0{\cdot}22$. Handelt es sich nun darum, zu ermitteln, für welchen Wert von $\frac{R'}{R}$ $\alpha = 0$ wird, so stellen wir die einfache Proportion auf:

$$(\alpha - \alpha') : \alpha = \left(\frac{R_1'}{R'} - \frac{R_1}{R}\right) : x.$$

Nach Einsetzung der entsprechenden Werte erhalten wir:

$$x = \left(\frac{R_1'}{R'} - \frac{R_1}{R}\right) \frac{\alpha}{\alpha - \alpha'} = 0{\cdot}14.$$

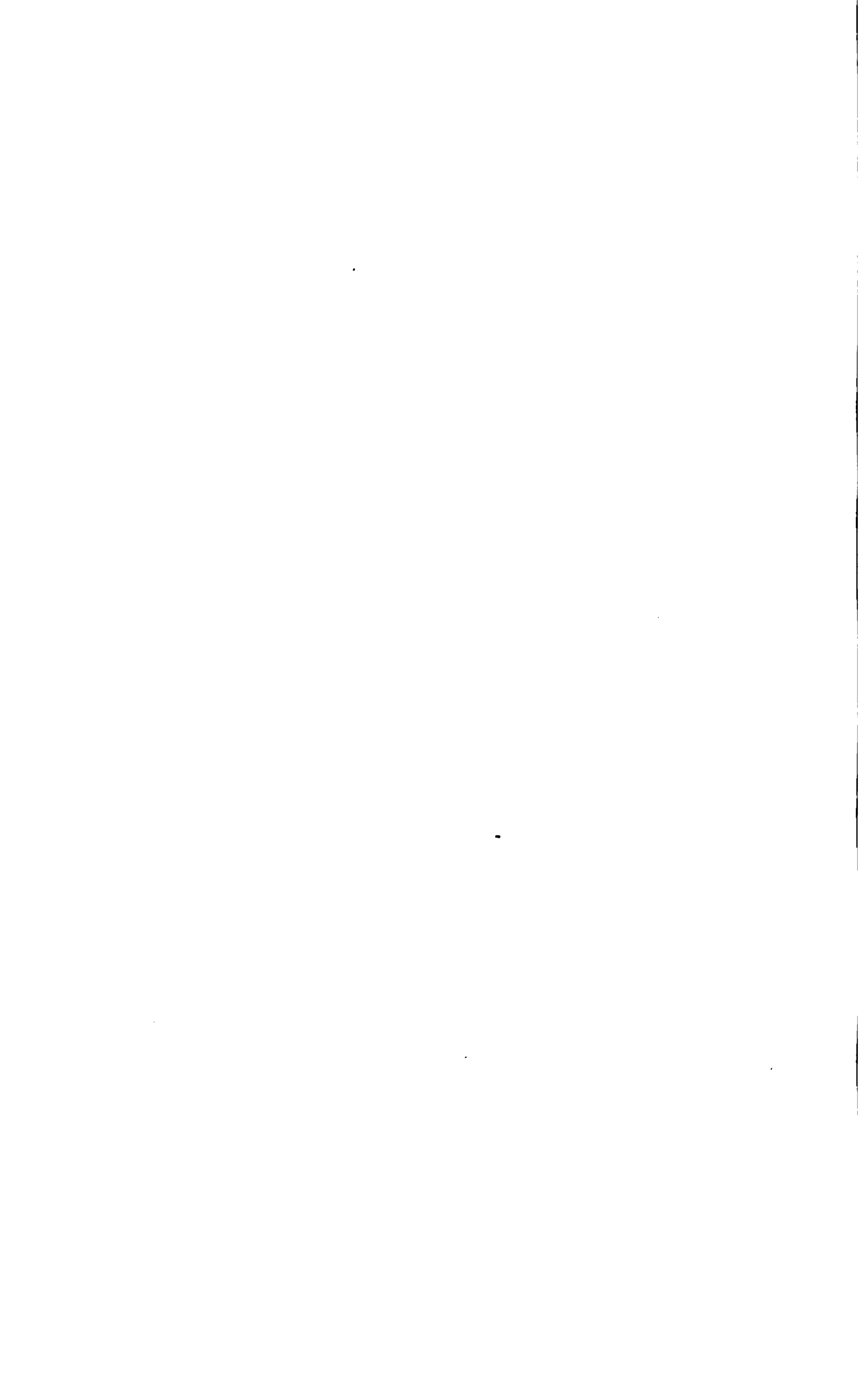
Bei einem Werte von $\frac{R'}{R} = 1{\cdot}20 + 0{\cdot}14 = 1{\cdot}34$ wird also das Korrektionsglied gleich Null werden.

Der Unterschied zwischen meinen Beobachtungen und den nach der Helmholtz'schen Formel berechneten Werten dürfte vielleicht darin liegen, daß die Schallgeschwindigkeit und mit ihr auch das Korrektionsglied bei verschiedener Temperatur nicht gleich sind. So z. B. betrug die Wellenlänge für den Ton a^2 bei den Versuchen, die ich im Herbst bei einer Zimmertemperatur von 15° C. anstellte, um einige Millimeter weniger als bei den im Sommer bei einer Zimmertemperatur von 23° C. angestellten. Die Folge davon war, daß sich auch das Korrektionsglied änderte. Vielleicht wäre nun die Helmholtz'sche Formel auch experimentell zu verwenden, wenn man an derselben noch die Korrektion der Temperatur anbrächte.

Aus den Tabellen ersieht man ferner, daß die Schallgeschwindigkeit in sehr engen Röhren abnimmt, was auf eine Reibung der Luft an den Glaswänden der Röhre zurückzuführen sein, möglicherweise aber auch darin seinen Grund

haben dürfte, daß die Schwingungen der Luft nicht mehr rein adiabatisch erfolgen.

Es bleibt mir nun nur noch die Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Dr. L. Pfaundler, für die Überlassung der nötigen Apparate sowie für die gütige Anleitung bei meiner Arbeit meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.



Über die Bestimmung der thermischen Änderung des Torsionsmoduls aus den Temperaturänderungen bei der Torsion von Stäben

von

Anton Waßmuth,

k. M. k. Akad.

(Mit 1 Textfigur.)

(Ausgeführt mit Unterstützung der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. November 1907.)

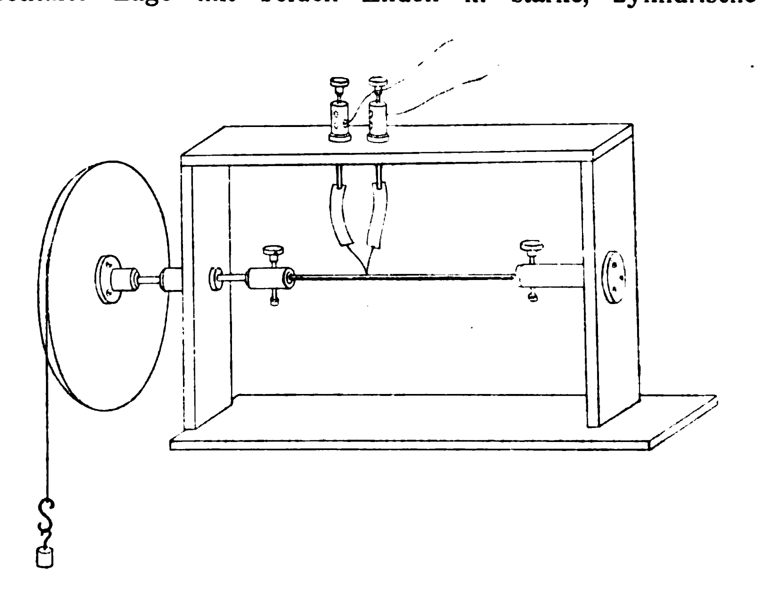
Im Jahre 1902[1] habe ich darauf hingewiesen, daß sich aus den Temperaturänderungen bei der Biegung die thermischen Änderungen des Elastizitätsmoduls und aus denen bei der Torsion die des Torsionsmoduls ermitteln lassen müssen.

In einer 1906[2] erschienenen Arbeit, welche sich mit der gleichförmigen Biegung von Stäben aus Platin, Palladium, Stahl, Nickel, Kupfer, Gold, Silber, Aluminium und fünf Arten von Messing befaßte, konnte ich dartun, daß sich wirklich aus den dabei auftretenden Temperaturänderungen die Änderungen des Elastizitätsmoduls E mit der Temperatur T, d. i. die Größen: $\varepsilon = \frac{1}{E}\frac{dE}{dT}$ an der Hand der Voigt'schen Formel finden ließen, indem sich bei verschieden starken Biegungen nahe konstante Werte von ε ergaben, die in guter Übereinstimmung standen

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 111, Abt. II a, Juli 1902; Ann. d. Phys., Bd. 11, 1903, p. 159; Boltzmann, Festschrift 1904, p. 560.

[2] Diese Sitzungsberichte, Bd. 115, Abt. II a, März 1906. Eine vorläufige Mitteilung erfolgte im Herbste 1905 auf der Naturforscherversammlung in Meran.

mit jenen Zahlen, wie sie von anderen Beobachtern nach ganz anderen Methoden erhalten worden waren. In der vorliegenden Untersuchung soll nun gezeigt werden, daß sich ganz analog aus den Temperaturänderungen bei der Torsion von Metallstäben an der Hand der von mir schon 1889[1] aufgestellten Formel die Änderungen des Torsionsmoduls F mit der Temperatur T, das ist die Größen: $\eta = \frac{1}{F}\frac{dF}{dT}$ ermitteln lassen. Die zu tortierenden Stäbe waren (Figur) in horizontaler Lage mit beiden Enden in starke, zylindrische



Messinghülsen eingeklemmt; die eine dieser Hülsen (in der Figur rechts) war unverrückbar fest mit einem Gestelle verbunden, während die zweite (links) sich verjüngend zum Mittelpunkte einer auf der Achse des Stabes senkrechten Kreisscheibe aus Holz führte. Durch Drehen dieser Scheibe um diese Achse konnte der Stab mehr oder weniger stark tortiert werden. Das Drehen der Scheibe erfolgte durch Anhängen von Gewichten an eine starke seidene Schnur, die in einer Rinne um den Umfang der Scheibe herumgelegt war. Der Drehungswinkel

---

[1] Waßmuth, diese Sitzungsberichte 1889, Bd. 98, Abt. IIa, p. 1393–1408.

konnte sowohl an einer Gradeinteilung, wie auch dadurch gemessen werden, daß die Höhe, um die das Zulegegewicht fiel, an einer vertikalen noch eine Ablesung von 0·1 *mm* gestattenden Skala gemessen wurde. In bekannter Weise ließ sich hieraus der Torsionsmodul F mit einer hier hinreichenden Sicherheit berechnen.

Die Temperaturänderungen wurden — ganz analog wie früher — durch ein Thermoelement aus Eisen und Konstantan, das in der Mitte jedes Stabes eingelötet und durch leichte, breite Kupferstreifen mit dem (auch früher verwendeten) Galvanometer von kleinem Widerstande verbunden war, angezeigt. Die thermoelektrische Konstante R, d. i. jener Ausschlag, der bei einer Temperaturdifferenz der Lötstellen von 1° und dem Gesamtwiderstande von 1 Ohm eintritt, wurde für die entsprechende Schwingungsdauer wiederholt neu bestimmt, zeigte sich aber, da stets gleiche Sorten von Eisen und Konstantan verwendet wurden, gegen früher nur wenig geändert. Der tortierte Stab mit den beiden Hülsen befand sich in einem hölzernen Gehäuse und war übrigens sorgfältig mittels Pappendeckel und Watta gegen Luftströmungen geschützt; nur die Drehscheibe und der sie tragende Stiel ragten aus dem Gehäuse heraus. Die Zuleitungsdrähte befanden sich in Kautschukröhren, die noch mit Watta — gleichwie das Galvanometer — umgeben waren. Vor Beginn der Versuche blieb der Apparat, in sich geschlossen, mehrere Tage stehen, damit die Temperaturunterschiede sich ausgleichen konnten.

War A der erste Ausschlag, $(x_1 - x_2)$ die erste, $(x_3 - x_2)$ die zweite Distanz der Umkehrpunkte und bezeichnet K das Dämpfungsverhältnis beim Widerstand w, so berechneten sich analog (l. c. p. 229) die Temperaturänderungen τ aus den Formeln:

$$X = A - \left(\frac{K}{K+1}\right)^2 [(x_1 - x_2) + (x_3 - x_2)]$$

$$\tau = \frac{X.w}{R}.$$

Für die meisten Versuche ergab sich: $\left(\frac{K}{K+1}\right)^2 = 0 \cdot 315.$

Die bei der Biegung gewonnenen Erfahrungen ließen es auch hier angezeigt sein, folgende Punkte insbesonders hervorzuheben:

I. Jeder der untersuchten Stäbe mußte sich im Normalzustande befinden, was durch vielfaches Kochen und Abkühlen stets erreicht wurde.

II. Um gewisse konstante Fehlerquellen zu vermeiden, war es wünschenswert, die Differenzen der Temperaturänderungen dann in Rechnung zu stellen (l. c. p. 301), sobald es zweifellos war, daß man die Grenzen der vollkommenen Elastizität nicht überschritten hatte.

Unter Berücksichtigung dieser Umstände ergaben sich auch hier — wie sich zeigen wird — nahe konstante Werte für $\eta = \frac{1}{F}\frac{dF}{dT}$, sobald vollkommene Elastizität vorhanden war. Die Berechnung der Größe η aus den beobachteten Temperaturänderungen τ erfolgte nach der von mir[1] entwickelten und etwas umgeänderten Formel.

Ich hatte gezeigt, daß

$$\frac{C.\sigma.\tau}{T} = \eta.F.\frac{r^2}{4}\frac{w_2^2 - w_1^2}{l^2} \tag{1}$$

sein müsse, falls der um den Torsionswinkel w_1 schon tortierte Stab vom kreisförmigen Querschnitte (Dicke $2r$, Länge l, spezifisches Gewicht b, spezifische Wärme der Gewichtseinheit C) durch weitere Torsion auf den Torsionswinkel w_2 gebracht wurde. Führt man in diese Gleichung statt der Torsionswinkel w die Momente M mit Hilfe der Beziehungen:

$$M_1 = F.\frac{\pi}{2}.r^4\frac{w_1}{l} \quad \text{und} \quad M_2 = F.\frac{\pi}{2}.r^4\frac{w_2}{l}$$

ein, so resultiert die benützte Formel:

$$\frac{C.\sigma.\tau}{T} = \frac{\eta.(M_2^2 - M_1^2)}{F.\pi^2.r^6} \tag{2}$$

Sie liefert die Temperaturänderung τ, wenn η bekannt ist und die Torsion vom Momente M_1 aus zum Momente M_2 weiter geführt wurde.[2] Umgekehrt ließ sich an der Hand dieser Formel

[1] L. c. p. 1397 und Boltzmann, Festschrift p. 562.

[2] Zu demselben Ausdrucke gelangte auf anderem Wege auch Voigt, Thermodynamik I, p. 331 und 332.

aus dem beobachteten τ das zugehörige η — mit gleicher Annäherung — berechnen; dabei war — wegen r^6 — insbesondere die Dicke $2r$ der Stäbe mit großer Sorgfalt zu messen. Der Torsionsmodul F wurde direkt durch Verdrehungen ermittelt. Wenn nämlich ein Drehmoment von p *kg*-Gewichten am Hebelarm a *mm* am einen Ende des Stabes wirkend daselbst eine Drehung um b Bogengrade bewirkt, so ist bekanntlich[1]

$$F = \frac{2}{\pi} \frac{l}{r^4} a p \frac{57 \cdot 3}{b} \tag{3}$$

Der Hebelarm a entsprach nahe dem Radius der Kreisscheibe und war $a = 105 \cdot 5$ *mm*.

So war z. B. für einen Stahlstab an einer vertikalen Skala ermittelt worden, daß das drehende Gewicht im Mittel um $15 \cdot 74$ *mm* sank, wenn es stetig um je $100 g = 0 \cdot 1$ *kg* vergrößert wurde. Hieraus rechnet man den Drehungswinkel $b = 8 \cdot 694°$ und erhält aus (3) mit $a = 105 \cdot 5$, $l = 168 \cdot 7$ *mm*, $p = 0 \cdot 1$ *kg* und $r = 0 \cdot 9825$ *mm* den Torsionsmodul des Stahles: $F = 8014$ *kg/mm*², was mit anderen Beobachtungen stimmt. So hat: Voigt 8070, Gray 7965 und Wagner 8075 *kg/mm*².

Stahl.

Mit einem Stahlstabe — Dicke $1 \cdot 980$ *mm* — (von Martin Miller in Wien) wurden eine ganze Anzahl von Beobachtungen ausgeführt, von denen die vom 8. November 1906 mitfolgend angeführt sind.

Dabei wurden — vgl. Kolonne 7 der Tafel — nur jene Ausschläge der Rechnung zu Grunde gelegt, wie sie sich beim Abheben der Gewichte, also bei der Detorsion ergaben. Bei der Torsion findet man meist kleinere Zahlen, da hier die Wirkung erst allmählich eintritt.

Es blieben stets $50 g$ angehängt und stellt p das Zulegegewicht vor. Die Schwingungsdauer T war $4 \cdot 22''$, wozu eine thermoelektrische, direkt ermittelte Konstante $R = 1896$ gehörte. Der gesamte Widerstand war $w = 0 \cdot 600$ Ohm und das

[1] Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik 1901, p. 205.

Dämpfungsverhältnis $K = 1\cdot 28$, woraus sich für $\left(\frac{K}{1+K}\right)^2$ der obige Wert $0\cdot 315$ ergab. Die Temperaturänderungen τ waren aus den beobachteten X zu rechnen nach der Formel: $\log \tau = 0\cdot 5003 - 4 + \log X$. In der letzten (10.) Kolonne findet man die (nach 2) aus den beobachteten τ berechneten Werte von $\eta = \frac{1}{F}\frac{dF}{dT}$. Die Berechnung geschah nach der Gleichung: $\log \eta = \log \tau - \log (M^2 - M_0^2) - 0\cdot 0869 + 12$.

Stahl.

p	A	$x_1 - x_2$	$x_3 - x_2$	X	Mittel aus allen X	Mittel aus den X beim Abheben	Beobachtetes τ	Mit $\eta = 3\cdot 22.10^{-4}$ berechnetes τ_m	Aus den beobachteten τ berechnetes η
100 g ab	4·4	3·0	2·3	**2·74**					
an	3·5	2·9	0·8	2·63					
ab	3·3	1·4	1·6	**2·82**	2·39	2·49	0·000788°	0·000748°	$3\cdot 39 \times 10^{-4}$
an	3·7	2·5	2·3	2·20					
ab	4·0	2·5	2·6	**2·40**					
150 g an	6·0	3·9	2·5	4·00					
ab	7·5	5·6	5·2	**4·12**	4·26	4·21	0·00133°	0·00141°	$3\cdot 05 \times 10^{-4}$
an	6·9	3·7	3·5	4·64					
ab	7·0	4·6	4·0	**4·80**					

200 *g* an	10·0	7·1	5·7	6·00	7·23	7·87	0·00249°	0·00225°	$3 \cdot 57 \times 10^{-4}$
ab	12·1	7·6	6·7	7·62					
an	10·0	5·9	4·7	6·68					
ab	12·7	8·0	6·5	8·12					
250 *g* an	14·6	9·6	7·0	9·40	9·67	10·13	0·00321°	0·00328°	$3 \cdot 15 \times 10^{-4}$
ab	16·7	11·6	9·6	10·05					
an	14·7	10·1	8·0	9·03					
ab	16·5	11·1	9·0	10·20					
300 *g* an	19·6	13·4	10·4	12·15	13·00	13·80	0·00437°	0·00449°	$3 \cdot 13 \times 10^{-4}$
ab	23·1	16·6	13·3	13·78					
an	20·1	13·5	11·5	12·27					
ab	23·8	17·7	14·0	13·86					
400 *g* an	32·4	20·9	16·9	20·56	21·38	22·33	0·00707°	0·00749°	$3 \cdot 04 \times 10^{-4}$
ab	38·5	28·4	22·2	22·64					
an	32·9	22·0	18·2	20·30					
ab	38·0	28·7	23·3	22·02					

Mittel der $\eta = 3 \cdot 22 \times 10^{-4}$

Die thermische Änderung η des Torsionsmoduls wäre sonach für Stahl $\eta = 3 \cdot 22 \times 10^{-4}$; für Eisen hat Schaefer auf andere Art $3 \cdot 035 \times 10^{-4}$ erhalten.

Nickel.

Chemisch rein von der Berndorfer Metallfabrik bezogen; es ist dies ein Stab von derselben Sorte wie Ni_{III} bei den Biegungsversuchen. Dicke $2r = 1 \cdot 76\,mm$; spezifisches Gewicht $\sigma = 8 \cdot 915$, spezifische Wärme $0 \cdot 109$. Der Torsionsmodul wurde mit Hilfe der Formel (3) ermittelt und gefunden: als Mittel aus 10 gut stimmenden Werten $b = 12 \cdot 564°$ zu $p = 0 \cdot 1\,kg$, so daß für $a = 106\,mm$, $l = 154 \cdot 2$ erhalten wird

$$F = 8137 \cdot 7\ kg/mm^2.$$

Bei den Beobachtungen über die Temperaturänderungen τ bei der Torsion war die Schwingungsdauer: $4 \cdot 135''$, somit $R = \left(\frac{4 \cdot 135}{4 \cdot 22}\right)^2 \times 1896 = 1821$ und der Widerstand $w = 0 \cdot 935\,\Omega$. Demnach ergaben sich die beobachteten τ aus: $\log \tau = 0 \cdot 7105 - 4 + \log X$. Zur Berechnung der η diente die Differenzmethode, indem, wenn $\Delta\tau$ die Differenz von zwei aufeinander folgender Werte der τ — und ebenso M_2 und M_1 zwei aufeinander folgende Momente — darstellt, sich η ergab, nach der Formel:

$$\log \eta = \log \Delta\tau - \log [M_2^2 - M_1^2] - 0 \cdot 2910 + 12.$$

Die erhaltenen Werte der η sinken und steigen je nach der Belastung und geben als Mittelwert: $\eta = 4 \cdot 105 \times 10^{-4}$. Mit diesem Mittelwerte sind die τ^1 berechnet worden, die ersichtlich eine gute Übereinstimmung mit den beobachteten τ aufweisen.

Nickel.

Zu 50 g hinzugehängtes Gewicht p	A	x_1-x_2	x_3-x_2	X	Mittel aller X	Mittel der X beim Abheben	Beobachtetes τ	Mit $\eta = 4{\cdot}105\times10^{-4}$ berechnetes τ^1	$\Delta\tau$	log $(M_2^2-M_1^2)$	η
100 g an	6·2	2·9	3·0	4·35	3·92	3·75	0·00193°	0·00199°			
ab	5·1	2·4	2·4	3·60							
an	5·2	1·7	2·7	3·82							
ab	5·2	2·4	3·2	3·44							
an	5·4	1·0	3·2	4·08							
ab	5·8	2·5	2·6	4·20							
150 g an	10·8	5·1	5·9	7·35	7·16	7·30	0·00375°	0·00364°	0·00182°	12·3124	$4{\cdot}54\times10^{-4}$
ab	11·3	5·5	6·1	7·66							
an	9·8	4·5	5·5	6·69							
ab	10·6	5·5	6·2	6·93							
200 g an	14·9	6·7	8·3	10·20	10·52	10·95	0·00562°	0·00573°	0·00187°	12·4141	$3{\cdot}69\times10^{-4}$
ab	16·5	8·6	9·2	10·93							
an	15·0	7·5	8·5	9·99							
ab	16·7	8·8	9·5	10·97							

Zu 50 g hinzugehängtes Gewicht p	A	x_1-x_2	x_3-x_2	X	Mittel aller X	Mittel der X beim Abheben	Beobachtetes τ	Mit $\eta = 4{\cdot}105\times10^{-4}$ berechnetes τ^1	$\Delta\tau$	log $(M_2^2-M_1^2)$	η
250 g an	21·2	11·0	11·8	14·06	14·99	15·69	0·00806°	0·00824°	0·00244°	12·4965	$3{\cdot}98\times10^{-4}$
ab	23·4	13·0	13·5	15·10							
an	22·8	12·9	13·5	14·53							
ab	25·6	14·7	15·1	16·27							
300 g an	30·0	16·7	16·9	19·47	20·45	21·49	0·01103°	0·01120°	0·00297°	12·5659	$4{\cdot}13\times10^{-4}$
ab	33·4	19·3	19·5	21·25							
an	30·0	17·2	16·8	19·35							
ab	34·0	19·6	19·5	21·72							
350 g an	38·4	22·0	21·8	24·67	26·19	27·68	0·01421°	0·01457°	0·00318°	12·6243	$3{\cdot}86\times10^{-4}$
ab	43·9	26·7	26·7	27·17							
an	38·2	21·5	21·5	24·78							
ab	44·7	26·7	26·6	28·18							
400 g an	43·0	23·7	23·8	28·12	32·55	35·74	0·01835°	0·01841°	0·00414°	12·6794	$4{\cdot}43\times10^{-4}$
ab	56·0	34·1	31·9	35·82							
an	47·7	27·5	27·1	30·59							
ab	58·0	35·7	34·6	36·16							

Mittel: $\eta = 4{\cdot}105\times10^{-4}$

Die Abweichung zwischen Rechnung (τ^1) und Beobachtung (τ) bleibt unter 3 % und ist bald positiv, bald negativ. Auch sieht man ein, daß und warum dieselbe sich anders verhält wie die Abweichungen der verschiedenen η von ihrem Mittelwerte. Wir haben eben: $\log \tau^1 = 0\cdot 2910 - 12 + \log 4\cdot 105 \times 10^{-4} + \log (M^2 - M_0^2)$, abhängig von M_0, während in der obigen Formel für $\log \eta$ die zwei benachbarten M_2 und M_1 auftreten.

Ein zweiter Nickelstab, ebenfalls chemisch rein, mit der Dicke $r = 1\cdot 950\,mm$ gab bei den Torsionsbeobachtungen mit $b = 7\cdot 5°$ und $l = 154$ den Torsionsmodul $F = 8630\,kg/mm^2$. Bei den Temperaturbeobachtungen war die Schwingungsdauer $4\cdot 32''$, $R = 1987$, $w = 0\cdot 700$ und $\log \tau = 0°5469 - 4 + \log X$.

p	A	$x_1 - x_2$	$x_3 - x_2$	X	Mittel der X	Beobachtetes τ	Mit $\eta = 4\cdot 02 \times 10^{-4}$ berechnetes τ^1
100 g ab	2·6	0·9	0·6	2·13			
ab	3·9	2·7	2·8	2·18			
ab	4·0	2·1	2·8	2·47	2·186	0·0007702°	0·0006478°
ab	3·8	1·8	2·3	2·51			
ab	2·8	1·7	2·0	1·64			
150 g ab	5·8	3·6	3·1	3·60			
ab	5·9	3·6	2·9	3·86	3·688	0·001299°	0·0001296°
ab	5·8	3·7	3·9	3·42			
ab	6·0	4·1	2·7	3·87			
200 g ab	9·5	6·0	5·5	5·90			
ab	9·7	6·9	5·7	5·75	5·870	0·002068°	0·00216°
ab	9·1	5·7	4·9	5·78			
ab	9·5	6·3	4·7	6·05			
250 g ab	14·4	9·5	8·0	8·92			
ab	14·2	10·0	8·0	8·56	8·838	0·003114°	0·00324°
ab	14·7	9·7	7·8	9·22			
ab	14·6	9·8	9·2	8·65			

p	A	x_1-x_2	x_3-x_2	X	Mittel der X	Beob-achtetes τ	Mit $\eta = 4\cdot02\times10^{-4}$ berech-netes τ^1
300 g ab	19·1	14·1	11·5	11·08			
• ab	18·8	13·0	10·5	11·44	11·140	0·003925°	0·00454°
ab	18·1	12·5	10·5	10·90			
350 g ab	24·8	17·2	14·6	14·84	15·345	0·005407°	0·00605°
ab	26·1	18 2	14·5	18·85			

Die Differenzmethode ergab für $\eta \times 10^4$ die Werte: 4·00, 4·16, 4·82, 2·81 und 4·31, also im Mittel 4·02, das ist einen analogen Wert wie früher. Die letzte Kolonne bringt die mit diesem η berechneten τ^1 (bleibendes Anhängegewicht 25 g) nach der Formel: $\log \tau = \log \eta + 0\cdot9982 - 13 + \log (M^2 - M_0^2)$

Kupfer.

Dicke $2r = 2\cdot446$ *mm*, also $r = 0\cdot1223$ *cm*; $b = 8\cdot90$; $C = 0\cdot093$; Torsionsmodul F: Ein Stück von der Länge von 160 *mm* wurde im Mittel aus zehn Versuchen tortiert um $b = 6\cdot90°$, wenn 0·1 *kg* am Arme $a = 105\cdot5$ *mm* wirkten. Hiemit gibt die Formel (3) für $F = 3989$ *kg/mm²*, während Schaefer hiefür 3967 *kg/mm²* hat.

Bei den Beobachtungen am 28. September 1907 war die Schwingungsdauer 3·88″, der Widerstand $w = 0\cdot735$ Ohm, so daß die beobachteten τ sich ergaben aus:

$$\log \tau = 0\cdot6614 - 4 + \log X.$$

In der folgenden Tabelle sind nur die Ausschläge beim Abheben angegeben.

Die Berechnung des η erfolgte nach der Formel:

$$\log \eta = \log \tau - [\log (M^2 - M_0^2) + 0\cdot8109 - 13],$$

wobei $M_0^2 = 0\cdot457 \times 10^{12}$ war.

p	A	x_1-x_2	x_3-x_2	X	Mittel der X	Beobachtetes τ	log $(M^2 - M_0^2)$ + 0·8109—13	η gerechnet	Mit $\eta = 4·65 \times 10^{-4}$ berechnetes τ
100 g ab	2·0	1·8	0·9	1·15	1·315	0·000603°	0·1454	$4·31 \times 10^{-4}$	0·000650°
ab	2·2	1·5	0·8	1·48					
150 g ab	4·7	3·4	1·4	3·20	2·725	0·00125°	0·4194	$4·76 \times 10^{-4}$	0·00122°
ab	4·1	3·2	2·7	2·25					
200 g ab	7·0	5·7	3·6	4·09	4·07	0·00187°	0·6231	$4·45 \times 10^{-4}$	0·00195°
ab	6·8	5·3	3·5	4·05					
250 g ab	10·9	8·6	5·5	6·48	6·23	0·00286°	0·7868	$4·67 \times 10^{-4}$	0·00285°
ab	10·7	8·9	6·2	5·98					
300 g ab	15·7	13·2	7·1	9·34	9·25	0·00424°	0·9243	$5·05 \times 10^{-4}$	0·00391°
ab	15·7	12·5	8·4	9·15					
								Mittel $4·65 \times 10^{-4}$	

Es ergibt sich demnach für Kupfer $\eta = 4\cdot65 \times 10^{-4}$, während Schaefer hiefür die etwas kleinere Zahl $4\cdot489 \times 10^{-4}$ fand.

Die größte Abweichung zwischen Rechnung und Beobachtung findet sich bei der letzten Beobachtung; wird diese ausgelassen, so folgt als Mittel $\eta = 4\cdot55 \times 10^{-4}$ und die Übereinstimmung wird nun eine noch bessere.

Derselbe Stab, später noch einmal untersucht, ergab: Schwingungsdauer 4·46″, $R = 2142$, $w = 0\cdot715$, $\log \tau = 0\cdot5235 - 4 + \log X$.

Gewicht p	Erster Ausschlag A	Erste Distanz der Umkehrpunkte $x_1 - x_2$	Zweite Distanz der Umkehrpunkte $x_3 - x_2$	X	Mittel der X	Beobachtetes τ
100 *g* ab	2·9	0·8	0·4	2·52		
ab	2·5	2·1	1·6	1·35	1·85	0·000618°
ab	2·6	1·5	1·4	1·69		
150 *g* ab	5·8	3·6	2·9	3·76		
ab	6·8	5·7	3·3	3·98	3·96	0·00132°
ab	5·9	3·4	2·2	4·14		
200 *g* ab	9·8	6·8	4·1	6·39		
ab	8·9	7·4	5·6	4·83	5·68	0·00190°
ab	10·6	8·7	6·6	5·81		
250 *g* ab	14·7	11·6	6·2	9·13		
ab	14·6	12·8	6·6	8·52	8·81	0·00286°
ab	14·3	11·4	6·4	8·73		
300 *g* ab	21·6	16·0	8·0	14·08		
ab	21·1	16·8	9·4	12·89	13·09	0·00424°
ab	21·1	17·4	10·7	12·29		

Die beobachteten τ weichen so wenig ab von denen des Vortages, daß sie für die Konstanz der Erscheinung sprechen.

Gold.

Chemisch rein, von W. C. Heraeus in Hanau frisch[1] bezogen. Mittlere Dicke $2r = 1 \cdot 6917$, Dichte 19·3 und spezifische Wärme 0·0316. Der Stab wurde nach Einlöten des Thermoelementes 40mal gekocht und abgekühlt, so daß der Normalzustand wohl erreicht war. Um die Grenze der vollkommenen Elastizität nicht zu überschreiten, wurden nur kleine Gewichte — Maximum 50 *g* — angehängt. Man erhielt dann konstant für ein Zulegegewicht von $p = 10 \cdot 5\, g = 0 \cdot 0105\, kg$ den Torsionswinkel $b = 4 \cdot 50°$, woraus sich nach Formel (3) für $l = 156$ der Torsionsmodul F des Goldes ergibt zu

$$F = 2750\, kg/mm^2.$$

Die Beobachtungen vom 9. Oktober 1907 über die Temperaturänderungen τ bei der Torsion sind in der folgenden Tabelle wiedergegeben, wobei wiederum nur die Ausschläge beim Abheben notiert sind, und stets 10 *g* angehängt blieben. Zur Berechnung des $\eta = \frac{1}{F}\frac{dF}{dT}$ diente die Gleichung:

$$\log \eta = \log \tau - [\log (M^2 - M_0^2) + 0 \cdot 0661 - 11];$$

dabei war:

$$M = 10 \cdot 6 \times 980 \times (p + 10)$$

und

$$M_0^2 = (10 \cdot 6 \times 981 \times 10)^2 = 10^{10} \times 1 \cdot 082.$$

Bei den Beobachtungen blieben stets 10 *g* an dem dünnen, um den Umfang der Scheibe gelegten feinen, aber festen Faden hängen. Es war ferner der Widerstand $w = 0 \cdot 760$ Ohm und die Schwingungsdauer $4 \cdot 40''$, wonach sich das beobachtete τ berechnet aus: $\log \tau = 0 \cdot 5665 - 4 + \log X$.

---

[1] Der bei der Biegung gebrauchte Goldstab konnte leider nicht auch zur Torsion verwendet werden, was im Interesse der Gleichheit des Materials wohl wünschenswert gewesen wäre.

p	A	x_1-x_2	x_3-x_2	X	Mittel der X	τ beobachtet	M^2	η	Mit $\eta = 4\cdot37\times10^{-4}$ berechnetes τ
20 *g* ab	1·7	0·6	0·6	1·32					
ab	1·6	0·4	0·3	1·38	1·31	0·000483°	$9\cdot733\times10^{10}$	$4\cdot79\times10^{-4}$	0·000440°
ab	1·4	0·3	0·2	1·24					
30 *g* ab	2·6	1·0	0·3	2·20					
ab	3·0	2·3	1·7	1·75	2·08	0·000767°	$17\cdot304\times10^{10}$	$4\cdot06\times10^{-4}$	0·000826°
ab	2·8	0·9	0·7	2·30					
40 *g* ab	3·7	0·4	0·4	3·45					
ab	4·9	2·5	1·2	3·74	3·34	0·001231°	$25\cdot980\times10^{10}$	$4\cdot25\times10^{-4}$	0·001267°
ab	3·7	1·6	1·4	2·76					
ab	4·6	2·1	1·7	3·41					
50 *g* ab	5·9	4·1	3·2	3·62					
ab	7·8	4·4	2·6	5·61					
ab	6·4	3·7	2·9	4·33	4·33	0·001595°	$38\cdot940\times10^{10}$	$3\cdot62\times10^{-4}$	0·001927°
ab	6·5	4·6	3·5	3·96					
ab	6·3	3·8	3·1	4·14					

Das Mittel aus den drei ersten sichern Daten ergibt: $\eta = 4\cdot37\times10^{-4}$.

Platin.

Chemisch rein; mittlere Dicke $2r = 1 \cdot 50\,mm$; Dichte 21·4 und spezifische Wärme 0·032. Der Stab wurde 30mal gekocht und abgekühlt und nur schwach — 50 *g* Maximalgewicht — tortiert. Da der Stab nur kurz war, so wurde er in dicke Messingzylinder eingelötet; die zu tortierende Länge war dann $l = 74 \cdot 9\,mm$ und der dem Zulegegewicht $p = 0 \cdot 01\,kg$ entsprechende Torsionswinkel $b = 1 \cdot 725°$. Hiemit findet man — Formel (3) — den Torsionsmodul $F = 5280\,kg/mm^2$. Die folgende Tabelle bringt die Beobachtungen über die Erwärmungen τ bei der Detorsion; die Abkühlungen bei Anhängen der Gewichte — der Torsion — sind nicht notiert. Bezeichnet wiederum $\Delta\tau$ die Differenz von zwei aufeinander folgenden Werten von τ und ebenso $\Delta M^2 = M_b^2 - M_a^2$ die Differenz der Quadrate der zugehörigen Momente, so berechnet sich η aus der Gleichung:

$$\log \eta = \log \frac{\Delta\tau}{\Delta M^2} + 11 - 0 \cdot 0456.$$

Beobachtungen vom 11. Oktober 1907 am Platinstab: Dicke 1·50. Es blieben stets 10 *g* angehängt und stellt p das Zulegegewicht vor. Es war der Widerstand $w = 0 \cdot 797$ und die Schwingungsdauer 4·43″, wonach sich das beobachtete τ berechnet aus: $\log \tau = 0 \cdot 6013 - 4 + \log X$ — die M^2 sind dieselben wie bei Gold.

p	A	$x_1 - x_2$	$x_3 - x_2$	X	Mittel der X	τ	Mit $\eta = 2\cdot22 \times 10^{-4}$ berechnetes τ^1	Beobachtetes η
20 *g* ab.......	1·0	0·8	0·6	0·56				
ab.......	1·0	0·6	0·3	0·72	0·61	0·000244°	0·000214°	$2\cdot54 \times 10^{-4}$
ab.......	1·1	1·1	0·6	0·56				
30 *g* ab.......	1·4	1·1	0·6	0·88				
ab.......	1·0	0·4	0·3	0·78	0·95	0·000379°	0·000402°	$2\cdot11 \times 10^{-4}$
ab.......	1·5	0·6	0·4	1·10				
40 *g* ab.......	1·7	0·6	0·4	1·39				
ab.......	2·2	1·2	0·4	1·70	1·48	0·000591°	0·000617°	$2\cdot14 \times 10^{-4}$
ab.......	1·9	1·2	1·0	1·21				
ab.......	2·1	0·8	0·7	1·63				
50 *g* ab.......	3·6	2·6	1·2	2·41				
ab.......	3·3	2·9	1·9	1·80	2·19	0·000874°	0·000938°	$2\cdot08 \times 10^{-4}$
ab.......	3·5	2·5	1·1	2·37				

Alle vier Werte ergeben als ziemlich sicheres Mittel: $\eta = 2\cdot22 \times 10^{-4}$

Palladium.

Chemisch rein, von Heraeus in Hanau bezogen; Dicke 1·75 *mm*. Nach dem Einlöten des Thermoelementes wurde der Stab 30mal gekocht und abgekühlt. Wurde hierauf dieser Stab in einer Länge von 157 *mm* durch je ein Zulegegewicht von 10 *g* tortiert, so ergab sich ein Drehungswinkel $b = 2\cdot 02°$ (im Mittel). Hieraus berechnet sich der Torsionsmodul $F = 5103$ *kg*/*mm*², während Schaefer hiefür die etwas kleinere Zahl 4613·7 *kg*/*mm*² erhielt. Schon bei diesen Versuchen hatte sich ergeben, daß bei einem Anhängegewicht von 80 *g* die Grenzen der vollkommenen Elastizität überschritten wurden. Noch deutlicher zeigten dies die Versuche über die Temperaturänderungen beim Tortieren. Dieselben wurden erst ausgeführt, nachdem der Stab fünf Tage wohlverwahrt stehen geblieben war; die Abweichung von der Ruhelage (bei offenem Strom) war dann in der Tat sehr gering, d. h. der stets vorhandene Thermostrom sehr klein.

Mit der Schwingungsdauer 4·38″, der thermoelektrischen Konstante $R = 2042\cdot 5$, dem gesamten Widerstand $w = 0\cdot 685$, ergab sich zur Berechnung der beobachteten Erwärmungen τ — es sind aus bekannten Gründen nur die Ablenkungen beim Abheben (Detorsion) notiert — die Beziehung: $\log \tau = 0\cdot 5256 - 4 + \log X$.

10 *g* bleiben stets hängen	A	$x_1 - x_2$	$x_3 - x_2$	X	Mittel der X	Beobachtetes τ	Berechnetes η
50 *g* ab	1·5	0·8	0·6	1·06			
ab	1·5	0·9	0·5	1·06	1·09	0·0003656°	10×2·9⁻⁴
ab	1·6	1·0	0·5	1·13			
ab	1·6	0·9	0·7	1·10			
75 *g* ab	2·5	1·6	1·1	1·65			
ab	2·1	0·8	0·6	1·66	1·67	0·0005601°	10×2·0⁻⁴
ab	2·6	1·5	1·4	1·69			

Dabei ist für $p = 50\,g$, $M_1^2 = 10^{12} \times 0\cdot 2704$ und für $p = 75\,g$, $M_2^2 = 10^{12} \times 0\cdot 6084$ zu nehmen. Man erhält so für η die Werte: $2\cdot 9 \times 10^{-4}$ und $2\cdot 0 \times 10^{-4}$. Der rasche Abfall dieser Beträge weist darauf hin, daß schon bei $75\,g$ als Anhängegewicht die Grenzen der vollkommenen Elastizität überschritten wurden. Wir haben demnach nur den bei kleinster Belastung ($50\,g$) geltenden Wert zu nehmen, d. i. für Palladium $\eta = 10^{-4} \times 2\cdot 9$. Schaefer hat hiefür $10^{-4} \times 2\cdot 696$.

Kommen, wie beim Silber und Aluminium, neben den geringen Grenzen der vollkommenen Elastizität noch elastische Nachwirkungen dazu, so versagt die Methode, da die Voraussetzungen der Theorie fehlen. Mehrfache Versuche bestätigten dies.

Die Resultate aller Versuche bringt die nachfolgende Tabelle, wobei zu jedem $\eta = \frac{1}{F} \frac{dF}{dT}$ und $\varepsilon = \frac{1}{E} \frac{dE}{dT}$ — Elastizitätsmodul E — der Faktor 10^{-4} hinzuzudenken ist. Die Daten anderer Beobachter sind den Tabellen von Landolt-Börnstein 1905, Seite 43 u. fg. entnommen; es bedeutet: S (Schaefer), K (Katzenelsohn), G (Gray) und V (Voigt).

Stahl	$F = 8014$ 8070 V 7965 G	$\eta = 3\cdot 22$	$\varepsilon = 2\cdot 64$	$\eta = 3\cdot 035$ S Eisen 3·10 K Eisen 3·38 G Stahl	$\varepsilon = 2\cdot 25$ S Eisen 2·33 K Eisen 2·47 G Stahl
Nickel ...	$F = 8137\cdot 7$ 7820 V	$\eta = 4\cdot 105$	$\varepsilon = 3\cdot 247$	$\eta = 3\cdot 28$ S	$\varepsilon = 2\cdot 463$ S
Kupfer...	$F = 3989$ 3587 K 4199 G	$\eta = 4\cdot 55$	$\varepsilon = 3\cdot 59$	$\eta = 4\cdot 489$ S 3·65 K 1·60 G?	$\varepsilon = 3\cdot 627$ S $\varepsilon = 4\cdot 36$ G
Gold	$F = 2750$ 2850 V	$\eta = 4\cdot 37$	$\varepsilon = 4\cdot 09$	$\eta = 3\cdot 014$ S 2·85 K	—
Platin ...	$F = 5280$	$\eta = 2\cdot 22$	$\varepsilon = 1\cdot 07$	$\eta = 1\cdot 78$ S 7·2 K?	$\varepsilon = 0\cdot 732$
Palladium	$F = 5103$ 4613·7 S	$\eta = 2\cdot 9$	$\varepsilon = 2\cdot 05$	$\eta = 2\cdot 696$ S	$\varepsilon = 1\cdot 979$ S

Die Betrachtung dieser Zahlen zeigt, daß die Werte von η und ε, wie sie nach meinem Verfahren aus den Torsions- und Biegungsversuchen erhalten wurden, sich nicht sehr weit entfernen von jenen, wie sie andere Beobachter nach völlig verschiedenen Methoden gefunden haben. Finden sich nach dem thermodynamischen Verfahren größere η, so gehören stets auch größere ε dazu, so daß das Verhältnis $\frac{\eta}{\varepsilon}$ sich wenig ändert.

Ordnet man die Metalle nach den steigenden Werten der η, so resultiert die Reihe: Platin, Palladium, Stahl, Nickel, Gold und Kupfer, wie sie auch Schaefer erhielt.

An den Versuchen hat mit Erfolg und regem Eifer Herr Dr. R. Wagner teilgenommen.



Über einige Zusammenhänge zwischen speziellen Quartiken

von

Heinrich Wieleitner in Speyer.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. November 1907.)

Die letzten Jahre haben die mathematische Literatur um zwei Werke über spezielle Kurven bereichert,[1] von denen besonders das von G. Loria, soweit man dies von einem einzelnen Buche überhaupt verlangen kann, eine umfassende Übersicht über das weitverzweigte Gebiet der speziellen ebenen Kurven gibt. Die meisten von den vielen bekannten und mit Namen versehenen Kurven verdanken ihre Entstehung irgend einem besonderen Anlaß und hängen oft mit anderen gleicher Ordnung, ja gleichen Geschlechts in keiner Weise merkbar zusammen. Es ist vielleicht nicht ohne Interesse, einige dieser Kurven einander näher zu bringen. Dies soll im folgenden für drei Familien von Kurven vierter Ordnung geschehen.

I.

In diesem ersten Abschnitte soll ein engerer Zusammenhang zwischen den Booth'schen Lemniskaten und den spirischen Linien des Perseus einerseits, zwischen den Pascal'schen Schnecken und Cartesischen Ovalen andrerseits, der zudem für beide Gattungen derselbe ist, nach-

[1] G. Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Leipzig, B. G. Teubner, 1902. — F. G. Teixeira, Tratado de las curvas especiales notables Mem. Real Acad. cienc. Madrid, t. XXII, 1905.

gewiesen werden. Sowohl Booth'sche Lemniskaten als Pascalsche Schnecken sind Fußpunktskurven von Kegelschnitten. Die allgemeine Fußpunktskurve eines Mittelpunktkegelschnittes nun ist eine allgemeine bizirkulare Quartik mit Doppelpunkt. Dies dürfte bekannt sein. Sie gehört daher zu den sogenannten »Potenzkurven«, d. h. wenn O irgend ein Punkt der Ebene ist, $\mathfrak{G}$ eine beliebige Gerade durch O und P_1, P_2, P_3, P_4 die vier Schnittpunkte von $\mathfrak{G}$ mit der Kurve, so ist

$$OP_1 . OP_2 . OP_3 . OP_4 = \text{Const.} \tag{1}$$

Diese Eigenschaft haben alle n-fach zirkularen Kurven $2n^{\text{ter}}$ Ordnung.[1]

Man kann nun — das ist bis jetzt, wie es scheint, nicht geschehen — nach dem Orte aller Punkte P der Ebene fragen, die in Bezug auf eine Potenzkurve gleiche Potenz haben. P wird dann eine Kurve durchlaufen, die wir »Kurve gleicher Potenz« nennen wollen. Ist nun

$$\mathfrak{C} \equiv f(x, y) = 0 \tag{2}$$

die Gleichung der Potenzkurve $\mathfrak{C}$, so erhält man den Wert der Potenz für einen Punkt P mit den Koordinaten ξ, η, indem man in (2) x, y durch ξ, η ersetzt. Dies ergibt eine leichte Überlegung. Ist der Wert $f(\xi, \eta) = \Pi$ und wir lassen ξ, η variieren, so stellt

$$\mathfrak{D} \equiv f(x, y) - \Pi = 0 \tag{3}$$

eine Kurve gleicher Potenz Π in Bezug auf $\mathfrak{C}$ dar. Die Kurven $\mathfrak{D}$ treffen die Kurven $\mathfrak{C}$ nur in den imaginären Kreispunkten, durch die sie in derselben Richtung wie $\mathfrak{C}$ gehen. Für kleine Werte von Π läßt sich daher die Gestalt der Kurven $\mathfrak{D}$ angeben, indem man die Konturen von $\mathfrak{C}$, ohne $\mathfrak{C}$ zu überschreiten, verfolgt und alle Knoten löst oder im Falle isolierter

---

[1] J. Petersen, Tids. Math. (2) *5*, 1869; später ausführliche Untersuchung über den Gegenstand F. P. Ruffini, Mem. Acç. Bologna (4) *10*, 1890; neuerdings hat das Problem gestellt S. Gundelfinger, Arch. Math. Phys. (3) *2*, 1902, 356 (Antworten ebenda *3*, 84, 172, 309; *4*, 352).

Punkte diese entweder verschwinden läßt oder durch kleine Ovale ersetzt.[1]

Für die allgemeine Fußpunktskurve eines Mittelpunktkegelschnittes ist $\mathfrak{D}$ nach diesen Darlegungen eine allgemeine bizirkulare Quartik. Nimmt man den Mittelpunkt des Kegelschnittes als Pol, so wird die Fußpunktskurve zur Booth'schen Lemniskate. Sie hat z. B. für die Ellipse mit den Halbachsen a, b die Gleichung

$$(x^2+y^2)^2-(a^2x^2+b^2y^2)=0. \tag{4}$$

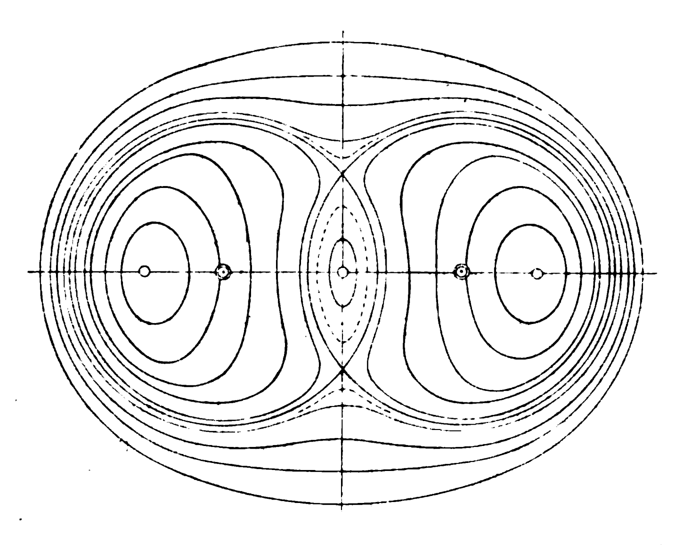


Fig. 1.

Die Kurven gleicher Potenz bilden dann (bei variablem Π) das System

$$(x^2+y^2)^2-(a^2x^2+b^2y^2)=\Pi. \tag{5}$$

Dies sind die spirischen Linien des Perseus. Denn sie sind bizirkular und haben zwei Symmetrieachsen. Im übrigen ist es auch leicht, Gleichung (5) mit der sonst für diese Kurven gegebenen Darstellung zu identifizieren. Alle Kurven (5) haben

---

[1] Vergl. den § 28 von des Verfassers »Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung«, Leipzig, G. J. Göschen, 1905 (Sammlung Schubert, XLIII).

die außerordentlichen Brennpunkte gemeinsam, die auf den Achsen in den Entfernungen $\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}$, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{b^2-a^2}$ liegen. Für $b^2 < 0$ ist der zu Grunde gelegte Kegelschnitt eine Hyperbel; insbesondere wird (4) für $b^2 = -a^2$ die Bernoullische Lemniskate und (5) das System der Cassinischen Kurven. Fig. 1 gibt das System (5) für den elliptischen Fall. Es enthält zwei reelle und zwei imaginäre Kreise. Die reellen Schnittpunkte der letzteren treten auf der Hauptachse als Grenzpunkte der reellen Kurven auf.

Nimmt man den Pol beliebig, legt aber als Kegelschnitt einen Kreis zu Grunde, so wird die Fußpunktskurve eine Pascal'sche Schnecke. Diese hat die Gleichung

$$(x^2+y^2-2rx)^2-l^2(x^2+y^2)=0. \tag{6}$$

Hiebei sind r und l Radius und konstantes Zwischenstück für die bekannte »konchoidale« Erzeugung. Die Kurven gleicher Potenz bilden das System

$$(x^2+y^2-2rx)^2-l^2(x^2+y^2)=\Pi. \tag{7}$$

Das sind Cartesische Ovale (im weiteren Sinne), denn sie haben eine Symmetrieachse und in den Kreispunkten Spitzen wie die Pascal'schen Schnecken. Kreise sind nicht in dem System (7) enthalten, wohl aber außer der zu Grunde gelegten noch zwei weitere Pascal'sche Schnecken, deren eine, wenn die ursprüngliche einen Knoten hatte, eine Form mit isoliertem Punkt ist, während die andere im Reellen nur den isolierten Punkt besitzt. Diese isolierten Punkte bilden hier die Grenzpunkte der reellen Ovale. Fig. 2 gibt das System wieder. Es konnten aber einige Kurven wegen zu großer Annäherung an die ursprüngliche Pascal'sche Schnecke nur angedeutet werden. Alle Kurven haben den einen außerordentlichen Brennpunkt, den Schnittpunkt der beiden Spitzentangenten gemeinsam. Dies ist der Mittelpunkt der der konchoidalen Erzeugung aller drei Pascal'schen Schnecken zu Grunde liegenden Kreise.

Bemerkung. Der Vollständigkeit wegen sei noch angemerkt, daß alle Fußpunktskurven von Kegelschnitten auf eine sehr einfache Weise gezeichnet werden können. Man braucht nämlich nur von einem bestimmten Pol Q aus

die Radienvektoren zweier Kreise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ zu addieren, von denen $\mathfrak{K}$ durch Q geht (»kissoidale« Erzeugung). Ist der Mittelpunkt M von $\mathfrak{K}'$ beliebig, so ergibt sich eine allgemeine Fußpunktskurve einer Ellipse oder Hyperbel; ist M der Gegenpunkt von Q auf $\mathfrak{K}$, so entsteht eine Booth'sche Lemniskate und, wenn M mit Q zusammenfällt, eine Pascal'sche Schnecke. Artet $\mathfrak{K}'$ in eine Gerade aus, so erzeugt man auf dieselbe Weise die Fußpunktskurven der Parabel (Strophoide, Sluse'sche Konchoide, Kissoide des Diokles u. s. w.).[1]

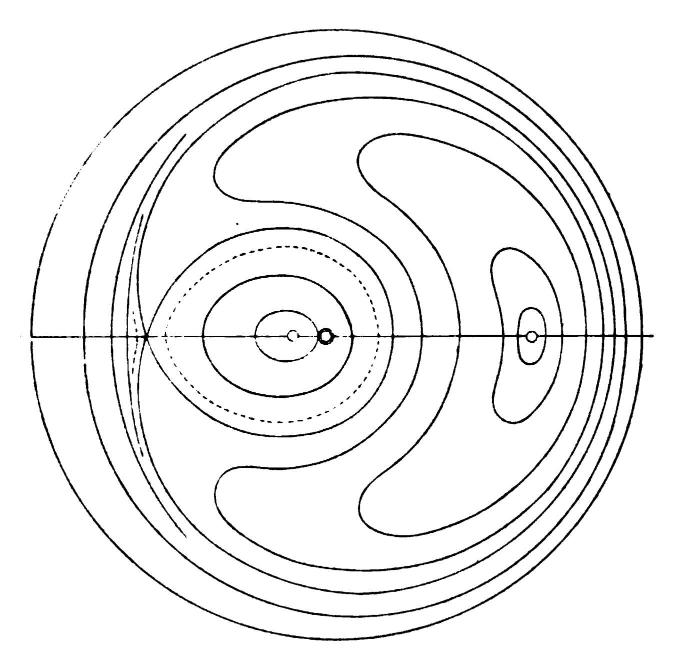


Fig. 2.

II.

Die Kurve, die wir in diesem Abschnitt behandeln wollen, steht in Loria's Werk ganz isoliert. Trotzdem ist sie schon durch ihren Erfinder bemerkenswert; wir meinen die Dürer-sche Muschellinie. Auch M. Cantor führt diese Kurve auf

---

[1] In den beiden oben genannten Werken ist dies nicht zusammenfassend ausgesprochen. Für die allgemeine bizirkulare rationale Quartik wurde die kissoidale Erzeugung überhaupt erst in den Ann. di mat. (3) *11*, 1905, von Teixeira nachgewiesen. Dort ist aber nicht erwähnt, daß dies Fußpunktskurven von Kegelschnitten sind. Der Verfasser hatte dieselbe Erzeugung übrigens gefunden, bevor ihm Teixeira's Abhandlung bekannt geworden war.

in dem 2. Bande seiner »Geschichte der Mathematik« (2. Aufl., Leipzig 1900, p. 461) und sagt, die Muschellinie Dürer's sei »wohl zu unterscheiden von der Konchoide der Alten«, d. h. der Konchoide des Nikomedes. Gerade zwischen diesen beiden Kurven aber wollen wir einen sehr engen Zusammenhang nachweisen, indem wir zeigen, daß beide demselben Bewegungsvorgang entspringen, beide in einem weiteren Sinne »Konchoiden der Geraden« sind. Die Konchoide des Nikomedes wird bekanntlich beschrieben von einem festen Punkte P einer Ebene Γ, wenn diese mit einem anderen festen Punkte Q ($QP = l$) auf einer Geraden $\mathfrak{G}$ einer Ebene Γ' gleitet, während die Gerade $PQ \equiv \mathfrak{L}$ immer durch den festen Punkt F der Ebene Γ' geht. Ist $FO \perp \mathfrak{G}$ und $FO = a$, so ist ihre Gleichung in Bezug auf O als Anfangspunkt

$$x^2 y^2 = (y+a)^2 (l^2 - y^2). \tag{1}$$

Die Konchoiden des Nikomedes sind aber nur spezielle Bahnkurven dieser Bewegung, da ihr erzeugender Punkt P auf der die Bewegung bestimmenden Geraden $\mathfrak{L}$ liegt. Alle übrigen Punkte R der Ebene Γ beschreiben ebenfalls rationale Quartiken, die man in der Kinematik die Koppelkurven des zentrischen Schleifschiebergetriebes nennt, die wir aber hier lieber »schiefe Konchoiden der Geraden« heißen wollen.[1] Indem wir von der Bewegung der beiden Ebenen aufeinander absehen, können wir nämlich die Erzeugung einer solchen schiefen Konchoide kürzer folgendermaßen ausdrücken (vergl. Fig. 3): Es ist eine Gerade $\mathfrak{G}$ gegeben und im Abstande a von ihr ein Punkt F. Ein konstanter Winkel ω soll sich so bewegen, daß sein einer Schenkel immer durch F geht, während sein Scheitel Q auf $\mathfrak{G}$ gleitet. Dann beschreibt ein fester Punkt R des anderen Schenkels ($QR = l$) eine schiefe Konchoide der Geraden. Wird $\omega = 0$ oder 2π, so ergibt sich die Konchoide des Nikomedes,

[1] Siehe z. B. F. Ebner, Leitfaden der technisch wichtigen Kurven, Leipzig, Teubner, 1906, p. 127 ff. Dort wird die Bewegung ebenfalls als »konchoidische« bezeichnet. Übrigens hat schon de la Hire die Bezeichnung »Konchoide« in unserem Sinne angewendet in der Abhandlung »Des conchoides en général«, Mém. Ac. Sc. 1708 (Paris 1730) p. 32 bis 60.

während die Dürer'sche Muschellinie für $\omega = \frac{\pi}{4}$ entsteht. Dies scheint bisher unbemerkt geblieben zu sein. Man erhält für den allgemeinen Fall, wenn man den variablen Winkel OQF mit ε bezeichnet

$$\begin{aligned} x &= a \operatorname{ctg} \varepsilon - l \cos(\omega+\varepsilon) \\ y &= -l \sin(\omega+\varepsilon), \end{aligned} \tag{2}$$

woraus durch Elimination von ε die Gleichung entsteht

$$[xy - (y^2+ay-l^2) \operatorname{tg} \omega]^2 = (x \operatorname{tg} \omega + y + a)^2 (l^2-y^2) \tag{3}$$

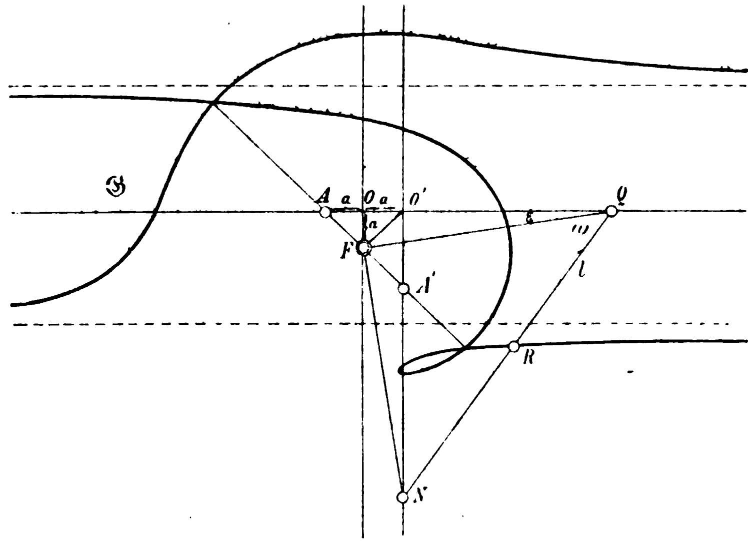


Fig. 3.

oder in sofort verständlichen Symbolen

$$\mathfrak{H}^2 = \mathfrak{A}^2 (l^2-y^2). \tag{3*}$$

Die Kurve hat einen Knoten im unendlich fernen Punkt der x-Achse, außerdem zwei weitere Doppelpunkte, wo die Gerade $\mathfrak{A}$ die Hyperbel $\mathfrak{H}$ schneidet. Die Tangenten des unendlich fernen Knotens (Asymptoten) sind $y = \pm l \sin \omega$, während die beiden Parallelen $y = \pm l$ horizontale Tangenten sind, zwischen denen die Kurve liegt.

Für $\omega = 0$ geht (3) in der Tat in (1) über; für $\omega = \frac{\pi}{4}$ ergibt sich

$$(xy - y^2 - ay + l^2)^2 = (x + y + a)^2 (l^2 - y^2), \tag{4}$$

welche Gleichung sich leicht mit der sonst für die Dürer'sche Muschellinie gegebenen identifizieren ließe. Wir wollen die Identität aber an der von Dürer selbst mitgeteilten Erzeugung erweisen. Dürer gibt zwei senkrechte Achsen (durch O') sowie auf der einen den festen Punkt A ($AO' = 2a$). Dann läßt er eine Gerade sich so bewegen, daß immer $AQ = O'N$ ist. Ein Punkt R von QN beschreibt die Kurve, wenn Q auf AO' gleitet.[1] Zieht man nun AA' unter 45° gegen AO' und nennt F den Fußpunkt des Lotes von O' auf AA', so ist $\triangle NFA' \cong \triangle OQF$ und $\triangle OFN \cong \triangle AFQ$, also $\triangle NFQ$ gleichschenkelig-rechtwinklig, d. h. $\sphericalangle FQN = \omega = \frac{\pi}{4}$. Damit ist die eine Erzeugung auf die andere zurückgeführt. Es ist nur $AO = OF = OO' = a$ zu nehmen. Die Gerade QN hüllt bekanntlich eine Parabel mit F als Brennpunkt ein.

Unter den Kurven (3) befindet sich außer der Konchoide des Nikomedes noch eine symmetrische Form, für $\omega = \frac{\pi}{2}$, die man »Orthokonchoide der Geraden«[2] nennen kann. Ihre Gleichung lautet

$$(y^2 + ay - l^2)^2 = x^2 (l^2 - y^2). \tag{5}$$

Bemerkung. Da in den beiden eingangs zitierten Werken der Begriff der schiefen Konchoiden überhaupt nicht erwähnt ist, sei hier ergänzend beigefügt, daß die schiefen Konchoiden des Kreises (mit dem Pol auf dem Kreise) mit den gewöhnlichen Konchoiden, d. h. den Pascal'schen Schnecken identisch sind. Dies geht aus dem elementaren Satze vom Peripheriewinkel hervor.

---

[1] Siehe die »Underweysung der messung mit zirckel und richtscheyt«, Nürnberg 1525; dazu vergl. v. Braunmühl »Historische Studie über die organische Erzeugung ebener Kurven« im Katalog math.-phys. Modelle etc., München 1892, p. 62; S. Günther, »Albrecht Dürer einer der Begründer der modernen Kurvenlehre«, Bibl. math. 1886, p. 139.

[2] J. Neuberg, Mém. Soc. Sc. Liége (3) 5, Nr. 7 »Sur les lignes tracées par le curvigraphe Victor Lebeau«.

III.

In demselben Kapitel, in welchem Loria die Dürer'sche Muschellinie behandelt, führt er noch eine andere rationale, zirkulare Quartik auf, deren einer Doppelpunkt unendlich fern liegt, die aber mit der Muschellinie keinerlei Zusammenhang aufweist, d. i. die Trisekante von P. Delanges. Diese wollen wir als Spezialfall aus einer Konstruktion ableiten, die zugleich noch einige weitere, ebenfalls ganz vereinzelt stehende rationale, zirkulare Quartiken bei anderer Spezialisierung der Konstanten liefert, vor allem das sogenannte Zweihorn (Kremphut) und die Kappa-Kurve.

Die angedeutete Konstruktion ist die folgende:[1] Es sind zwei Kreise $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{K}$ mit den Mittelpunkten O und K gegeben. Die Radien seien beziehungsweise a und b, die Mittelpunktsentfernung m. Zu jedem Punkte A auf $\mathfrak{K}$ suche man die Polare in Bezug auf $\mathfrak{O}$, die man mit der durch A zu OK gezogenen Parallele in P zum Schnitt bringt. Dann beschreibt P eine Kurve, deren Gleichung (für O als Ursprung und OK als y-Achse) ist

$$(x^2+my-a^2)^2+y^2(x^2-b^2) = 0. \tag{1}$$

Diese Kurve hat für alle Werte von a, b, m folgende Eigenschaften. Der unendlich ferne Punkt der y-Achse ist ein Doppelpunkt mit den beiden Tangenten

$$x = \pm\sqrt{b^2-m^2}, \tag{2}$$

ferner sind die beiden auf der x-Achse liegenden Punkte von $\mathfrak{O}$ Doppelpunkte der Kurve. Sie haben zu Tangenten die Geradenpaare

$$\frac{y}{x\pm a} = \frac{2a}{m\pm\sqrt{b^2-a^2}}. \tag{3}$$

Die Kurve geht immer durch die Schnittpunkte von $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{K}$. Sie ist im Endlichen geschlossen, wenn $b < m$;

[1] Die leicht zu zeichnenden Figuren zu diesem Abschnitt überlassen wir dem Leser.

für $b = m$ hat sie den unendlich fernen Punkt der y-Achse zur Spitze. Die beiden endlichen Doppelpunkte sind Knoten, solange $b > a$, Spitzen für $b = a$ und isolierte Punkte für $b < a$. Daß $x = \pm b$ die die Kurve einschließenden vertikalen Tangenten sind, erhellt schon aus der Erzeugung.

Die oben erwähnten Spezialisierungen sind nun folgende. Sind die beiden Kreise $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{K}$ konzentrisch ($m = 0$) und zugleich $b = a\sqrt{2}$, so erhalten wir die Trisekante mit der Gleichung

$$(x^2+y^2)(2a^2-x^2)-a^4=0. \tag{4}$$

Sind die beiden Kreise $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{K}$ gleich ($b = a$) und berühren sich außerdem ($m = 2a$), so entsteht das Zweihorn mit der Gleichung

$$(x^2+y^2+4ay-a^2)(x^2-a^2)+4a^2y^2=0. \tag{5}$$

Nun kann aber a auch gleich Null werden. Dann rücken die zwei endlichen Doppelpunkte zusammen und es entsteh auf jeden Fall ein Berührungsknoten in O. Die Gleichung lautet

$$(x^2+my)^2+y^2(x^2-b^2)=0. \tag{6}$$

Diese läßt sich, wenn man $m+\sqrt{m^2-b^2}=\mu$, $m-\sqrt{m^2-b^2}=\nu$ setzt, in die Form bringen

$$2x=\sqrt{-y(y+2\mu)}+\sqrt{-y(y+2\nu)}. \tag{6*}$$

Dies ist demnach eine Familie von Quartiken, die man nach Cayley »polyzomal« nennt. Aus der Gleichung (6*) ersieht man, daß diese Kurven aus zwei sich in O berührenden Kreisen konstruiert werden können mit den Gleichungen

$$x^2+y^2+2\mu y=0, \qquad x^2+y^2+2\nu y=0, \tag{7}$$

indem man zu je zwei zur selben Ordinate gehörigen Abszissen das arithmetische Mittel nimmt. Diese Kreise und daher die Konstruktion sind aber nur reell, wenn die Kurve sich im End-

lichen schließt ($m > b$). Hiezu gehört z. B. der Fall $b = a\sqrt{2}$, $m = -\frac{3}{2}a$, der die Kurve gibt

$$2x = \sqrt{y(2a-y)} + \sqrt{y(4a-y)}, \tag{8}$$

die Loria (p. 180) als aus Cramer's »Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques« stammend zitiert.

Zur zweiten Gattung ($m < b$) gehört der Fall $m = 0$. Die Kurve hat in diesem Falle die Gleichung

$$x^2(x^2+y^2) - b^2y^2 = 0. \tag{9}$$

Das ist die sogenannte Kappa-Kurve. Sie hat die Polargleichung

$$\rho = b \operatorname{ctg} \varphi. \tag{9*}$$

Die Geraden $x = \pm b$ sind Wendetangenten im unendlich fernen Knoten.[1] Daß die Kappa-Kurve eine Polyzomalkurve ist, scheint nirgends erwähnt zu sein. Die zugehörige Gleichungsform lautet

$$2x = \sqrt{-y(y+2bi)} + \sqrt{-y(y-2bi)}. \tag{9†}$$

Auf einige naheliegende Verallgemeinerungen unserer Konstruktion, die nicht-symmetrische oder nicht-zirkulare rationale Quartiken liefern würden, wollen wir nicht eingehen. Wir wollen nur den allgemeinen Charakter der Transformation angeben. Es entspricht dem Kreise $\mathfrak{K}$ ein Kegelschnitt $\mathfrak{C}$ als polarreziprok in Bezug auf $\mathfrak{O}$. Dem Tangentensystem von $\mathfrak{C}$ wird das Strahlbüschel durch den unendlich fernen Punkt der y-Achse so zugeordnet, daß jedem Strahl dieses Büschels zwei

[1] Hienach beruht wohl die Bemerkung Loria's (p. 182), daß die Kappa-Kurve vom projektivischen Standpunkte aus von der Konchoide des Nikomedes nicht verschieden sei, auf einem Versehen. Von V. Retali wurde die Kappa-Kurve durch eine besondere Transformation abgeleitet, die im allgemeinen Kegelschnitte in rationale Quartiken mit einem Inflexionsknoten überführt. Auch alle bekannten speziellen Kubiken mit Doppelpunkt erhält man durch dieselbe Konstruktion. Siehe die Abhandlung »Sur une transformation géométrique«, Mém. Soc. Sc. Liége (3) 2, 1900.

Tangenten von 𝔈, jeder Tangente von 𝔈 aber nur ein Strahl des Büschels entspricht. Es liegt also eine (1, 2)-Korrespondenz zwischen einem Strahlenbüschel erster und einem zweiter Ordnung vor. Indem man die Koinzidenzpunkte auf einer beliebigen Geraden sucht, findet man mittels des Chasles'schen Korrespondenzprinzipes, daß die Ordnung des Erzeugnisses 4 sein muß. Da die Punkte der erzeugten Kurve aber eindeutig den Tangenten des Kegelschnittes 𝔈 zugeordnet sind, muß die erzeugte Quartik wie der Kegelschnitt vom Geschlechte Null sein, also drei Doppelpunkte haben. Diese sind bei ganz allgemeiner Lage das Zentrum des linearen Büschels und die Berührungspunkte der von diesem Zentrum an 𝔇 gelegten Tangenten. 𝔎 und 𝔇 mögen dabei irgend welche Kegelschnitte sein.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Klasse erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden vier gesonderten Abteilungen, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abteilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Kristallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.

Abteilung II a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abteilung II b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abteilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Tiere sowie aus jenem der theoretischen Medizin.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichnisse ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Alfred Hölder, k. u. k. Hof- und Universitätsbuchhändler (Wien, I., Rothenthurmstraße 13), zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Teile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Teile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 14 K — 14 M.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Originalauszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird wie bisher acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 5 K — 5 M.



SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVI. BAND. IX. UND X. HEFT.

JAHRGANG 1907. — NOVEMBER UND DEZEMBER.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 14 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1907.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN KOMMISSION BEI ALFRED HÖLDER,

K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

INHALT

des 9. und 10. Heftes, November und Dezember 1907, des CXVI. Bandes, Abteilung II a, der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Klasse.

Preis des ganzen Heftes: 4 K 50 h — 4 M 50 pf.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVI. BAND. IX. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



Ein einfacher Zusammenhang zwischen Brechungsexponent, Zähigkeit und Dichte bei Gasen

von

Dr. E. Lohr.

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Dezember 1907.)

Es ist bekannt, daß bei der Funkenentladung in Gasen das Produkt aus dem sogenannten kritischen Druck und der Funkenlänge eine für das betreffende Gas charakteristische Konstante ist; nennen wir sie q. Es zeigt sich außerdem,[1] daß für eine große Anzahl von Gasen annähernd die Beziehung gilt:

$$\frac{\lambda}{q} = \text{konst.}, \tag{1}$$

wobei λ die molekulare Weglänge des Gases bedeutet. Es schien mir naheliegend, zu versuchen, ob es nicht auch eine einfache Beziehung zwischen q und der wichtigsten elektrischen Konstante des Gases, der Dielektrizitätskonstante ε gäbe. In der Tat fand ich sofort eine Relation, welche sich aber nur aufrechterhalten ließ, wenn ich dort, wo ε wesentlich von dem Quadrat des Brechungsexponenten abweicht, wie z. B. bei Schwefeldioxyd, ε durch n^2 ersetzte. Ich entschloß mich daher, überall ε mit n^2 zu vertauschen.

Die Beziehung, welche ich gefunden habe und welche mit ähnlicher Annäherung wie Gleichung (1) erfüllt ist, lautet dann

[1] J. J. Thomson, »Conduction of electricity through gases«, 1903, p. 366.

$$(n^2-1)\,.\,q = \text{konst.}$$

oder auch

$$(n-1)\,.\,q = \text{konst.} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) aber folgt sofort die neue Gleichung

$$(n-1)\,.\,\lambda = \text{konst.},$$

oder anders geschrieben:

$$\frac{(n-1)\,.\,\eta}{\sqrt{\delta\,.\,p}} = \text{konst.},$$

beziehungsweise bei konstantem Druck:

$$\frac{(n-1)\,.\,\eta}{\sqrt{\delta}} = \text{konst.} = \text{K}. \tag{3}$$

Es bedeutet n den Brechungsexponenten, η die Zähigkeit, δ die Dichte und p den Druck des Gases.

Ich will in nachfolgenden Tabellen zeigen, wie weit die Gleichung (3) tatsächlich erfüllt wird. Dabei setze ich für n den Brechungsindex des Natriumlichtes bei 0° und 760 *mm* Druck, und zwar verwende ich die Werte von Mascart,[1] um mich möglichst in allen Fällen einem und demselben Beobachter anzuschließen. Wo ich in Ermangelung Mascart'scher Werte solche anderer Beobachter oder Brechungsexponenten anderer Lichtarten verwenden muß, wird es in der Tabelle erwähnt. Die Werte der Brechungsindices differieren bei den verschiedenen Beobachtern meist nicht allzusehr.

Statt der Größe $\frac{\eta}{\sqrt{\delta}}$ setze ich der Einfachheit halber die Zahlenwerte der ihr proportionalen Größe λ für 0° und 760 *mm* Druck ein.

Die Werte von λ differieren aber bei den verschiedenen Beobachtern häufig sehr stark. Man findet z. B.[1] für

[1] Landolt-Börnstein, Tabellen, 3. Auflage, 1905.

Wasserstoff........	$\lambda = 1822.10^{-8}$	(Dorn),
	$\lambda = 1390.10^{-8}$	(Stefan);
Kohlenoxyd	$\lambda = 968.10^{-8}$	(Dorn),
	$\lambda = 650.10^{-8}$	(Stefan);
Äthylacetat........	$\lambda = 330.10^{-8}$	(L. Meyer und Schumann),
	$\lambda = 173.10^{-8}$	(Winkelmann).

Diese herausgegriffenen Beispiele zeigen wohl deutlich, daß die Werte für λ recht unsicher sind, was natürlich auch bei der Beurteilung der folgenden Tabellen berücksichtigt werden muß.

Ich entschloß mich, in erster Linie jene λ-Werte zu benützen, welche O. E. Meyer in der zweiten Auflage seiner kinetischen Theorie der Gase bringt. Die Gase, für welche dort λ-Werte angegeben sind, fasse ich in der ersten Tabelle zusammen. In der zweiten Tabelle folgen Gase, bei welchen ich die Winkelmann'schen, in der dritten solche, bei welchen ich die Steudel'schen Werte verwendet habe. Zu beachten ist, daß bei Gasen, für welche von beiden der letztgenannten Forscher Beobachtungen vorliegen, Winkelmann stets verhältnismäßig kleine, Steudel hingegen große Werte für λ findet; z. B.:

	Winkelmann	Steudel
Für Alkohol	$\lambda = 259.10^{-8}$	$\lambda = 416.10^{-8}$
» Butylalkohol (normal) ...	$\lambda = 164.10^{-8}$	$\lambda = 282.10^{-8}$

Ich habe in diesen Tabellen alle Gase zusammengestellt, für welche ich gleichzeitig Werte für n und für λ vorfand. Die Gleichung (3) würde fordern, daß die Zahlen der letzten Spalte konstant bleiben.

Sieht man von den auffallend kleinen Werten für Helium und Wasserdampf ab und berücksichtigt man, daß nach dem, was über die Steudel'schen λ-Werte gesagt wurde, die Zahlen der Tabelle 3 einer starken Reduktion bedürfen, um mit denen der vorhergehenden Tabelle 2 vergleichbar zu werden, so kann man das Resultat mit Rücksicht auf die Unsicherheit der λ-Werte wohl dahin zusammenfassen, daß die Relation (3) für

eine große Anzahl von Gasen im großen und ganzen den richtigen Zusammenhang der drei Größen $\varkappa$, η und δ gibt.

Tabelle 1.

Substanz	$(\varkappa-1).10^6$	$\lambda.10^8$ (O. E. Meyer)	$K.10^{10}$
Helium	43 (weiß Rayleigh)	2400	10·3
Wasserdampf	259	649	16·8
Quecksilber	556 (rot Le Roux)	344	19·1
Wasserstoff	139	1780	24·7
Ammoniak	379	710	26·9
Sauerstoff	271	1020	27·6
Argon	280 (weiß Ramsay und Travers)	990	27·7
Stickoxyd	297	940	27·9
Luft	293	960	28·1
Stickstoff	298	950	28·3
Kohlensäure	454	650	29·5
Äthylen	723	420	30·4
Chlorwasserstoff	447	710	31·7
Kohlenoxyd	335	950	31·8
Schweflige Säure	686	470	32·2
Cyan	822	400	32·9
Stickoxydul	516	650	33·5
Methan	444	800	35·5
Chlor	773	460	35·6
Methyläther	891	410	36·5
Schwefelwasserstoff	623	600	37·4
Methylchlorid	870	440	38·3
Äthylchlorid	1179	360	42·4

Tabelle 2.

Substanz	$(n-1).10^6$	$\lambda.10^8$ (Winkelmann)	$K.10^{10}$
Methylalkohol......	623	361	22·5 siehe Tab. 3
Äthylacetat........	1408	173	24·4
Methylacetat.......	1138	224	25·5
Äthylformiat.......	1191	217	25·8
Methylpropionat....	1473	191	28·1
Äthyläther.........	1544	197	30·4
Benzol............	1823	190	34·6
Schwefelkohlenstoff .	1485	255	37·9

Tabelle 3.

Substanz	$(n-1).10^6$	$\lambda.10^8$ (Steudel)	$K.10^{10}$
Methylalkohol......	623	501	31·2 siehe Tab. 2
Propyljodid........	1782	288	51·3
Methyljodid	1273	408	52
Äthylbromid	1223	430	52·6
Chloroform	1464	373	54·6
Chlorkohlenstoff....	1779	314	55·9
Äthyljodid	1608	354	56·9

Die Formel kann aber aus zwei Gründen nur als vorläufige bezeichnet werden.

Man muß nämlich von derartigen Beziehungen verlangen, daß ihre Gültigkeit unabhängig sei von speziellen Werten der Temperatur und des Druckes.

Untersuchen wir daraufhin, so ergibt sich, wenn wir die folgenden Reduktionsformeln verwenden:

$$(n-1) = \frac{(n_0-1).p}{(1+\alpha t)760} \text{ (Biot, Arago, Lorenz),}$$

$$\eta = \eta_0 \sqrt{1+\alpha t},$$

$$\delta = \delta_0 \frac{1}{1+\alpha t} \frac{p}{760},$$

wobei die Indices Null anzeigen, daß sich die betreffende Größe auf 0° C. und 760 *mm* Quecksilber bezieht und α der Ausdehnungskoeffizient ist

$$\frac{(n-1).\eta}{\sqrt{\delta.p}} = \frac{(n_0-1).\eta_0}{\sqrt{\delta_0.760}} = \text{konst.}$$

Die Relation ist also innerhalb der Gültigkeitsgrenzen obiger Formeln nachweisbar unabhängig von Druck und Temperatur, aber auch nur innerhalb dieser Grenzen. Nun ist es ja bekannt, daß die Formel

$$\eta = \eta_0 \sqrt{1+\alpha t}$$

den Beobachtungen gar nie genau entspricht und z. B. für Quecksilber statt dieser die Gleichung

$$\eta = \eta_0 (1+\alpha t)^{1\cdot 6}$$

gilt. Darin liegt die eine Schwierigkeit.

Die zweite Schwierigkeit bildet der Umstand, daß n von der Lichtart abhängt, während die anderen Größen der Formel von dieser naturgemäß unabhängig sind. Es kann die Formel also nur für e i n e n b e s t i m m t e n Brechungsexponenten streng richtig sein.

Die natürlichste Annahme bleibt die, welche ich ursprünglich gemacht habe, daß in die Formel nicht der Brechungsexponent, sondern die Dielektrizitätskonstante einzugehen hat. Diese Annahme führt aber bei vielen Gasen zu einem unbedingten Widerspruche mit der Erfahrung. Es wäre höchstens denkbar, daß für genügend hohe Temperaturen die Gleichung

$$\frac{(\varepsilon - 1) \cdot \eta}{\sqrt{\delta \cdot p}} = \text{konst.}$$

wirklich erfüllt ist, da nach einer Bemerkung von Bädeker[1] bei Gasen, für welche das Maxwell'sche Gesetz nicht gilt, dennoch für höhere Temperaturen eine Annäherung der Dielektrizitätskonstante an das Quadrat des Brechungsexponenten stattfindet.

Halten wir an der vorläufigen Form

$$\frac{(n - 1) \cdot \eta}{\sqrt{\delta \cdot p}} = \text{konst.},$$

beziehungsweise

$$(n - 1) \cdot \lambda = \text{konst.}$$

fest. Es folgt dann sofort, daß in allen Fällen, wo eine Beziehung zwischen λ und einer anderen Größe vorhanden ist, sich auch eine Beziehung zwischen dieser Größe und $(n - 1)$ ergeben muß.

Ich führe ein Beispiel an: Für die dielektrische Kohäsion eines Gases[2] gilt die Formel

$$F = a + bp,$$

wo a und b Konstante sind und p der Druck des Gases ist.

Die Konstante b ist in vielen Fällen angenähert proportional der Größe $\frac{1}{\lambda}$, sie muß daher nach obiger Gleichung auch angenähert proportional zu $(n - 1)$ sein. Die folgende Tabelle zeigt, wie weit dies der Fall ist.

	b	$n - 1 . 10^6$
Methylalkohol	616	623
Äthylalkohol	800	885
Äthyläther	1000	1544
Aceton	1100	1100
Äthylformiat	1110	1191
Methylacetat	1250	1138
Schwefelkohlenstoff	1510	1485
Wasserdampf	500	259
Benzol	1670	1823

[1] Zeitschrift für phys. Chemie, *36*, 1901, p. 335.

[2] J. J. Thomson, »Conduction...«, p. 373.

Einen wesentlich neuen und wichtigen Aufschluß gibt die Formel, wenn man sich der Bedeutung des Brechungsexponenten erinnert.

Man ersieht sofort, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in einem Gase nicht nur eine Funktion der Dichte, sondern auch eine Funktion der Zähigkeit des Gases ist und daß sie bis auf vorhandene Unsicherheiten ceteris paribus umso größer sein wird, je größer die Zähigkeit des Gases ist. —

Dies betrachte ich als das Hauptergebnis der vorliegenden Untersuchung.

Analyse der Strahlung des Radiobleis

von

Dr. V. F. Hess.

Aus dem II. physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 7 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. November 1907.)

Erster Teil.

Die Arbeiten von Hofmann, Gonder und Wölfl,[1] Rutherford,[2] Meyer und v. Schweidler[3] haben sichergestellt, daß die Endglieder der Radiumreihe Ra*D*, RaE_1 und RaE_2 sowie Ra*F* im sogenannten Radioblei enthalten seien.

Meyer und v. Schweidler haben eine Anzahl in heißer, wässeriger Radiobleichloridlösung aktivierter Metallbleche untersucht und fanden bei der Abklingungskurve eine Anfangsstörung, die die möglichen Beobachtungsfehler weit überstieg.

Anstatt des normalen Abfalles nach der Halbierungskonstante des Poloniums (138 Tage) fiel die Aktivität anfangs viel rascher ab ($HC =$ 109, 115, 130 Tage und ähnliche Werte).

Ich habe nun durch systematische Abklingungsmessungen diese Anomalität aufzuklären versucht.

Da die Messungen mehrere Monate dauerten, war es nötig, ein Instrument von möglichst konstanter Empfindlichkeit und bequemer Handhabung zu benützen. Ich wählte daher ein

---

[1] Hofmann, Gonder und Wölfl, Ann. d. Ph., *15*, p. 615.

[2] E. Rutherford, Phil. mag., 1905, p. 290.

[3] St. Meyer und v. Schweidler, Diese Sitzungsberichte, Juli 1905, Februar und Juni 1906.

Exner'sches Elektroskop mit einem Tischchen als Zerstreuungskörper, um welches ein geerdeter Topf gestülpt war. Eine parallaxenfreie Lupenablesung gestattete sicheres Schätzen der Zehntelteilstriche.

Jede der in den folgenden Tabellen mitgeteilten Zahlen ist der Mittelwert von 20 Ablesungen.

Die natürliche Zerstreuung der Elektrizität in der Luft wurde stets in Rechnung gezogen.

Die Aktivierung wurde in einer Lösung der zweiten (gereinigten) Fraktion des Radiobleichlorids vorgenommen, welche bereits von Meyer und v. Schweidler[1] für zwei Palladiumbleche und einen Silberdraht verwendet worden war. Die Lösung wurde zuerst bis zum Sieden erhitzt, um Spuren eventuell vorhandener Radiumemanation zu vertreiben und sodann konstant auf einer Temperatur von etwa 60° erhalten, während die Metallbleche an einem Drahte in die Lösung getaucht waren.

Nach der Aktivierung wurden die Bleche durch rasches Eintauchen in warmes Wasser vom anhaftenden ungelösten Radiobleichlorid gereinigt und zwischen Filterpapier vorsichtig getrocknet.

Bei einigen Blechen untersuchte ich den Gang der Aktivität innerhalb der ersten Tage besonders oft; um die Beobachtungsfehler bei diesen verhältnismäßig langsamen Änderungen der Aktivität möglichst zu verkleinern, wurden Mittel aus 50 Ablesungen zu einer Zahl vereinigt.

Die Versuchsergebnisse.

In den folgenden Tabellen sind die Beobachtungsdaten mitgeteilt, die an acht in Radiobleilösung aktivierten Metallen, und zwar drei Palladium- und fünf Silberblechen, gewonnen wurden. t bedeutet die Zeit in Tagen, J die gemessene Aktivität, HC die Halbierungskonstante.

1. Palladiumblech I.

Aktiviert am 28. November 1906 durch eine Stunde. Unmittelbar nach der Aktivierung betrug die Gesamtaktivität

[1] Meyer und Schweidler, Diese Sitzungsber., Juli 1905, p. 1203; Februar 1906, p. 79f.

167·0 Volt/Min., stieg in den weiteren 6 Stunden zu einem Maximum von 171·8 Volt/Min. und zeigte hierauf den in Tabelle 1 und der entsprechenden Kurve I in Fig. 1 angegebenen Verlauf.

Tabelle 1.

(Palladiumblech I.)

t	J	$\log J$	$\frac{d}{dt}\log J$	HC in Tagen
0	171·8	2·235	0·0180	16·7
2	158·2	2·199		
2·8	157·4	2·197		
4·8	155·2	2·191		
9·0	151·3	2·180		
15·0	148·0	2·170	0·0023	130·6
22·8	140·6	2·148		
41·9	125·3	2·098		
47·8	123·9	2·093		
58·7	116·4	2·066		
69·8	108·4	2·035	0·0021	143
96·0	96·61	1·985	0·0021	143
110·0	90·16	1·955		
120·0	83·18	1·920	0·0021	143
134·0	80·54	1·906		

Man ersieht, daß die Abklingung genau nach der Periode von RaF erfolgt — abgesehen von dem in den allerersten Tagen beobachteten viel rascheren Abfall, der von einer übergelagerten Aktivität herrührt. Der spätere Verlauf der Kurve I ergibt eine mittlere Halbierungskonstante von 135·5 Tagen. Die β-Strahlung war äußerst gering, sie betrug anfangs etwa 1·4 Volt/Min. und nahm nach der Periode von RaE ab.

2. Palladiumblech II.

Aktiviert am 28. November 1906, eine Stunde lang. Auch hier zeigte sich in den ersten Stunden ein rascher Anstieg der

Aktivität von $J = 138 \cdot 4$ Volt/Min. unmittelbar nach der Aktivierung auf $J' = 141 \cdot 24$ Volt/Min. 6 Stunden später. Hierauf begann die regelrechte Abklingung, deren Verlauf in der folgenden Tabelle 2 und der entsprechenden Kurve II in Fig. 1 verzeichnet ist.

Tabelle 2.

(Palladiumblech II.)

t	J	$\log J$	$\frac{d}{dt} \log J$	HC in Tagen
0	141·24	2·150		
2	128·8	2·110	0·0164	18·4
2·8	127·05	2·104		
4·8	126·5	2·102		
9·0	123·0	2·090		
15·0	119·7	2·078		
23·8	111·2	2·046	$0 \cdot 0023_6$	127·6
41·9	101·6	2·007		
49·0	99·08	1·996		
56·8	95·28	1·979		
67·8	90·78	1·958		
78·0	85·71	1·933	$0 \cdot 0022_8$	132·0
88·0	80·91	1·908		
104·0	73·96	1·869	$0 \cdot 0021_8$	138·1
126·0	66·83	1·825		

Auch dieses Präparat zeigt einen ganz ähnlichen Gang wie das Präparat I. Die Aktivität besteht fast durchwegs aus α-Strahlung, denn nach Abschirmung derselben durch 40 μ Aluminiumfolie blieb eine restliche β-Aktivität von bloß 1·2 Volt/Min. übrig, deren Abklingung mittels des gewöhnlichen Elektroskops nicht mehr ganz präzise verfolgt werden konnte. Es wurde nur konstatiert, daß diese β-Aktivität nach etwa einer Woche auf die Hälfte gesunken war — was mit der Periode des RaE übereinstimmt.

Die Gesamtstrahlung zeigt im Anfange wiederum eine raschere Abnahme und geht nach etwa 10 Tagen in die

normale Abklingung nach der Periode des Poloniums über; aus der Kurve ergäbe sich eine mittlere Halbierungskonstante von 132 Tagen.

3. Palladiumblech III.

Wurde am 28. November 1906 zusammen mit den beiden ersten Präparaten eine Stunde lang in der heißen Radiobleichloridlösung aktiviert. Unmittelbar nach dem Herausnehmen war die Aktivität 109·04 Volt/Min. und stieg in den nächsten 6 Stunden auf 114·9 Volt/Min.

Die dann beginnende Abklingung verläuft ganz analog wie bei den Präparaten I und II und ist in der nachfolgenden Tabelle 3 sowie Kurve III (Fig. 1) verzeichnet.

Tabelle 3.

(Palladiumblech III.)

t	J	$\log J$	$\frac{d}{dt} \log J$	HC in Tagen
0	114·90	2·060	0·0140 (0 – 2·8)	21·5
2·8	105·45	2·023		
4·8	103·80	2·016	0·0031 (4·8 – 9·0)	97·1
9·0	100·74	2·003		
15·7	95·50	1·980	$0·0024_7$ (15·7 – 23·8)	121·9
23·8	91·20	1·960		
41·9	83·37	1·921		
48·7	81·85	1·913		
57·7	77·63	1·890		
68·9	74·47	1·872	0·0021 (41·9 – 88·0)	143·0
78·7	70·80	1·850		
88·0	66·53	1·823		
110·0	60·67	1·783	$0·0020_8$ (88·0 – 120·0)	148·0
120·0	57·28	1·758		

Auch hier zeigt sich die schon erwähnte, auf eine übergelagerte Aktivität mit rascherer Abklingung zurückzuführende

Anfangsstörung. Nach etwa 12 Tagen ist die Abklingung wieder rein exponentiell, aus der Kurve würde eine Halbierungs-

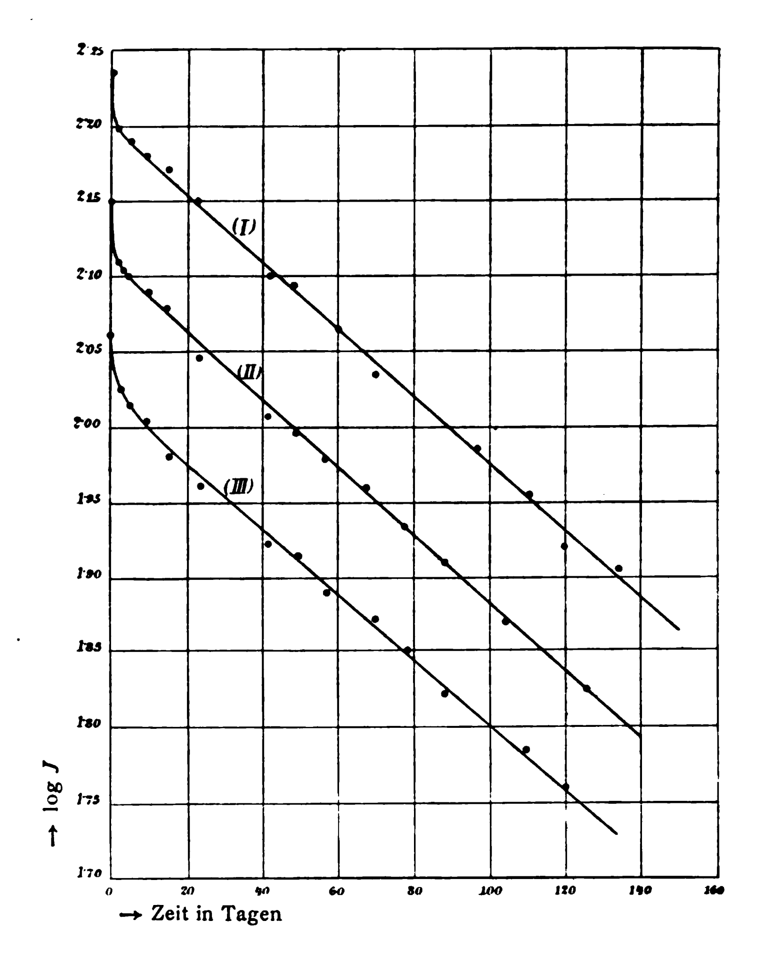


Fig. 1.

konstante von 138 Tagen resultieren, was genau mit der Periode des Poloniums übereinstimmt.

Die β-Aktivität vom RaE war wiederum gering, etwa 1·9 Volt/Min., jedenfalls viel zu gering, um die ziemlich bedeutende Anfangstörung allein erklären zu können.

4. Silberblech IV.

Aktiviert am 1. Dezember 1906 durch 100 Minuten. Ebenso wie bei den Palladiumpräparaten wurde in den ersten Stunden nach der Aktivierung ein Anstieg der Aktivität von 164·8 auf 167·5 Volt/Min. beobachtet. Der weitere Gang ist ganz analog wie bei den schon besprochenen Präparaten: beschleunigter Abfall durch etwa 16 Tage und hernach die normale Abklingung nach der Konstante des Poloniums (siehe Tabelle 4 und Fig. 2, Kurve IV).

Der spätere Verlauf entspricht, wie man sieht, einer Halbierungskonstante $HC = 138$ Tage, was genau mit der Periode des Poloniums übereinstimmt.

Tabelle 4.

(Silberblech IV.)

t	J	$\log J$	$\frac{d}{dt}\log J$	HC in Tagen
0	167·50	2·224	0·0075	40·1
1·6	162·93	2·212	0·0046$_5$	64·7
5·9	155·60	2·192		
12·6	151·00	2·179		
20·6	142·23	2·153		
33·8	133·66	2·126	0·0023	130·9
40·7	127·94	2·107		
46·6	125·90	2·100		
55·6	117·22	2·069		
66·7	111·43	2·047	0·0022$_9$	131·4
75·8	105·20	2·022		
85·7	100·00	2·000		
116·0	87·10	1·940	0·0018	172·0
135·9	81·66	1·912		

Aus der Kolumne $\frac{d}{dt}\log J$ ersieht man bei dieser wie bei den anderen Tabellen, wie sich der Abfall der Aktivität

allmählich verlangsamt. $\frac{d}{dt}\log J$ ist ja ein Maß der radioaktiven Konstante λ, denn wir wissen:

$$\lambda = -\frac{d}{dt}\log \text{nat}\, J = -\frac{\frac{d}{dt}\log J}{\log e} = \frac{\log \text{nat}\, 2}{HC}.$$

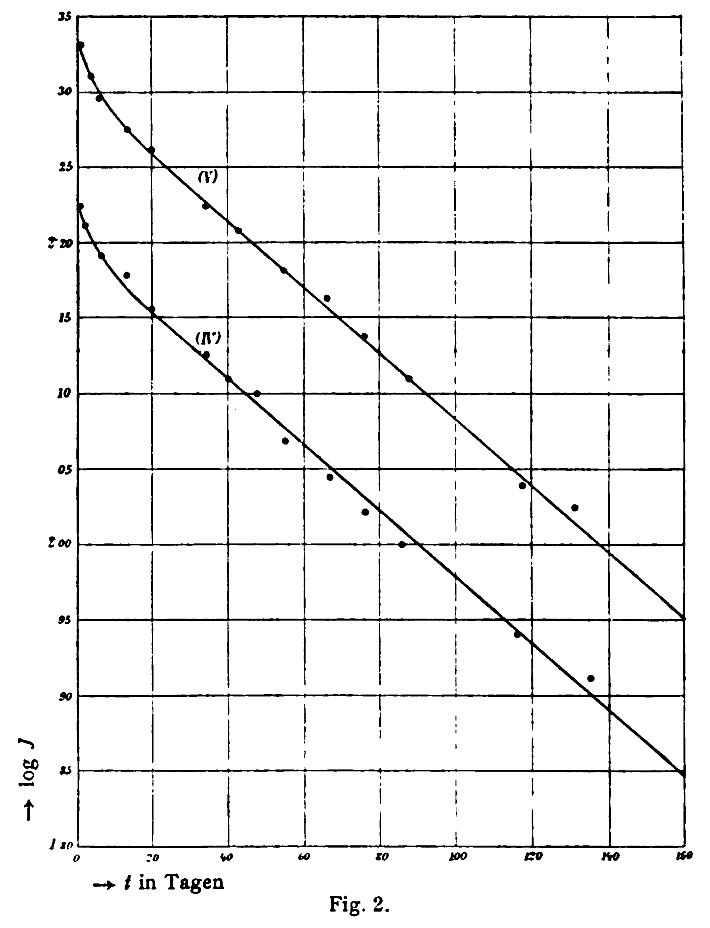


Fig. 2.

5. Silberblech V.

Aktiviert am 1. Dezember 1906 durch 100 Minuten. Zeigt ein ganz analoges Verhalten. Die anfänglich raschere Abklingung ist besonders deutlich ausgeprägt, wie man aus Fig. 2,

Kurve V, und Tabelle 5 entnimmt. Der lineare Teil der Kurve ergibt eine Halbierungszeit von 137 Tagen — entsprechend der Konstante des Poloniums.

Die β-Aktivität war bei beiden Präparaten ziemlich klein, 2·8, respektive 3·8 Volt/Min., also viel zu klein, als daß durch deren schnellere Abklingung die Anfangsstörung erklärt werden könnte.

Die Diskussion und Erklärungsversuche dieser beobachteten Störung werden an späterer Stelle gegeben.

Tabelle 5.

(Silberblech V.)

t	J	$\log J$	$\frac{d}{dt}\log J$	HC in Tagen
0	213·38	2·329	0·0050	60·2
4·0	203·70	2·309		
5·9	198·15	2·297	$0{\cdot}0032_8$	91·8
12·6	188·36	2·275		
19·7	182·80	2·262	$0{\cdot}0023_4$	128·6
33·8	167·88	2·225		
42·0	161·80	2·209		
53·9	152·06	2·182		
65·8	145·88	2·164	$0{\cdot}0021_8$	141·3
75·8	137·40	2·138		
86·9	129·42	2·112		
116·9	109·12	2·038		
131·0	105·93	2·025		

Auch in Tabelle 5 ist der Gang ein ähnlicher wie bei den anderen Präparaten. $\frac{d}{dt}\log J$ nimmt ab, bis es der Konstante des Poloniums entspricht.

6., 7., 8. Drei Silberbleche: VI, VII, VIII.

Aktiviert am 8. Jänner 1907 durch 90 Minuten. Der Anstieg der Aktivität in den ersten 6 Stunden nach der Aktivierung wurde wiederum beobachtet, und zwar:

bei Präparat VI von 95·99 Volt/Min. bis zu einem Maximum von 99·54 Volt/Min. etwa 6 Stunden später;

bei Präparat VII von 143·4 Volt/Min. bis 146·2 Volt/Min. etwa 6 Stunden später;

bei Präparat VIII von 163·9 Volt/Min. bis 166·4 Volt/Min. etwa 6 Stunden später.

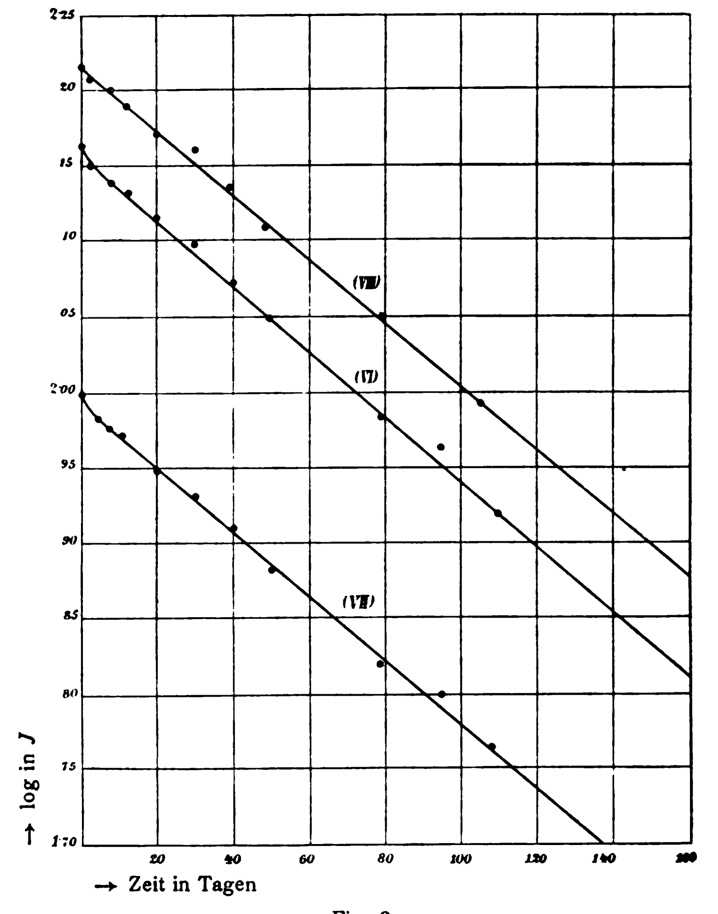


Fig. 3.

Die hierauf beginnende Abklingung ist in ihrem Verlaufe ganz analog wie bei den schon besprochenen Präparaten. Nur ist die Anfangsstörung weniger groß und daher mit dem

Elektroskop kaum einige Tage verfolgbar. Dann setzt sofort die rein exponentielle Abklingung ein (siehe Fig. 3 und die entsprechenden Tabellen 6, 7, 8).

Tabelle 6.

(Silberblech VI.)

t	J	$\log J$	$\frac{d}{dt} \log J$	HC in Tagen
0·2	146·2	2·165	0·00500	60·2
3·0	141·6	2·151		
8·0	138·4	2·141		
12·3	135·8	2·133		
20·0	130·9	2·117	0·00221	136·2
30·0	125·3	2·098		
40·2	118·8	2·075		
50·0	111·7	2·048		
79·0	96·4	1·984		
95·0	92·7	1·967	0·00207	145·0
110·0	83·2	1·920		

Tabelle 7.

(Silberblech VII.)

t	J	$\log J$	$\frac{d}{dt} \log J$	HC in Tagen
0·3	99·5	1·998	0·00378	79·6
4·0	96·4	1·984		
7·0	95·1	1·978		
11·0	94·0	1·973	$0\cdot0020_5$	146·9
20·0	88·9	1·949		
30·0	85·3	1·931		
40·2	80·9	1·908		
50·0	76·4	1·883	0·0022	186·8
79·1	66·1	1·820		
95·0	63·1	1·800	0·0019	158·4
108·0	58·2	1·765		

Tabelle 8.

(Silberblech VIII.)

t	J	$\log J$	$\frac{d}{dt}\log J$	HC in Tagen
0·2	166·3	2·221	0·0042$_9$	70·2
3·0	161·8	2·209		
8·0	158·5	2·200	0·0020$_4$	147·5
12·3	155·2	2·191		
20·0	148·9	2·173		
30·2	145·2	2·162		
39·3	136·8	2·136		
49·2	128·8	2·110	0·0019$_7$	152
79·2	112·5	2·051	0·0021$_8$	141·3
105·9	98·6	1·994		

Aus diesen Tabellen folgen genau dieselben Schlüsse, die bereits oben gezogen wurden. Nur war das Produkt, welches rascher abklingende Strahlung besitzt und die Anfangsstörung hervorruft, bei diesen drei Präparaten in geringerer Menge vorhanden.

Aus dem späteren, rein experimentellen Teil der Kurven resultieren die Halbierungskonstanten:

für Präparat VI ..... $HC = 139$ Tage,
» » VII ..... $HC = 142$ »
» » VIII..... $HC = 142$ »

was in guter Übereinstimmung mit der Halbierungskonstante des Poloniums sich befindet.

Die β-Strahlung war bei allen drei Präparaten eine äußerst minimale; sie betrug etwa je 0·4 Volt.

Analyse der mitgeteilten Versuchsergebnisse.

Bei der Besprechung der einzelnen Präparate wurde bereits bemerkt, daß der bei der Aktivierung in heißer Radiobleichloridlösung an der Metalloberfläche haftende aktive Beschlag zum

größten Teil aus RaF, also Polonium, besteht. Außerdem wurde stets auch eine β-Strahlung, herrührend von RaE, bemerkt, deren ionisierende Wirkung indes kaum 1 bis 2% der Gesamtstrahlung ausmachte.

Aus den im Vorigen mitgeteilten Abklingungskurven geht weiters hervor, daß anfangs eine ebenfalls rasch abklingende weichere Strahlung vorhanden sein muß, deren Halbierungszeit von der des RaE nicht wesentlich verschieden sein kann.

Um diese Schlüsse zu bekräftigen, habe ich bei einigen der mitgeteilten Versuchsreihen die vom Polonium herrührende Strahlung extrapoliert, um ein Bild von der Stärke und Abklingung der übergelagerten Strahlung zu bekommen. Zweckmäßig wählte ich solche Versuchsreihen, bei denen eben diese übergelagerte Aktivität am deutlichsten hervortritt.

St. Meyer und v. Schweidler[1] haben gelegentlich ihrer Untersuchungen über die Absorption der Strahlung von Radiumrestaktivität gefunden, daß bei den Restaktivitäten außer der α-Strahlung des RaF und der β-Strahlung des RaE_2 noch eine weiche Reststrahlung vorhanden war, deren Halbierungsdicke durch Extrapolation zu $1\cdot5.10^{-4}\,cm$ bestimmt wurde. Ich vermutete, daß bei meinen Radiobleipräparaten auch diese Reststrahlung die Anfangsstörung verursache, kam aber, wie im zweiten Teile dieser Untersuchung gezeigt werden wird, zu nicht direkt identifizierenden Schlußfolgerungen.

Bei meinen Abklingungsmessungen verfolgte ich eine ganz analoge Methode wie Meyer und v. Schweidler bei ihren Absorptionsversuchen. Ich extrapolierte die Strahlung des Poloniums J_{Po} und die β-Strahlung von der Gesamtstrahlung J, um ein Bild von der übergelagerten Reststrahlung

$$J_R = J - J_{Po} - J_\beta$$

zu erhalten.

Die Resultate dieser graphischen Extrapolation seien nun in folgender Tabelle 9 mitgeteilt.

---

[1] St. Meyer und E. v. Schweidler, Diese Sitzungsber., 1906, p. 708 bis 709 und p. 725 bis 727.

Die Werte $\log J$ und $\log J_{P_0}$ sind aus einer nach Tabelle 5 sorgfältig vergrößerten und ausgeglichenen Kurve auf graphischem Wege gewonnen.

Tabelle 9.

(Silberblech V.)

t	$\log J$	J	$\log J_{P_0}$	J_{P_1}	J_β	Reststrahlung J_R $(J-J_\beta-J_\beta)$	$\log J_R$
0	2·3292	213·38	2·2990	199·07	3·80	10·51	1·0216
2	2·3183	208·10	2·2947	197·10	2·88	8·12	0·9096
4	2·3081	203·30	2·2904	195·16	2·18	5·96	0·7753
6	2·2997	199·40	2·2861	193·24	1·65	4·51	0·6548
8	2·2920	195·92	2·2818	191·34	1·25	3·33	0·5224
10	2·2848	192·68	2·2775	189·45	0·95	2·28	0·3579
12	2·2784	189·83	2·2732	187·60	0·72	1·51	0·1790

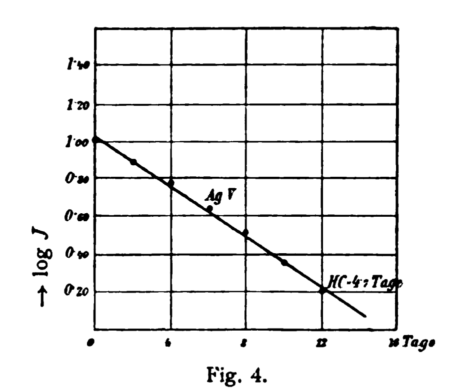


Fig. 4.

Logarithmische Abklingung der Reststrahlung.

Wie man sieht, macht die übergelagerte Reststrahlung $J_R = J - J_{P_0} - J_\beta$ etwa 5 bis 7% der Gesamtstrahlung aus. Daß die extrapolierten Abklingungskurven dieser Reststrahlung sehr exakte Abfallskonstanten liefern würden, war da von vorn-

herein nicht zu erwarten. Ein ganz geringer Beobachtungsfehler bei der Anfangsmessung von J (für $t = 0$) von etwa 0·5% würde den Betrag der Reststrahlung in Tabelle 9 um 1·1 Volt/Min. beeinflussen, was den Betrag von J_R bereits um 10% verändert.

Bei der mitgeteilten Versuchsreihe Ag V waren die Verhältnisse für die Extrapolation der Strahlung des Poloniums besonders günstig. Versucht man das gleiche mit den anderen Versuchsreihen, bei denen der Betrag der Reststrahlung geringer ist, so kommt man zu wenig befriedigenden Resultaten. Die logarithmische Abklingungskurve beim Präparat Ag V ergäbe eine Halbierungskonstante von 4·7 Tagen für die Reststrahlung. Bei den anderen Präparaten, bei denen letztere in viel geringerem Betrage vorhanden war, machen sich die Fehlerquellen entsprechend stärker bemerkbar, so daß man nur schätzungsweise Halbierungskonstanten von 2 bis 4 Tagen für J_R daraus folgern kann.

Ich möchte daher aus den bisher mitgeteilten Versuchen nur etwa folgende Schlüsse ziehen:

1. Die in einer Lösung gereinigten Radiobleichlorids aktivierten Metalle zeigen in ihrer Abklingung alle einen analogen Verlauf (siehe Kurven I bis VIII in Fig. 1 bis 3).

2. Nach 2 bis 3 Wochen erfolgt der Abfall der Gesamtaktivität genau nach der Konstante des Poloniums. Vorher ist er rascher; dies führt zu dem Schlusse, daß in dem aktiven Beschlag außer dem RaF ein rascher abklingendes Produkt vorhanden ist. Das nächstliegende ist, anzunehmen, es rühre diese Anfangsstörung von mitabgeschiedenem RaE_2 her, das nach Meyer und v. Schweidler bloß β-strahlend ist und eine Halbierungszeit von 4·8 Tagen besitzt. Wie meine Messungen ergaben, ist jedoch diese β-Aktivität allein viel zu gering, um diese Erklärung zu rechtfertigen.

3. Meine Analyse zeigt, daß außer der α-Aktivität des Poloniums J_{P_0} und der β-Aktivität J_β des RaE_2 noch eine Restaktivität J_R bei den untersuchten Präparaten vorhanden war. Durch Extrapolation $J_R = J - J_{P_0} - J_\beta$ (siehe p. 1302) wurde konstatiert, daß die Abklingungsgeschwindigkeit von J_R mit der des β-strahlenden RaE_2 fast genau übereinstimmt.

Es erübrigen nun dreierlei Annahmen: Entweder, daß RaE_2 auch α-Strahlen aussendet, deren Geschwindigkeit jedoch nur zum Teil jene Schwelle übersteigt, von der an eine Ionisierung der Luft möglich ist (denn wäre die Geschwindigkeit dieser α-Partikel eine größere, so würde J_R einen weit größeren Prozentsatz der Gesamtstrahlung ausmachen).

Zweitens könnte man annehmen, es sei zwischen RaE und RaF noch ein weiche Strahlen aussendendes Zwischenprodukt, das ähnliche Abklingungsgeschwindigkeit besäße, wie RaE_2.

Drittens wäre die Annahme möglich, daß die beobachtete Reststrahlung eine von den β-Strahlen des RaE_2 erzeugte Sekundärstrahlung ist.

Spätere, im II. Abschnitte mitgeteilte Versuche sollen über diese drei Annahmen entscheiden.

Am Schlusse des ersten Teiles will ich noch zeigen, daß die allgemeine Annahme, daß die Reststrahlung vom RaE_2 herrühre, sei es nun als wirkliche α-Strahlung oder als Sekundärstrahlung, zu Kurven führt, die mit den experimentellen in vollkommener Weise übereinstimmen.

Vergleich der theoretischen mit den experimentellen Kurven.

Betrachten wir die Abklingung eines Gemisches zweier radioaktiver Substanzen, welche beide weiche Strahlen aussenden und Halbierungszeiten von 5, beziehungsweise 138 Tagen besitzen; mit dieser Annahme werden wir den wirklichen Verhältnissen ziemlich nahe kommen, von der geringen β-Strahlung können wir ja absehen.

Also ich setze voraus, es sei ein Gemisch von RaE_2 ($HC = 5$ Tage) und RaF ($HC = 138$ Tage) gegeben und zur Zeit $t = 0$ verhielten sich die Intensitäten ihrer Strahlungen wie 100 : 900. In Tabelle 11 ist dann der Verlauf der Abklingung berechnet. Es bedeuten hierin:

J_1 die Strahlung von RaE_2,
J_2 die Strahlung von RaF,
J_2' die Strahlung des vom RaE_2 nacherzeugten RaF,
$J = J_1 + J_2 + J_2'$ die gesamte Strahlung.

Tabelle 11.

t	J_1	J_2	J_2'	(J_2+J_2')	$J=J_1+J_2+J_2'$	$\log J$	$\frac{d}{dt}\log J$	HC in Tagen
0	100·0	900·0	0·0	900·0	1000·0	3·0000	0·00636	47·3
5	50·0	877·5	1·8	879·3	929·3	2·9682	0·00442	68·1
10	25·0	855·6	2·7	858·3	883·3	2·9461	0·00334	90·1
15	12·5	834·2	3·2	837·4	849·9	2·9294	0·00284	106·0
20	6·25	813·3	3·2	816·5	822·7	2·9152	0·00250	120·4
25	3·13	793·0	3·2	796·2	799·3	2·9027	0·00234	128·6
30	1·56	773·2	3·2	776·4	778·0	2·8910	0·00225	133·8
40	0·39	735·3	3·1	738·4	738·8	2·8685	0·00219	137·6
50	0·10	699·3	2·95	702·3	702·4	2·8466		
60	0·02	665·0	2·8	667·8	667·8	2·8247		
70	—	632·4	2·7	635·1	635·1	2·8028	0·00218$_5$	137·8
80	—	601·4	2·5	603·9	603·9	2·7810		
90	—	571·9	2·4	574·3	574·3	2·7591	0·00218	138·1
100	—	543·9	2·3	546·2	546·2	2·7374		

In Fig. 5 ist die logarithmische Abklingung graphisch dargestellt.

Die hier gemachte Annahme, daß im Anfange 10% der Strahlung auf die Strahlung von RaE_2 entfallen, entspricht etwa den Verhältnissen bei den Präparaten III, IV und V. Wie

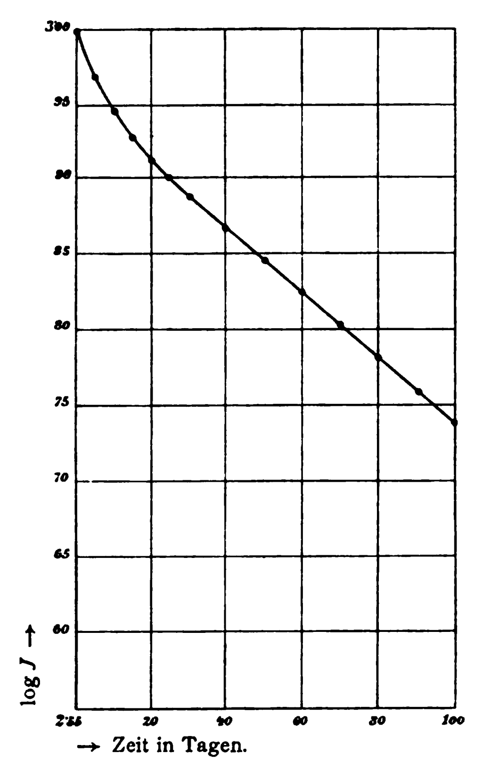


Fig. 5. **Theoretische Kurve.**

man sieht, ähneln die experimentellen Abklingungskurven der theoretischen sehr stark.

Bei den anderen Präparaten, wo die übergelagerte Strahlung perzentuell geringer ist, waren die Kurven anfangs nicht so steil. Auch diesen Fall können wir aus unserer Tabelle sehr gut darstellen, wenn wir etwa bei $t = 10$ beginnen, wo die Strahlung J_1 nur 3% der Gesamtstrahlung ausmacht, d. h. die Kurve erst bei $t = 10$ beginnt. Die Kurve stimmt dann z. B. mit den experimentellen Kurven VI, VII, VIII vollständig überein.

Man ersieht hieraus, daß die vorläufige Annahme, daß die restliche Strahlung rascher Abklingung dem RaE_2 zugehöre, zu Abklingungskurven führt, welche mit den experimentell gefundenen in vollkommen befriedigender Weise übereinstimmen.

Zweiter Teil.

Im ersten Teil habe ich bei in Radiobleichloridlösung aktivierten Metallblechen das Vorhandensein einer Reststrahlung J_R außer der β-Strahlung von RaE_2 und der α-Strahlung des Poloniums festgestellt und konnte nach dem damaligen Stande der Untersuchung keine definitive Entscheidung zwischen den drei möglichen Erklärungen jener rasch abklingenden Reststrahlung treffen.

Die Versuche wurden daher nach anderen Gesichtspunkten fortgesetzt und haben, wie ich hoffe, die so komplizierten Verhältnisse bei der Strahlung des Radiobleis zum größten Teil gelichtet.

Das leitende Prinzip hiebei war, auf irgend eine Weise ein Präparat mit sehr viel RaE und wenig RaF herzustellen und mit einem präzisen Instrumente die Abklingung zu verfolgen, um aus der Gestalt der Kurven zu entscheiden, ob zwischen RaE_2 und RaF noch ein weiteres Zwischenprodukt vorhanden ist. — Ferner untersuchte ich, ob die durch Elektrolyse einer Radiobleiacetatlösung mit RaE und RaF überzogenen Bleche dasselbe Verhalten zeigen, wie die durch Eintauchen in heiße Radiobleichloridlösung aktivierten Metalle.

Zur Messung der Aktivität wurde ein mit Mikroskopablesung versehenes Exner'sches Blattelektrometer benützt. Die Vergrößerung war eine zwölfmalige. Einem Teilstrich des Okularmikrometers entsprach durchschnittlich 0·9 Volt. Die Eichung geschah nach dem von H. W. Schmidt[1] angegebenen

---

[1] H. W. Schmidt, Phys. Zeitschr., 1906, p. 157.

Verfahren mittels einer Uraneinheit. Nach Adjustierung des Elektrometers mit neuen Blättchen zeigten sich noch einige Zeit Schwankungen in der Empfindlichkeit, die aber später ganz minimal wurden (kaum 1 %) und schließlich ganz verschwanden. Die Schmidt'sche relative Eichungsmethode gestattete mit Leichtigkeit, auch die minimalste Empfindlichkeitsänderung noch zu konstatieren. Mit den Versuchen wurde erst begonnen, als das Elektrometer keine Empfindlichkeitsänderung mehr aufwies und vorsichtshalber wurde vor und nach jeder Messungsreihe eine Kontrolle der Empfindlichkeit mit der Uraneinheit ausgeführt. — Eine ruckweise Bewegung des Blättchens kam im verwendeten Meßbereich nicht vor.

Elektrolytische Versuche.

Durch Elektrolyse einer Radiobleiacetatlösung, derselben, welche Meyer und v. Schweidler[1] bei ihren Versuchen benützten, versuchte ich, auf Platinblechen möglichst viel Ra*E* mit wenig Ra*F* niederzuschlagen. Zu diesem Behufe wollte ich die Lösung vorher möglichst vom Ra*F* freimachen, elektrolysierte sie daher durch mehrere Wochen mit einer Stromdichte von ungefähr $4 \cdot 10^{-6}$ Amp./cm^2, bei welcher wohl das Ra*F*, nicht aber das Ra*E* abgeschieden wird (siehe Meyer und v. Schweidler l. c.). Dieses Verfahren erwies sich jedoch für unsere Zwecke leider unzureichend. Trotz mehrwöchentlicher vorhergegangener Elektrolyse war in der Lösung des Radiobleiacetats immer noch genug Ra*F* vorhanden, so daß die Strahlung der Platinkathoden zum größten Teil aus Ra*F* bestand. Auch eine weitere Verlängerung der Dauer der Elektrolyse hatte keinen Erfolg; offenbar war die Lösung zu aktiv, so daß das durch Elektrolyse mit der geringen Stromdichte abgeschiedene Ra*F* fast ganz durch die Nacherzeugung aus dem vorhandenen Ra*E* ersetzt wurde.

Die erhaltenen Präparate zeigen etwa das folgende Verhalten: 3 bis $4^1/_2$ % der Strahlung ist der anfängliche Betrag der in Frage stehenden Reststrahlung. Die β-Strahlung ist kaum

---

[1] Meyer und v. Schweidler, diese Sitzungsber., 1906, p. 698.

meßbar (etwa 0·3 %) und 96 % entfällt auf die Strahlung des Ra*F*.

Die Mengenverhältnisse sind also bei diesen Präparaten keineswegs günstiger für die Entscheidung unserer Fragen als bei den in der heißen Lösung aktivierten Blechen. Die Abklingungskurven haben genau dieselbe Gestalt wie bei den letzteren, nur war die anfängliche raschere Abklingung etwas weniger ausgeprägt, also zur Extrapolation der Reststrahlung noch weniger geeignet.

Versuche mit nach der Aktivierung ausgeglühten Pd-Blechen.

Da die eben dargestellten Versuche, auf elektrolytischem Wege Präparate mit viel Ra*E* und wenig Ra*F* herzustellen, mißlungen waren, wendete ich ein anderes Mittel an, um die Präparate mit Ra*E* anzureichern. Ich glühte die in einer Radiobleichloridlösung sehr stark aktivierten Bleche.

Bekanntlich wird beim Erhitzen Ra*F* eher flüchtig als Ra*E*. Als »Sublimationstemperatur« wird für Ra*F* etwa 1000° angegeben. Sehr richtig weist H. W. Schmidt[1] darauf hin, daß von einem Sublimationspunkt im strengen Sinne des Wortes bei den radioaktiven Substanzen nicht gesprochen werden kann. Trotz längerer Erwärmung eines dünnen Bleches auf 1000° gelingt es nie, dasselbe vollständig von Ra*F* freizumachen; ich beobachtete bei auf elektrolytischem Wege nur mit Polonium beschlagenen Blechen, daß selbst nach Erhitzen bis zur Weißglut die Aktivität nicht ganz verschwand.

Für den Zweck, den ich im Auge hatte, genügte indes dieses Trennungsverfahren vollkommen. Nachdem die Palladiumbleche in einer Radiobleichloridlösung so stark aktiviert worden waren, daß ihre Aktivität mit dem gegebenen Blattelektrometer nicht mehr gemessen werden konnte, erhielt ich sie etwa 5 Minuten in gleichmäßiger Rotglut. Dadurch wurde ein großer Teil des Ra*F* verflüchtigt, so daß die Gesamtaktivität zu einem meßbaren Betrage sank.

---

[1] H. W. Schmidt, Zeitschr. für Radioakt. und Elektronik. *4*, Nr. 14.

Nach dem Glühen machte die β-Aktivität des RaE etwa 30 bis 40% der Gesamtstrahlung aus, die übrigen 60 bis 70% waren α-Aktivität und rührten von dem nicht verflüchtigten Teile des Poloniums her.

Bei einem so großen Anteile von RaE mußten die Kurven der α-Strahlung einen deutlichen Anstieg zeigen und die darauffolgende Abklingung mußte die Entscheidung ergeben, ob zwischen RaE_2 und RaF noch ein α-strahlendes Zwischenprodukt vorhanden wäre.

Vorerst seien die an vier aktivierten und nachher geglühten Pd-Blechen ausgeführten Abklingungsmessungen tabellarisch mitgeteilt.

In den Tabellen bedeuten i_α und i_β die gemessene Intensität der α-, respektive β-Strahlung. Die Zeit t ist in Tagen gemessen. HC_α bedeutet die beim Abfall der α-Aktivität beobachtete Halbierungskonstante.

Tabelle 12.

(Präparat Pd 1.)

t	log i_β	log i_α	HC_α
0·7	0·9736	1·4148	—
3·7	0·8222	1·4700	—
7·8	0·5635	1·4842	—
12·9	0·2201	1·4906	—
17·7	0·970 —1	1·4867	
20·8	0·845 —1	—	
23·8	—	1·4682	146·6
25·7	0·591 —1	—	
30·8	0·770 —2	1·4598	143·3
40·7	—	1·4390	
46·8	—	1·4160	123·1
60·7	—	1·3820	171·0
78·7	—	1·3504	129·1
95·0	—	1·3124	

Tabelle 13.

(Präparat Pd 2.)

t	$\log i_\beta$	$\log i_\alpha$	HC_α
0·2	1·1810	1·4498	—
1·05	1·1189	1·4942	—
4·0	0·9380	1·5292	—
6·0	0·8370	1·5547	—
8·0	0·7127	1·5662	—
14·0	0·3430	—	—
20·0	0·0086	1·5809	—
26·0	0·7202 —1	1·5780	158·0
40·0	—	1·5513	148·0
49·0	—	1·5330	120·4
57·0	—	1·5131	138·0
71·0	—	1·4826	128·0
88·9	—	1·4405	

Tabelle 14.

(Präparat Pd 3.)

t	$\log i_\beta$	$\log i_\alpha$	HC_α
0	0·8325	1·4829	—
0·9	0·7738	1·4686	—
4·9	0·5441	1·4826	—
5·9	0·4829	1·4933	—
13·9	0·0170	1·4953	—
19·2	0·7510 —1	1·4852	117·9
23·0	0·560 —1	1·4755	
27·9	0·345 —1	1·4608	144·8
41·9	—	1·4362	135·0
61·9	—	1·3916	
72·0	—	1·3740	123·7
82·0	—	1·3427	

Tabelle 15.

(Präparat Pd 4.)

t	$\log i_\beta$	$\log i_\alpha$	HC_α
0·7	0·9494	1·3442	—
2·8	0·8189	1·3707	—
3·7	0·7752	—	—
7·8	0·5366	—	—
12·7	0·1959	1·3980	—
15·7	0·0420	1·3988	—
20·8	0·8261 —1	1·3925	—
23·8	—	1·3971	—
25·7	0·6035 —1	1·3942	
31·7	0·2753 —1	1·3849	
38·7	—	1·3731	139·5 (25·7 bis 46·7)
40·7	—	1·3674	
46·7	—	1·3489	158·0 (46·7 bis 60·7)
60·7	—	1 3222	144·5 (60·7 bis 78·7)
78·7	—	1·2847	127·0 (78·7 bis 95·7)
95·7	—	1·2439	

Die logarithmischen Abklingungskurven der β- und α-Strahlung sind in den Figuren 6 und 7 verzeichnet.

Die Kurven der β-Strahlung.

Um Überdeckung zu vermeiden, ist Kurve 1 (Fig. 6) um 0·40 nach unten verschoben.

Nach St. Meyer und v. Schweidler[1] ist RaE kein einheitlicher Körper, sondern besteht aus:

---

[1] Meyer und v. Schweidler, Diese Sitzungsber., 1906, p. 711.

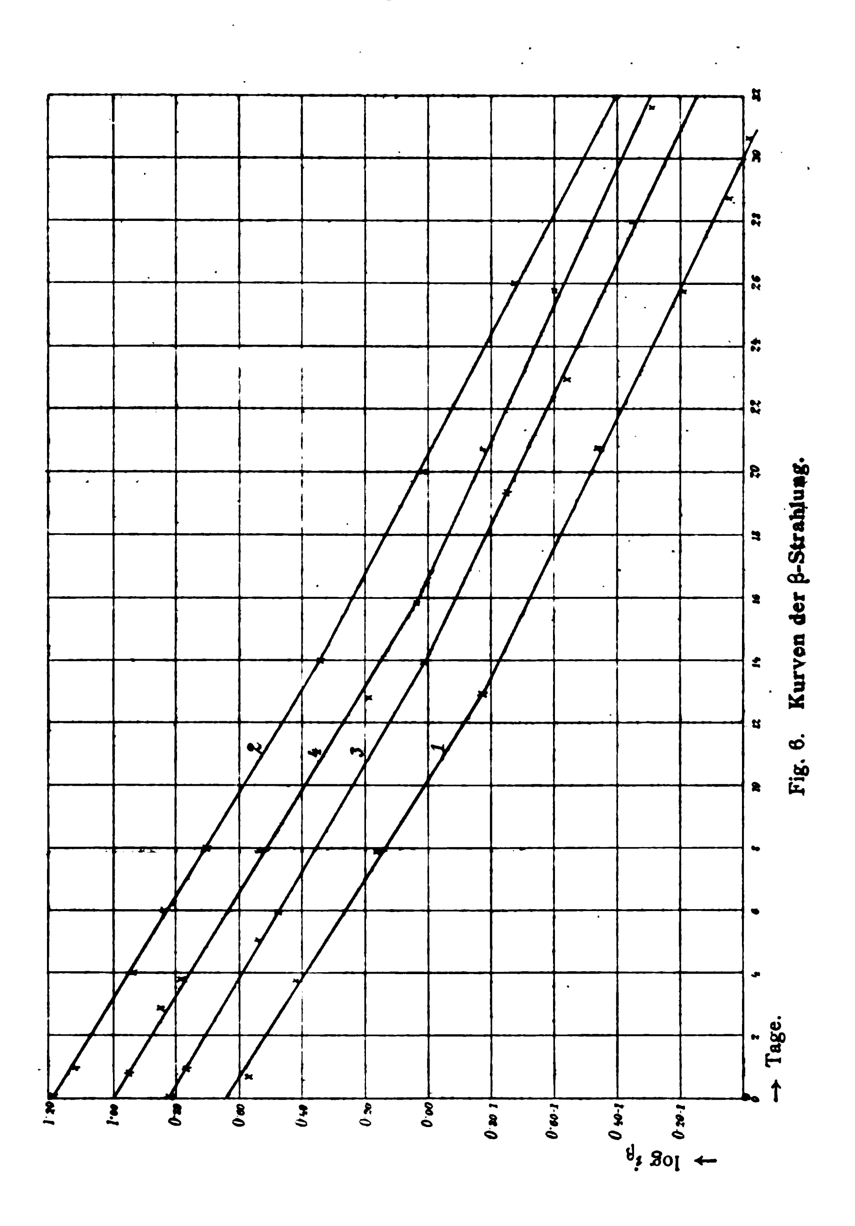


Fig. 6. Kurven der β-Strahlung.

RaE_1 mit der Halbierungskonstante 6 bis 6·5 Tage, strahlenlos, bei Rotglut flüchtig;

RaE_2 mit der Halbierungskonstante 4·8 Tage, β-strahlend, bei Rotglut nicht flüchtig.

Von vornherein wäre also zu erwarten gewesen, daß unsere geglühten Palladiumbleche in der Abklingung ihrer β-Strahlung einfach die Halbierungskonstante von $\mathrm{Ra}E_2$ ($HC = 4\cdot 8$ Tage) zeigen würden, da ja alles $\mathrm{Ra}E_1$ durch das Glühen verjagt sein müßte.

Wie ein Blick auf die logarithmischen β-Strahlungskurven in Fig. 6 lehrt, ist dies jedoch nicht der Fall. Meyer und v. Schweidler haben ihre Angabe auf Platinbleche bezogen, welche auf elektrolytischem Wege mit $\mathrm{Ra}E$ beschlagen worden waren. Meine Präparate waren Palladiumbleche, durch Eintauchen aktiviert. Möglicherweise sind die durch eine solche »Ionenaktivierung« auf dem Metalle niedergeschlagenen radioaktiven Substanzen überhaupt schwerer zu verflüchtigen, auch mag die Sublimationstemperatur für die Pd-Präparate eine andere sein als bei Pt.

Endlich sei noch auf die Angabe H. W. Schmidt's (siehe p. 1309) verwiesen, wonach von einem exakten Sublimationspunkte bei radioaktiven Stoffen überhaupt nicht gesprochen werden kann.

Meine β-Kurven zeigen also durchaus eine Verflachung etwa vom 15. Tage an. Aus den Kurven ergeben sich folgende Halbierungskonstanten:

	In Tagen			
	Intervall	*HC*	Intervall	*HC*
Präparat Pd 1......	0—13	4·70	13—31	6·26
» Pd 2......	0—14	4·95	14—26	5·8
» Pd 3......	0—14	5·13	14—28	6·2
» Pd 4......	0—16	4·97	16—32	6·5

Diese Erscheinung läßt sich, wie Meyer und v. Schweidler zeigten, in einwandfreier Weise nur durch Annahme zweier sukzessiver Produkte $\mathrm{Ra}E_1$ und $\mathrm{Ra}E_2$ erklären mit den Halbierungszeiten 4·9, respektive 6·2 Tagen, von welchen E_1 strahlenlos und E_2 β-strahlend ist.

Die Kurven der α-Strahlung.

Die Kurven 3 und 4 sind um 0·20, respektive 0·50 nach oben verschoben, um die Figur übersichtlicher zu gestalten.

Eine Entscheidung der Frage, ob zwischen RaE_2 und RaF noch ein weiteres intermediäres Produkt mit α-Strahlung sich befinde,. konnte nur durch exakte Abklingungsmessung einer durch Umwandlung des RaE_2 gewonnenen α-Aktivität getroffen werden.

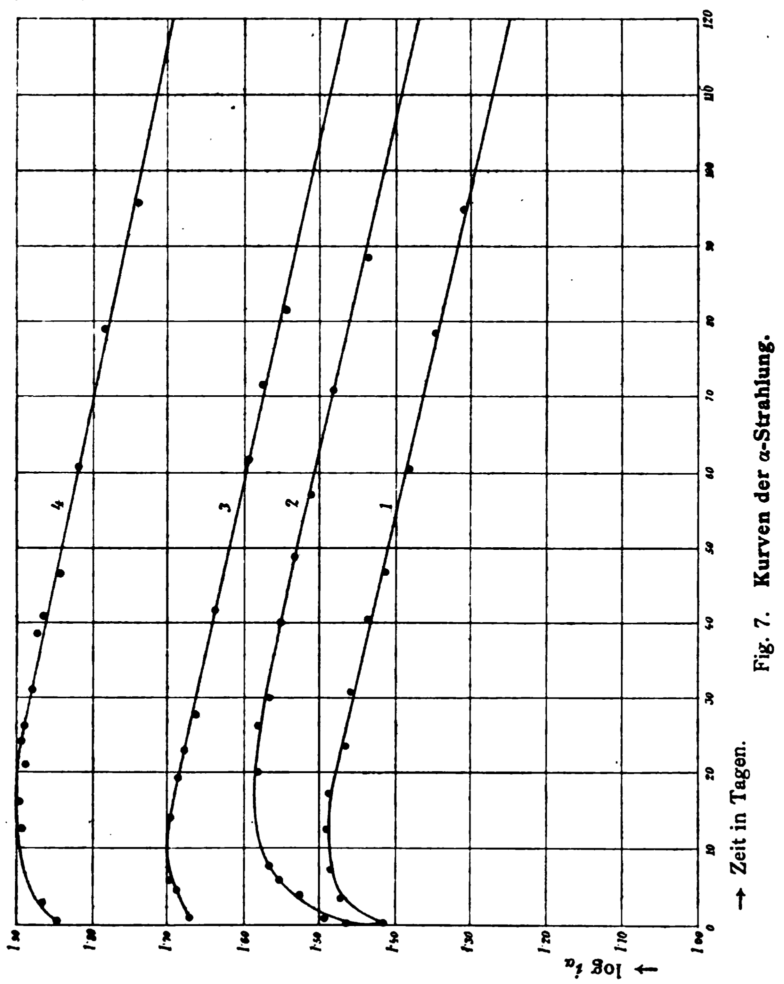


Fig. 7. Kurven der α-Strahlung.

Die Präparate Pd 1 bis 4 zeigen, wie aus Fig. 7 ersichtlich, durchwegs einen bedeutenden Anstieg, herrührend von der Umwandlung des β-strahlenden RaE_2 in einen α-Strahler. Dieser Anstieg ist natürlich am deutlichsten bei jenem Präparate, welches am meisten RaE enthielt, also bei Präparat Pd 2, und

am flachsten bei Präparat Pd 3, das am wenigsten Ra*E* enthielt (siehe die Tabellen 12 bis 15).

Der Anstieg dauerte durchschnittlich bis zum 15. Tage. Die nun folgende Abklingung ist von entscheidender Bedeutung. Erfolgt sie merklich rascher als es der Halbierungszeit des Ra*F* entspricht, so ist ein Zwischenprodukt, auf dessen Abklingungsgeschwindigkeit man durch Extrapolation der Strahlung des Ra*F* schließen könnte, im anderen Falle jedoch nicht.

Die Betrachtung der Kurven Fig. 7 gibt die Entscheidung. Wie man sieht, liegen die beobachteten Werte nach Erreichung des jeweiligen Maximums fast genau auf einer Geraden. Unmittelbar nach dem Maximum ist keinerlei Abfallsbeschleunigung zu merken.

Die logarithmische Abklingung ist also, wie man ersieht, nicht nur später, sondern auch unmittelbar nach Passierung des Maximums eine lineare, d. h. nach vollzogener vollständiger Umwandlung des RaE_2 ist nur mehr ein α-strahlender Bestandteil in den Präparaten vorhanden.

Aus den Kurven ergeben sich die Halbierungskonstanten

für Pd 1......	$HC =$	134·5 Tage,
» Pd 2		136·5 »
» Pd 3......		140·0 »
» Pd 4......		142·4 »
im Mittel...	$HC =$	138·2 Tage,

welche Werte in Anbetracht der relativ kurzen Dauer der Beobachtungen (85 bis 95 Tage) in befriedigender Weise mit der Konstante von Ra*F* übereinstimmen.

Hiemit ist bewiesen, daß zwischen RaE_2 und dem α-strahlenden Ra*F* kein weiteres α-strahlendes Zwischenprodukt rascher Umwandlungsgeschwindigkeit existiert.

Es erübrigt demnach noch eine Entscheidung zwischen der p. 1304 angeführten ersten und dritten Erklärungsmöglichkeit für die Reststrahlung, nämlich:

a) Annahme, daß RaE_2 komplexe α-Strahlen aussende, deren Geschwindigkeit nur zum Teil die Ionisationsschwelle übersteigt.

b) Annahme einer von der β-Strahlung des RaE_2 erzeugten starken Sekundärstrahlung.

Unsere im ersten Teile besprochene Reststrahlung kann unmöglich dem RaE_2 als gewöhnliche α-Strahlung zugeschrieben werden. Denn es müßte in diesem Falle diese Strahlung einen viel größeren Prozentsatz der Gesamtstrahlung ausmachen, da die Umwandlungsgeschwindigkeit von RaE_2 gegen RaF groß ist. Also bliebe als Ausweg nur die Annahme *a)* übrig.

Die experimentellen Resultate an sich geben uns keine Möglichkeit einer exakten Entscheidung zwischen der Annahme *a)* und *b)*; denn die beobachteten Phänomene stimmen ebenso gut zu einer schwachen α-Strahlung als zu einer Sekundärstrahlung von RaE_2. Im allgemeinen war die beobachtete Reststrahlung bei jenen Präparaten am stärksten, die eine starke β-Strahlung aufwiesen (siehe erster Teil, Tabellen 1 bis 8).

Damit stimmt auch die Tatsache überein, daß bei dem absteigenden Aste der α-Kurven, Fig. 7, eine Beschleunigung des Abfalls nicht mehr zu bemerken war, da in dem Zeitpunkte, wo der Abfall beginnt, die β-Strahlung und somit auch die damit verbundene Reststrahlung bereits zu einem Betrage herabgesunken war, wo ihr Einfluß von unseren Instrumenten nicht mehr bemerkt werden konnte. Es hat sich eben in dieser Zeit bereits radioaktives Gleichgewicht hergestellt, wogegen ausdrücklich zu bemerken ist, daß bei der Ionenaktivierung, d. h. bei der Aktivierung durch Eintauchen in die Lösung die radioaktiven Substanzen nicht im Gleichgewichtszustande, sondern in ganz variablen Mengenverhältnissen abgeschieden werden; von welchen Umständen letztere abhängen, war bisher nicht näher ausfindig zu machen.

Bei dem jetzigen Stande der experimentellen Hilfsmittel wird eine Entscheidung zwischen der Auffassung der Reststrahlung *a)* als schwach ionisierende α-Strahlung oder *b)* als Sekundärstrahlung kaum durch das Experiment erzwungen werden können.

Am geeignetsten erschiene eine Untersuchung der Präparate nach der Bragg'schen Methode. Allein es ist von vornherein zu

erwarten, daß, wenn unsere Reststrahlung wirklich eine schwache α-Strahlung ist, ihre Range abnorm klein und wegen der unverhältnismäßig großen übergelagerten Ionisationswirkung des Ra*F* kaum mit Sicherheit zu konstatieren sein wird. Und die Herstellung eines vollständig von Ra*F* freien Ra*E*-Präparates ist nicht möglich.

Eine weitere experimentelle Entscheidungsmöglichkeit wäre die magnetische Ablenkungsmethode. Allein auch hier sind die Schwierigkeiten enorm. Denn die Sekundärstrahlungsphänomene sind so kompliziert und mannigfacher Art, daß sie in manchen Fällen von einer primären β-Strahlung kaum unterschieden werden können, und die Genauigkeit der magnetischen Ablenkungsmethode bleibt überdies noch weit hinter jener der Bragg'schen Methode zurück.

Ich lasse demnach die Entscheidung zwischen der Auffassung der Reststrahlung als langsame α-Strahlung oder als Sekundäreffekt vorläufig offen und begnüge mich damit, festgestellt zu haben, daß sie von Ra*E* herrühren muß, nicht aber von einem zwischen Ra*E* und Ra*F* liegenden unbekannten α-strahlenden Zwischenprodukte.

Anhang.

Das Verhalten der geglühten und ungeglühten Präparate in den ersten Stunden nach der Aktivierung.

Wie schon in den Versuchsresultaten an mehreren Stellen mitgeteilt wurde, zeigten sich auch rasche Änderungen der Aktivität der untersuchten Präparate in den ersten Stunden der Aktivierung.

Die ungeglühten Präparate zeigen ausnahmslos einen Anstieg der Aktivität in den ersten 6 Stunden um 3 bis 5% des Wertes der anfänglichen Gesamtstrahlung. Der darauffolgende Abfall war merklich rascher als es den Konstanten von Ra*E* oder Ra*F* entspräche.

Bei einigen geglühten Präparaten ward in den ersten Stunden ein rascher Abfall um 2 bis 6% beobachtet.

Eine Erklärung für diese Erscheinungen kann zur Zeit noch nicht gegeben werden.

Man könnte daran denken, diese Erscheinungen durch Abscheidung von RaB mit wenig RaC zu erklären; bei den geglühten Präparaten wäre dann alles RaB sublimiert und nur eine Spur von RaC übrig, während bei den ungeglühten das vorhandene RaB einen raschen Anstieg erzeugen würde.

Doch liegen noch keinerlei quantitative exakte Daten vor, die eine solche Deutung stützen würden, und es ist ebensogut möglich diese Erscheinungen auf irgendwelche molekulare Änderungen (Diffusionserscheinungen) oder Verunreinigung durch geringe Spuren anderer radioaktiver Substanzen zurückzuführen, wenngleich letztere Annahme bei Anwendung eines wiederholt fraktionierten gereinigten Radiobleichlorids unwahrscheinlich klingt.

Der Emanationsgehalt der Radiobleichloridlösung war, wie eine nachfolgende Prüfung nach der Emanationsmethode ergab, sehr gering (etwa $^1/_{50}$ von dem der Gasteiner Thermen).

Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse der ganzen Untersuchung.

Im ersten Teile wurde gezeigt:

1. Bei der Aktivierung in heißer Radiobleichloridlösung werden die aktiven Substanzen in von nicht näher kontrollierbaren Umständen abhängenden, oft erheblich variierenden Mengenverhältnissen, durchaus nicht im radioaktiven Gleichgewichte abgeschieden.

2. Die Abklingung der Gesamtstrahlung der Präparate erfolgt nach zwei bis drei Wochen nach der Konstante von RaF, vorher ist sie rascher. Doch ist die beobachtete β-Strahlung von RaE_2 allein zu gering, um daraus die anfängliche Beschleunigung der Abklingung restlos zu erklären.

3. Durch graphische Extrapolation wurde gezeigt, daß eine die Anfangsstörung verursachende, wenig durchdringende Reststrahlung vorhanden ist, die in ihrer Abklingung ziemlich genau die Konstante von RaE befolgt, somit entweder von

RaE oder einem nachfolgenden, zwischen RaE und RaF liegenden radioaktiven Produkte herrühren muß.

4. Die theoretische Annahme, die Reststrahlung sei eine von RaE_2 ausgehende schwache, wenig durchdringende Strahlung, führt zu Kurven, welche mit den experimentell gefundenen in sehr befriedigender Weise übereinstimmen.

Im zweiten Teile wurde

1. durch Abklingungsmessungen an stark RaE-hältigen Präparaten bewiesen, daß zwischen RaE_2 und RaF unmöglich ein weiteres α-strahlendes Zwischenprodukt vorhanden sein kann. Dadurch wird es zwingend,

2. die im ersten Teile besprochene Reststrahlung entweder als schwach ionisierende α-Strahlung oder als eine von den β-Strahlen des RaE_2 hervorgerufene Sekundärstrahlung aufzufassen.

Eine experimentelle Entscheidung zwischen diesen beiden Erklärungsmöglichkeiten war nicht möglich.

3. Bei Abklingungsmessungen der β-Strahlung von RaE wurde beobachtet, daß der Abfall bis etwa zum 15. Tage nach der Halbierungskonstante $HC = 4 \cdot 9$ Tage erfolgt, später aber eine Verlangsamung eintritt ($HC = 6 \cdot 2$ Tage). Dadurch wurde die Anschauung von St. Meyer und E. v. Schweidler, daß RaE aus zwei sukzessiven Produkten, dem strahlenlosen RaE_1 ($HC = 6 \cdot 2$ Tage) und dem β-strahlenden RaE_2 ($HC = 4 \cdot 9$ Tage) bestehe, neuerlich experimentell bestätigt.

Über die Ableitung des Gauß'schen Prinzips des kleinsten Zwanges aus den allgemeinsten Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art

von

Richard Leitinger.

Aus dem mathematisch-physikalischen Kabinett der k. k. Universität in Graz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. November 1907.)

Das von Gauß (1829) aufgestellte Prinzip des kleinsten Zwanges läßt sich bekanntlich für rechtwinklige Koordinaten in einfacher Weise aus den Lagrange'schen Gleichungen erster Art ableiten, wobei sich für den Zwang Z, d. i. für die zu einem Minimum zu machende Funktion, der schon von Scheffler (1858) zuerst formulierte Ausdruck ergibt:

$$Z = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{m_\nu} [(m_\nu \ddot{x}_\nu - X_\nu)^2 + (m_\nu \ddot{y}_\nu - Y_\nu)^2 + (m_\nu \ddot{z}_\nu - Z_\nu)^2].$$

Statt der rechtwinkligen, durch die Bedingungsgleichungen miteinander verknüpften Koordinaten hat nun schon Lipschitz (1877) versucht, allgemeine, die Bedingungsgleichungen identisch erfüllende Variable einzuführen, und Waßmuth ist es (1895) gelungen, auf einem sehr einfachen Wege die Transformation des Zwanges in allgemeine Koordinaten vorzunehmen, wenigstens unter der Voraussetzung, daß die Bedingungen die Zeit nicht explizit enthalten.[1] Außerdem haben sich auch Radakovich und andere mit diesem Problem eingehend beschäftigt.

---

[1] Waßmuth, Über die Transformation des Zwanges. Diese Sitzungsberichte, CIV, II. Teil.

Es liegt nun die Frage nahe, ob es denn nicht möglich sei, in ähnlicher Weise wie für rechtwinklige Koordinaten auch für generalisierte, voneinander unabhängige Koordinaten das Gauß'sche Prinzip und insbesondere den allgemeinen Ausdruck für den Zwang Z direkt aus den allgemeinsten Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art abzuleiten?

Im folgenden soll nun eine solche direkte Ableitung versucht werden, wobei im ganzen zunächst vier verschiedene mögliche Fälle in Betracht zu ziehen sind; denn die zwischen den rechtwinkligen Koordinaten bestehenden Bedingungsgleichungen sowie die Transformationsgleichungen, durch welche statt der rechtwinkligen die generalisierten Koordinaten $p_1, p_2, \ldots p_s$ eingeführt werden, können ihrer Form nach 1. holonom oder 2. nichtholonom sein und die Transformationsgleichungen können selbst wieder in beiden Fällen die Zeit t explizit enthalten oder nicht, also noch rheonom oder skleronom sein.

Es wird sich indessen zeigen, daß die Nichtholonomität der generalisierten Koordinaten im allgemeinen keinen wesentlichen Einfluß auf den Gang der Ableitung ausübt, so daß eigentlich für die vorliegende Aufgabe nur zwei Hauptfälle in Betracht kommen, je nachdem nämlich die generalisierten Koordinaten skleronom oder rheonom sind.

Der einfachere und zugleich weitaus häufigere dieser beiden Fälle soll zuerst in Angriff genommen werden.

A. Skleronome generalisierte Koordinaten.

Die Transformationsgleichungen sollen zunächst die Zeit t nicht explizit enthalten, also entweder, falls sie holonom sind, lauten:

$$x_\nu = f_\nu(p_1, p_2 \ldots p_s), \quad \text{für } \nu = 1, 2, \ldots 3n$$ [1]

---

[1] Dabei sind die rechtwinkligen Koordinaten des Systems nach Boltzmann alle mit demselben Buchstaben x bezeichnet und ebenso ist der einfacheren Schreibweise wegen die Masse jedes Punktes durch drei Buchstaben, z. B. $m_1 = m_2 = m_3$, ausgedrückt.

oder, falls sie nichtholonom sind, die Form haben:

$$dx_\nu = \sum_{h=1}^{s} \pi_h^\nu dp_h, \quad \text{für } \nu = 1, 2, 3 \ldots 3n,$$

wobei die Größen π_h^ν irgend welche Funktionen der p_h sein werden, die aber die Zeit ebenfalls nicht explizit enthalten sollen. Die durch diese $3n$ Gleichungen eingeführten s allgemeinen oder generalisierten Koordinaten $p_1, p_2 \ldots p_s$ sollen die zwischen den rechtwinkligen Koordinaten bestehenden τ Bedingungsgleichungen:

$$\varphi_1(x_1, x_2 \ldots x_{3n}) = 0, \quad \varphi_2(x_1, x_2 \ldots x_{3n}) = 0, \ldots \varphi_\tau(x_1, x_2 \ldots x_{3n}) = 0$$

identisch erfüllen, aber voneinander vollkommen unabhängig sein, was natürlich nur möglich ist, wenn ihre Anzahl s gleich der Zahl der Freiheiten des Systems $3n - \tau$ ist. Die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art lauten dann für holonome Koordinaten:

$$Q_h = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_h}\right) - \frac{\partial L}{\partial p_h} - P_h = 0, \quad \text{für } h = 1, 2, \ldots s \qquad \text{I)}$$

und für nichtholonome Koordinaten, wie Boltzmann[1] zuerst gefunden hat:

$$Q_h = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_h}\right) - \frac{\partial L}{\partial p_h} - P_h +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \dot{x}_\nu \left(\zeta_h^\nu + \sum_{k=1}^{s} \zeta_{hk}^\nu\right) = 0, \quad \text{für } h = 1, 2, \ldots s, \qquad \text{II)}$$

wobei L die lebendige Kraft, P_h die generalisierte Kraftkomponente bedeutet.

Aus diesen allgemeinen Lagrange'schen Gleichungen läßt sich nun im vorliegenden Falle das Gauß'sche Prinzip und der allgemeine Ausdruck für den Zwang auf folgendem Wege direkt ableiten.

---

[1] Boltzmann, Prinzipe der Mechanik, II. Teil, p. 109. Siehe auch p. 1330 dieser Abhandlung.

Aus den Gleichungen

$$Q_1 = 0,\ Q_2 = 0, \ldots Q_s = 0 \tag{1}$$

folgt:

$$Q_1 \delta \ddot{p}_1 + Q_2 \delta \ddot{p}_2 + Q_3 \delta \ddot{p}_3 + \ldots + Q_s \delta \ddot{p}_s = 0. \tag{2}$$

Ferner ergibt sich aus den Transformationsgleichungen durch Differentiation entweder:

$$\dot{x}_\nu = \sum_{h=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial p_h} \dot{p}_h \quad \text{oder} \quad \dot{x}_\nu = \sum_{h=1}^{s} \pi_h^\nu \dot{p}_h,$$

so daß die lebendige Kraft des Punktsystems als eine quadratische Form in den Größen $\dot{p}_h$ erscheint:

$$L = \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{m_\nu}{2} \dot{x}_\nu^2 = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{s} a_{hk} \dot{p}_h \dot{p}_k. \tag{3}$$

Dabei setzen sich die Koeffizienten $a_{hk} = a_{kh}$ aus den Größen $\frac{\partial x_\nu}{\partial p_h}$, respektive π_h^ν zusammen, sind also Funktionen der p_h, die die Zeit nicht explizit enthalten, und es läßt sich zeigen, daß die Determinante der quadratischen Form L von Null verschieden ist:[1]

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, \ldots & a_{1s} \\ a_{21}, & a_{22}, \ldots & a_{2s} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1}, & a_{s2}, \ldots & a_{ss} \end{vmatrix} \lessgtr 0$$

für alle Werte der Zeit t.

Man kann daher die Gleichung 2) mit $2D$ multiplizieren und erhält:

$$\sum_{h=1}^{s} 2 Q_h . D . \delta \ddot{p}_h = 0. \tag{4}$$

---

[1] Boltzmann, Prinzipe der Mechanik, II, p. 35.

Nun ist bekanntlich

$$D = a_{1h}A_{1h}+a_{2h}A_{2h}+\ldots+a_{sh}A_{sh} \quad \text{für } h = 1, 2, 3, \ldots s, \tag{5}$$

wobei die A_{rh} die Adjunkten von D sein sollen. Die Gleichung 4) läßt sich daher auch schreiben in der Form:

$$\sum_{h=1}^{s} 2Q_h[a_{1h}A_{1h}+a_{2h}A_{2h}+\ldots+a_{sh}A_{sh}]\delta\ddot{p}_h = 0. \tag{6}$$

Nun gilt aber weiters nach einem Satze der Determinantentheorie, daß, wenn r von h verschieden,

$$a_{1r}A_{1h}+a_{2r}A_{2h}+\ldots+a_{sr}A_{sh} = 0. \tag{7}$$

Fügt man daher zur linken Seite in Gleichung 4) oder 6) solche Glieder hinzu, die identisch verschwinden, so gilt auch:

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{s} 2Q_h\{&[a_{11}A_{1h}+a_{21}A_{2h}+\ldots+a_{s1}A_{sh}]\delta\ddot{p}_1\\ &+[a_{12}A_{1h}+a_{22}A_{2h}+\ldots+a_{s2}A_{sh}]\delta\ddot{p}_2\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+[a_{1s}A_{1h}+a_{2s}A_{2h}+\ldots+a_{ss}A_{sh}]\delta\ddot{p}_s\} = 0.\end{aligned} \tag{8}$$

Denn für jedes bestimmte h verschwinden nach 7) sämtliche Glieder bis auf das eine, welches in Gleichung 6) auftritt. Zieht man nun in Gleichung 8) die vertikal untereinander stehenden Glieder zusammen, so folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{s} 2Q_h\{&A_{1h}(a_{11}\delta\ddot{p}_1+a_{12}\delta\ddot{p}_2+\ldots+a_{1s}\delta\ddot{p}_s)\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+A_{sh}(a_{s1}\delta\ddot{p}_1+a_{s2}\delta\ddot{p}_2+\ldots+a_{ss}\delta\ddot{p}_s)\} = 0.\end{aligned} \tag{9}$$

Nun ergibt sich aus Gleichung 3):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_h} = \sum_{k=1}^{s} a_{hk}\dot{p}_k, \tag{10}$$

daher

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_h}\right) = \sum_{k=1}^{s} a_{hk}\ddot{p}_k$$

und somit $Q_h = a_{h1}\ddot{p}_1 + a_{h2}\ddot{p}_2 + \ldots + a_{hs}\ddot{p}_s + \ldots = 0.$

Es ist daher:

$$\frac{\partial Q_h}{\partial \ddot{p}_1} = a_{h1},\quad \frac{\partial Q_h}{\partial \ddot{p}_2} = a_{h2}, \ldots \frac{\partial Q_h}{\partial \ddot{p}_s} = a_{hs}. \qquad 11)$$

Deshalb kann man die Gleichung 9) auch folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{s} 2Q_h \Big\{ & A_{1h}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial \ddot{p}_1}\partial\ddot{p}_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial \ddot{p}_2}\delta\ddot{p}_2 + \ldots + \frac{\partial Q_1}{\partial \ddot{p}_s}\delta\ddot{p}_s\right) \\ & + A_{2h}\left(\frac{\partial Q_2}{\partial \ddot{p}_1}\delta\ddot{p}_1 + \frac{\partial Q_2}{\partial \ddot{p}_2}\delta\ddot{p}_2 + \ldots + \frac{\partial Q_2}{\partial \ddot{p}_s}\delta\ddot{p}_s\right) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + A_{sh}\left(\frac{\partial Q_s}{\partial \ddot{p}_1}\delta\ddot{p}_1 + \frac{\partial Q_s}{\partial \ddot{p}_2}\delta\ddot{p}_2 + \ldots + \frac{\partial Q_s}{\partial \ddot{p}_s}\delta\ddot{p}_s\right)\Big\} = 0. \qquad 12)\end{aligned}$$

oder in Summenform:

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{s} 2Q_h \sum_{r=1}^{s} A_{rh} \Big(& \frac{\partial Q_r}{\partial \ddot{p}_1}\delta\ddot{p}_1 + \frac{\partial Q_r}{\partial \ddot{p}_2}\delta\ddot{p}_2 + \ldots \\ & + \frac{\partial Q_r}{\partial \ddot{p}_s}\delta\ddot{p}_s\Big) = 0. \qquad 12')\end{aligned}$$

Löst man jetzt die erste Summe über h auf, so ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} & 2Q_1 \sum_{r=1}^{s} A_{r1}\left(\frac{\partial Q_r}{\partial \ddot{p}_1}\delta\ddot{p}_1 + \ldots + \frac{\partial Q_r}{\partial \ddot{p}_s}\delta\ddot{p}_s\right) \\ & + 2Q_2 \sum_{r=1}^{s} A_{r2}\left(\frac{\partial Q_r}{\partial \ddot{p}_1}\delta\ddot{p}_1 + \ldots + \frac{\partial Q_r}{\partial \ddot{p}_s}\delta\ddot{p}_s\right) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + 2Q_s \sum_{r=1}^{s} A_{rs}\left(\frac{\partial Q_r}{\partial \ddot{p}_1}\delta\ddot{p}_1 + \ldots + \frac{\partial Q_r}{\partial \ddot{p}_s}\delta\ddot{p}_s\right) = 0. \qquad 13)\end{aligned}$$

Nun kann man in dieser Gleichung wieder die vertikal untereinander stehenden Glieder, die also mit demselben Faktor $\frac{\partial Q_r}{\delta \ddot{p}_h} \delta \ddot{p}_h$ multipliziert sind, zusammenziehen. Dann geht Gleichung 13) über in:

$$\sum_{r=1}^{s} \Big\{ (2A_{r1}Q_1 + 2A_{r2}Q_2 + \ldots + 2A_{rs}Q_s) \frac{\partial Q_r}{\partial \ddot{p}_1} \delta \ddot{p}_1$$
$$+ (2A_{r1}Q_1 + 2A_{r2}Q_2 + \ldots + 2A_{rs}Q_s) \frac{\partial Q_r}{\partial \ddot{p}_2} \delta \ddot{p}_2$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (2A_{r1}Q_1 + 2A_{r2}Q_2 + \ldots + 2A_{rs}Q_s) \frac{\partial Q_r}{\partial \ddot{p}_s} \delta \ddot{p}_s \Big\} = 0. \quad 14)$$

Denkt man sich nun Gleichung 14) durch D dividiert und setzt dann:

$$\frac{1}{D}(2A_{r1}Q_1 + 2A_{r2}Q_2 + \ldots + 2A_{rs}Q_s) = \frac{\partial Z}{\partial Q_r} \quad 15)$$
$$\text{für } r = 1, 2, 3 \ldots s,$$

so wird durch diese s Gleichungen Z jedenfalls als eine quadratische Funktion der Größen $Q_1, Q_2 \ldots Q_s$ definiert, die sich daraus durch Integration ergibt in der Form:

$$Z = \frac{1}{D} \sum_{\mu, \nu = 1}^{s} A_{\mu,\nu} Q_\mu Q_\nu + \varphi(p_1, \ldots p_s, \dot{p}_1 \ldots \dot{p}_s), \quad 16)$$

wie man sich umgekehrt durch Differentiation leicht überzeugt. Die Funktion φ tritt hinzu, weil in den Gleichungen 11) nur die Größen $\ddot{p}_h$ als Veränderliche aufgefaßt wurden.

Nun geht Gleichung 14) über in:

$$\sum_{r=1}^{s} \frac{\partial Z}{\partial Q_r} \left(\frac{\partial Q_r}{\partial \ddot{p}_1} \delta \ddot{p}_1 + \frac{\partial Q_r}{\partial \ddot{p}_2} \delta \ddot{p}_2 + \ldots + \frac{\partial Q_r}{\partial \ddot{p}_s} \delta \ddot{p}_s \right) = 0. \quad 17)$$

Dieser letzte Ausdruck ist aber nichts anderes als die erste Variation von Z, wenn nur nach den Größen $\ddot{p}_h$ (also im

Gauß'schen Sinne) variiert und alles andere als konstant betrachtet wird. Mithin ist nach Gleichung 17):

$$\delta Z = 0. \tag{18}$$

Die zweite Variation ist ersichtlich positiv, so daß diese letzte Gleichung besagt, daß, wenn man die vorhandene Bewegung im angegebenen Gauß'schen Sinne variiert, für die wirkliche Bewegung, die eben nach den allgemeinen Lagrange-schen Gleichungen 1) erfolgt, der Zwang

$$Z = \frac{1}{D} \Sigma A_{\mu\nu} Q_\mu Q_\nu + \varphi(p_1 \ldots p_s, \dot{p}_1 \ldots \dot{p}_s)$$

ein Minimum sein muß.

Es ist wohl unmittelbar ersichtlich, daß diese Ableitung sowohl für holonome als auch für nichtholonome sklero-nome Koordinaten gilt, wenn man nur unter den Q_h im ersten Falle die linken Seiten der Lagrange'schen Gleichungen in der Form I, im zweiten Falle aber in der Form II versteht; denn die Schlußweise bleibt in beiden Fällen dieselbe.

B. Rheonome, generalisierte Koordinaten.

Es soll nun der zweite und bedeutend schwierigere der beiden angeführten Hauptfälle in Betracht gezogen werden, der Fall nämlich, daß in den Transformationsgleichungen die Zeit auch explizit auftritt. Diese Transformationsgleichungen lauten daher jetzt, wenn sie holonom sind:

$$x_\nu = f_\nu(t, p_1, p_2 \ldots p_s), \quad \text{für } \nu = 1, 2, 3 \ldots 3n$$

oder, wenn sie nichtholonom sind:[1]

$$dx_\nu = \vartheta_\nu dt + \sum_{h=1}^{s} \pi_h^\nu \, dp_h, \quad \text{für } \nu = 1, 2, 3 \ldots 3n,$$

wobei aber nun im allgemeinen auch die Funktionen ϑ_ν und π_h^ν die Zeit explizit enthalten werden. Die rheonomen,

[1] Vergl. Boltzmann, Prinzipe der Mechank, II. Teil.

generalisierten Koordinaten $p_1, p_2 \ldots p_s$ sollen wieder die Bedingungen des Systems:

$$\varphi_1(x_1, x_2 \ldots x_{3n}) = 0, \quad \varphi_2(x_1, x_2 \ldots x_{3n}) = 0, \ldots \varphi_\tau(x_1, x_2 \ldots x_{3n}) = 0$$

identisch erfüllen und .im übrigen wie früher voneinander vollkommen unabhängig sein.

Die Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art ändern sich unter dieser Voraussetzung dann nicht, werden also auch hier in der Form I oder II erscheinen, je nachdem die Koordinaten p_h holonom oder nichtholonom sind; denn eine Änderung in diesen Gleichungen würde ja nur eintreten, wenn zwischen den Koordinaten p_h selbst noch gewisse Beziehungen bestünden.

Um nun aber diesem zweiten Falle überhaupt nähertreten zu können, ist es vom mathematischen Standpunkt aus notwendig, eine Voraussetzung über die Natur der hier auftretenden Funktionen zu machen, und deshalb werde etwa angenommen, daß sämtliche vorkommenden Funktionen eindeutige, analytische Funktionen seien, eine Annahme, die für das physikalische Problem im allgemeinen wohl eher zu weit als zu eng gefaßt sein dürfte.

Da nun im vorliegenden Falle, wie sich durch Differentiation aus den Transformationsgleichungen ergibt, entweder:

$$\dot{x}_\nu = \frac{\partial x_\nu}{\partial t} + \sum_{h=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial p_h} \dot{p}_h \qquad 1)$$

oder

$$\dot{x}_\nu = \vartheta_\nu + \sum_{h=1}^{s} \pi'_h \dot{p}_h$$

ist, so erscheint die lebendige Kraft des Punktsystems L jetzt nicht mehr als eine quadratische Form in den Größen $\dot{p}_h$, sondern überhaupt als eine Funktion zweiten Grades in diesen Größen vom Typus:

$$L = \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{m_\nu}{2} \dot{x}_\nu^2 = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{s} a_{hk} \dot{p}_h \dot{p}_k + \sum_{h=1}^{s} b_h \dot{p}_h + c, \qquad 2)$$

wobei die Koeffizienten a_{hk}, b_h und c selbst noch die Zeit und die Koordinaten p_h in irgend einer von der Form der Funktionen f_ν, respektive ϑ_ν und π_h^ν abhängigen Weise enthalten werden.

Versucht man nun auch hier wieder, sich die Ausdrücke Q_h wirklich zusammenzustellen, so erhält man aus der Gleichung 2):

$$a)\qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_h} = \sum_{k=1}^{s} a_{hk}\dot{p}_k + b_h$$

$$b)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_h}\right) = \sum_{k=1}^{s}\left[\frac{\partial a_{hk}}{\partial t}\dot{p}_k + \sum_{l=1}^{s}\frac{\partial a_{hk}}{\partial p_l}\dot{p}_l\dot{p}_k + a_{hk}\ddot{p}_k\right] + \\ + \frac{\partial b_h}{\partial t} + \sum_{l=1}^{s}\frac{\partial b_h}{\partial p_l}\dot{p}_l$$

$$c)\qquad \frac{\partial L}{\partial p_h} = \frac{1}{2}\sum_{\rho,k=1}^{s}\frac{\partial a_{\rho k}}{\partial p_h}\dot{p}_k\dot{p}_\rho + \sum_{\rho=1}^{s}\frac{\partial b_\rho}{\partial p_h}\dot{p}_\rho + \frac{\partial c}{\partial p_h}. \qquad 3)$$

Ferner ist bekanntlich:

$$d)\qquad P_h = \sum_{\nu=1}^{3n} X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial p_h}$$

oder für nichtholonome Koordinaten:

$$P_h = \sum_{\nu=1}^{3n} X_\nu \pi_h^\nu$$

und endlich nach Boltzmann:[1]

$$e)\qquad \zeta_h^\nu + \sum_{k=1}^{s}\zeta_{hk}^\nu = \frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial p_h} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial p_h}\right).$$

Bildet man also aus diesen Relationen 3 *b*, *c*, *d* und eventuell *e* den Ausdruck Q_h gemäß der eingangs aufgestellten

[1] Boltzmann, Prinzipe der Mechanik, II, p. 106.

Form I oder II, so erkennt man unmittelbar, daß auch für rheonome Koordinaten wie für skleronome ganz allgemein:

$$\frac{\partial Q_h}{\partial \ddot{p}_r} = a_{hr}, \quad \text{für} \quad \begin{matrix} h = 1, 2, \ldots s \\ r = 1, 2, \ldots s \end{matrix} \tag{4}$$

Deshalb liegt es nahe, auch hier die Determinante D des quadratischen Teiles im Ausdrucke von L (Gleichung 2) aufzufassen, d. h. die Determinante s^{ten} Grades:

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots & a_{1s} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1}, & a_{s2}, & \ldots & a_{ss} \end{vmatrix}$$

Doch kann man jetzt nicht mehr, wie etwa im ersten Falle, behaupten, daß diese Determinante D für alle Werte der Zeit t von Null verschieden sein müsse; denn der dort zitierte Beweis stützt sich wesentlich darauf, daß L eine homogene Form sei, was ja hier nicht mehr der Fall ist. Zur näheren Untersuchung dieser Determinante D ist es daher notwendig, sich dieselbe wirklich zu bilden, und zwar zunächst unter der Voraussetzung, daß die Transformationsgleichungen ihrer Form nach holonom seien. Dann ist:

$$\dot{x}_\nu = \frac{\partial x_\nu}{\partial t} + \sum_{h=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial p_h} \dot{p}_h$$

und die lebendige Kraft:

$$L = \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{m_\nu}{2} \dot{x}_\nu^2 =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{m_\nu}{2} \left\{ \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial t} \right)^2 + 2 \frac{\partial x_\nu}{\partial t} \sum_{h=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial p_h} \dot{p}_h + \left(\sum_{h=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial p_h} \dot{p}_h \right)^2 \right\}.$$

Oder auch:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \left[\frac{\partial x_\nu}{\partial p_1} \dot{p}_1 + \ldots + \frac{\partial x_\nu}{\partial p_s} \dot{p}_s \right]^2 +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial t} \sum_{h=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial p_h} \dot{p}_h + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial t} \right)^2.$$

Vergleicht man damit die allgemeine Form (Gleichung 2):

$$L = \frac{1}{2} a_{11} \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} a_{22} \dot{p}_2^2 + \ldots + \frac{1}{2} a_{ss} \dot{p}_s^2 +$$
$$+ a_{12} \dot{p}_1 \dot{p}_2 + \ldots a_{s-1,s} \dot{p}_{s-1} \dot{p}_s + b_1 \dot{p}_1 + \ldots,$$

so erkennt man unmittelbar, daß die Determinante der Koeffizienten a_{hk} im Falle rheonomer, holonomer Koordinaten in folgender Form erscheint:

$$D = \begin{vmatrix} \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial p_1}\right)^2, & \sum_\nu m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial p_1} \frac{\partial x_\nu}{\partial p_2}, & \ldots & \sum_\nu m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial x_\nu}{\partial p_s} \\ \sum_\nu m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial x_\nu}{\partial p_2}, & \sum_\nu m_\nu \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial p_2}\right)^2, & \ldots & \sum_\nu m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial x_\nu}{\partial p_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_\nu m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial x_\nu}{\partial p_s}, & & \ldots & \sum_\nu m_\nu \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial p_s}\right)^2 \end{vmatrix}$$

Aus dieser Form der Determinante läßt sich jedoch über ihr Verschwinden im allgemeinen noch nichts Näheres aussagen. Darum ist es wichtig, zu bemerken, daß diese symmetrische Determinante D auch aufgefaßt werden kann als das zeilenweise gebildete Produkt der zwei rechteckigen Matrices:

$$\left. \begin{matrix} m_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_1}, & m_2 \frac{\partial x_2}{\partial p_1}, & \ldots & m_{3n} \frac{\partial x_{3n}}{\partial p_1} \\ m_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_2}, & m_2 \frac{\partial x_2}{\partial p_2}, & \ldots & m_{3n} \frac{\partial x_{3n}}{\partial p_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_s}, & m_2 \frac{\partial x_2}{\partial p_s}, & \ldots & m_{3n} \frac{\partial x_{3n}}{\partial p_s} \end{matrix} \right| \begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial p_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_1}, & \ldots & \frac{\partial x_{3n}}{\partial p_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_2}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_2}, & \ldots & \frac{\partial x_{3n}}{\partial p_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_s}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_s}, & \ldots & \frac{\partial x_{3n}}{\partial p_s} \end{matrix}$$

Dieses symbolische Produkt läßt sich aber, weil die Zahl der Horizontalreihen s jedenfalls kleiner ist als die der Vertikalreihen $3n$, nach einem Satze der Determinantentheorie[1] weiters

[1] Baltzer, Determinanten, § 6, p. 48 ff. — E. Pascal, Determinanten, I, § 7.

darstellen als eine Summe von $\binom{3n}{s}$ Quadraten, deren jedes einzelne die allgemeine Form hat:

$$m_{r_1} . m_{r_2} \ldots m_{r_s} . \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{r_1}}{\partial p_1}, & \frac{\partial x_{r_2}}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial x_{r_s}}{\partial p_1} \\ \frac{\partial x_{r_1}}{\partial p_2}, & \frac{\partial x_{r_2}}{\partial p_2} & \ldots & \frac{\partial x_{r_s}}{\partial p_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_{r_1}}{\partial p_s} & & \ldots & \frac{\partial x_{r_s}}{\partial p_s} \end{vmatrix}^2$$

wobei $r_1 r_2 r_3 \ldots r_s$ irgend eine Kombination s^{ter} Klasse ohne Wiederholung aus den Elementen $1, 2, 3 \ldots 3n$ bedeutet. Nun sind aber die Koordinaten $x_1, x_2 \ldots x_{3n}$ voneinander nicht unabhängig, sondern miteinander verknüpft durch die τ Bedingungsgleichungen:

$$\varphi_1(x_1, x_2 \ldots x_{3n}) = 0, \quad \varphi_2(x_1, x_2 \ldots x_{3n}) = 0, \ldots \varphi_\tau(x_1, x_2 \ldots x_{3n}) = 0,$$

weshalb man sich τ von den Größen x aus diesen Gleichungen als Funktionen der übrigen $3n - \tau = s$ Größen x, die dann voneinander unabhängig sind, dargestellt denken kann, etwa in der Form:

$$x_{s+1} = \psi_1(x_1, x_2 \ldots x_s), \; x_{s+2} = \psi_2(x_1, x_2 \ldots x_s), \ldots x_{3n} = \psi_\tau(x_1, x_2 \ldots x_s).$$

Dann ist aber:

$$\frac{\partial x_{s+\lambda}}{\partial p_h} = \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_h} + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_h} + \ldots + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial x_s} \cdot \frac{\partial x_s}{\partial p_h} \qquad 5)$$

für alle Werte von $\lambda = 1, 2, \ldots \tau$ und $h = 1, 2, \ldots s$.

Führt man nun diese Darstellung 5) in die einzelnen Determinantenquadrate der obigen Entwicklung ein, so tritt, wie unmittelbar ersichtlich ist, aus jedem derselben mit Ausnahme des ersten ein aus den Größen $\left(\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial x_h}\right)^2$ zusammengesetzter Faktor heraus und die übrigbleibenden Determinantenquadrate stimmen dann mit dem ersten überein. Deshalb

läßt sich auch die ganze Originaldeterminante D darstellen durch das Quadrat dieser einzigen ersten Teildeterminante in der Form:

$$D = \left[m_1 m_2 \ldots m_s + \Phi\left(m_1 \ldots m_s, \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}\right)^2, \ldots \left(\frac{\partial \psi_\tau}{\partial x_s}\right)^2\right)\right] \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial p_1}, \ldots \frac{\partial x_s}{\partial p_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_2}, \ldots \frac{\partial x_s}{\partial p_2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_s}, \ldots \frac{\partial x_s}{\partial p_s} \end{vmatrix}^2$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer kann, wie aus seiner Form unmittelbar hervorgeht, nicht verschwinden und nur positiv sein; denn die m_ν sind als materielle Massen positive Größen und die Funktion Φ kann als eine Summe von quadratischen Gliedern auch nur positiv oder Null sein. Mithin ist ein Verschwinden der Determinante D überhaupt nur möglich, wenn die Determinante s^{ten} Grades:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial p_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_1}, & \ldots & \frac{\partial x_s}{\partial p_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_2}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_2}, & \ldots & \frac{\partial x_s}{\partial p_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_s}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_s}, & \ldots & \frac{\partial x_s}{\partial p_s} \end{vmatrix}$$

verschwindet.

Diese Determinante Δ, deren Verschwinden somit die notwendige und hinreichende Bedingung für das Verschwinden der Originaldeterminante D darstellt, ist nun aber nichts anderes als die Funktionaldeterminante der eindeutigen analytischen Funktionen:

$$x_1 = f_1(t, p_1, p_2 \ldots p_s),\ x_2 = f_2(t, p_1, p_2, \ldots p_s) \ldots,\ x_s = f_s(t, p_1 \ldots p_s).$$

Deshalb ist Δ selbst eine eindeutige, analytische Funktion der Größen $p_1, p_2 \ldots p_s$ und müßte als solche überhaupt identisch verschwinden, wenn sie in irgend einem auch noch so

beliebig kleinen Zeitintervall t' bis t'' identisch verschwindet. Dadurch würde aber offenbar eine Beziehung zwischen den Größen $p_1, p_2 \dots p_s$ definiert, was der vorausgesetzten vollkommenen Unabhängigkeit der generalisierten Koordinaten untereinander widerspricht. Es ist daher auch ein identisches Verschwinden der Originaldeterminante D in jedem, wenn auch noch so kleinen Zeitintervall ausgeschlossen und es bleibt mithin nur die eine Möglichkeit übrig, daß diese Determinante nur für vereinzelte, besondere Momente $t_0, t_1, t_2 \dots$ verschwindet, während sie sonst im allgemeinen von Null verschieden ist.

Solange nun aber diese Determinante D von Null verschieden ist, kann man zufolge des in Gleichung 4) gewonnenen Resultates ohneweiters auch für rheonome, generalisierte Koordinaten genau dieselben Schlüsse wiederholen wie im Falle skleronomer Koordinaten, so daß für alle Intervalle, in denen die Voraussetzung $D \lesseqgtr 0$ erfüllt ist, sich für den Zwang Z, der für die wirkliche Bewegung ein Minimum sein muß, derselbe allgemeine Ausdruck ergibt wie im ersten Falle, nämlich:

$$Z = \frac{1}{D} \sum_{\mu, \nu = 1}^{s} A_{\mu\nu} Q_\mu Q_\nu + \varphi(p_1 \dots p_s, \dot{p}_1 \dots \dot{p}_s).$$

Nur wird jetzt natürlich ebenso wie in den Größen $A_{\mu\nu}$ und D auch in diesem Ausdrucke für den Zwang Z die Zeit im allgemeinen auch explizit auftreten.

Was aber jene einzelnen Momente betrifft, in denen die Determinante D wirklich verschwindet und für welche daher die oben gegebene Ableitung ihre Bedeutung verliert, so ließe sich vom rein mathematischen Standpunkt aus unter spezielleren Voraussetzungen über die Natur der auftretenden Funktionen wohl durch Grenzbetrachtungen der modifizierte allgemeine Ausdruck für den Zwang in solchen Momenten finden. Doch muß von solchen eingehenderen mathematischen Untersuchungen hier abgesehen werden, da für das vorliegende allgemeine physikalische Problem nähere Spezialisierungen in den Voraussetzungen nicht ohneweiters zulässig sind und da

andrerseits für einzelne herausgegriffene Momente, in denen Zeit und Koordinaten nicht als variabel, sondern als fest anzusehen sind, die mechanischen Prinzipien keine eigentliche Anwendung mehr finden. Auch läßt sich, ohne auf spezielle Fälle überzugehen, im allgemeinen nicht entscheiden, ob überhaupt oder wie oft dieser Ausnahmefall eintreten kann.

Endlich ist noch bezüglich der bisher ausgeschlossenen Nichtholonomität der rheonomen Koordinaten zu bemerken, daß diese auch hier wie im ersten Falle keinen wesentlichen Einfluß auf den Gang der Untersuchung ausübt. Es treten nur an die Stelle der Differentialquotienten $\frac{\partial x_\nu}{\partial p_k}$ die allerdings nicht näher bekannten eindeutigen analytischen Funktionen π'_k und die Lagrange'schen Gleichungen sind wieder in der Form II zu verwenden. Im übrigen aber bleiben alle Schlüsse aufrecht mit Ausnahme der Zerlegung der Determinante D, die hier allerdings nicht mehr durchgeführt werden kann. Doch übt dieser Umstand, wie nachträglich ersichtlich ist, auf die ganze Schlußweise keinen weiteren Einfluß aus; denn ebenso wie die Funktionaldeterminante Δ ist offenbar auch D selbst eine eindeutige analytische Funktion der Größen $p_1, p_2, \ldots p_s$, welche mithin nicht identisch verschwinden kann, ohne die vorausgesetzte Unabhängigkeit der generalisierten Koordinaten untereinander zu stören. Der allgemeine Ausdruck für den Zwang Z ist daher unter der Voraussetzung eindeutiger analytischer Funktionen — von einzelnen möglicherweise vorkommenden Momenten, in denen $D = 0$ wird, abgesehen — auch für rheonome, und zwar sowohl holonome als auch nichtholonome Koordinaten genau derselbe wie für skleronome Koordinaten.

Über die einfachen Einheiten des Bereichs $(\alpha, \sqrt{D})$, wo α eine primitive Einheitswurzel von Primzahlgrad und D eine negative Zahl bezeichnen

von

F. Mertens.

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Dezember 1907.)

1.

Es sei λ eine ungerade Primzahl, α eine primitive λ^{te} Einheitswurzel, D eine negative ganze quadratfreie Zahl und es handle sich um die Ermittlung aller Einheitswurzeln des Bereichs $(\alpha, \sqrt{D})$.

Hiezu führt ein Satz Kronecker's[1] über die Gleichung

$$Y_n = 0$$

für die primitiven n^{ten} Einheitswurzeln. Derselbe lautet:

Wird die Funktion Y_n durch Adjunktion einer Wurzel einer ganzzahligen irreduktibeln Gleichung

$$G(z) = 0$$

mit dem Koeffizienten 1 bei der höchsten Potenz von z reduktibel, so muß die Diskriminante Δ von G einen Primfaktor von n enthalten.

Es sei gestattet, hier einen einfachen Beweis dieses Satzes mitzuteilen.

---

[1] Mémoire sur les facteurs irreductibles de l'expression $x^n - 1$. Journal de mathém. p. et a. publié par Liouville, 19, 1854.

Da $G(z)$ mittels einer primitiven n^{ten} Einheitswurzel zerfällbar ist, so sei $f(z, r)$ ein in dem Bereich (r) irreduktibler Faktor von G von höherem als dem 0ten Grade mit dem Koeffizienten 1 bei der höchsten Potenz von z. Die Koeffizienten desselben sind ganze ganzzahlige Funktionen von r und müssen Potenzen von r — mit von 0 verschiedenen Koeffizienten — enthalten, deren Exponenten nicht durch n teilbar sind. Es sei t der größte gemeinschaftliche Teiler dieser Exponenten und der Zahl n und

$$n = tn_1$$

$f(z, r)$ enthält dann nur Potenzen einer primitiven n_1^{ten} Einheitswurzel ρ und kann mit $f(z, \rho)$ bezeichnet werden, wo die Koeffizienten von $f(z, \rho)$ nicht mehr rational durch eine Einheitswurzel ausgedrückt werden können, deren Grad in n_1 aufgeht und $< n_1$ ist.

n_1 muß durch eine Primzahlpotenz $p^\varkappa$ genau teilbar sein, welche > 2 ist, und es sei $n_1 = mp^\varkappa$. Jede der $\varphi(n_1)-1$ Funktionen

$$f(z, \rho^a), f(z, \rho^b), \ldots,$$

welche den von 1 verschiedenen, zu n_1 teilerfremden Zahlen $a, b, \ldots$ unter n_1 entsprechen, geht in $G(z)$ auf und es muß unter denselben mindestens eine, etwa $f(z, \rho^c)$, vorkommen, in welcher $c \equiv 1 \pmod{m}$ ist und welche nicht mit $f(z, \rho)$ zusammenfällt. Denn anderenfalls würden alle Funktionen

$$f(z, \rho^{hp^\varkappa + km})$$

zusammenfallen, wo $hp^\varkappa \equiv 1 \pmod{m}$ ist und k alle zu $p^\varkappa$ teilerfremden Zahlen unter $p^\varkappa$ durchlaufen soll, und $f(z, \rho)$ würde gegen die Annahme nur Potenzen von $\rho^{p^\varkappa}$ enthalten.

Sind aber die Funktionen

$$f(z, \rho), f(z, \rho^c)$$

verschieden, so sind sie teilerfremd und ihr Produkt muß in G aufgehen, so daß

$$G(z) = f(z, \rho) f(z, \rho^c)\, Q(z, \rho)$$

gesetzt werden kann, wo Q ganz und ganzzahlig in z, ρ ist. Hieraus ergibt sich durch Erhebung in die $p^{\varkappa}$te Potenz

$$G^{p^{\pi}} \equiv G(z^{p^{\pi}}) \equiv f(z, \rho)^{p^{\pi}} f(z, \rho^{c})^{p^{\pi}} Q(z, \rho)^{p^{\pi}}$$

$$\equiv f(z^{p^{\pi}}, \rho^{p^{\pi}}) f(z^{p^{\pi}}, \rho^{c p^{\pi}}) Q(z^{p^{\pi}}, \rho^{p^{\pi}}) \pmod{p},$$

woraus

$$G(z) \equiv f(z, \rho^{p^{\pi}})^{2} Q(z, \rho^{p^{\pi}}) \pmod{p}$$

folgt.

Dann ist aber

$$\Delta \equiv 0 \pmod{p}.$$

2.

Die Einheitswurzeln ε des Bereichs $(\alpha, \sqrt{D})$ sind von zweierlei Art, je nachdem ihr Grad zu λ teilerfremd ist oder nicht.

Es sei

$$\varepsilon^{m} = 1$$

und m zu λ teilerfremd.

Bleibt Y_{λ} bei der Adjunktion von $\sqrt{D}$ irreduktibel, so darf $\sqrt{D}$ in $-\sqrt{D}$ verwandelt werden, wodurch ε in ε_1 übergehen möge. Es ist dann auch

$$\varepsilon_1^{m} = 1$$

und $(x-\varepsilon)(x-\varepsilon_1)$ hat in α rationale Koeffizienten. Ist dagegen Y_{λ} durch $\sqrt{D}$ reduktibel, so ist $\sqrt{D}$ und infolgedessen auch ε in α rational. Entweder geht also die Funktion $(x-\varepsilon)\cdot$ $\cdot(x-\varepsilon_1)$, wenn $\varepsilon, \varepsilon_1$ verschieden sind, oder aber die Funktion $x-\varepsilon$ in $x^{m}-1$ und daher auch in einem der Faktoren

$$Y_1, Y_{\delta}, \ldots Y_m$$

von $x^{m}-1$, etwa Y_{μ}, auf, wo $1, \delta, \ldots m$ die Teiler von m bezeichnen. Da aber Y_{μ} nach dem Satze in 1 durch Adjunktion von α nicht reduktibel werden kann, so muß $\varphi(\mu) < 3$ sein. μ kann demnach nur einen der Werte

$$\mu = 1, 2, 3, 4, 6$$

und ε die Werte

$$1, \quad -1, \quad \pm\omega^a, \quad \pm i,$$

haben, wo

$$\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

ist.

Die beiden ersten Werte 1, -1 gehören immer dem Bereiche $(\alpha, \sqrt{D})$ an, die anderen nur unter Umständen.

Der Fall

$$\varepsilon = \pm\omega^a$$

kann nur vorkommen, wenn $\lambda > 3$ ist, und erfordert

$$\varepsilon_1 = \pm\omega^{2a}.$$

Setzt man

$$\varepsilon = A+B\sqrt{D},$$

wo A, B Zahlen in α bezeichnen, so ergibt sich

$$2B\sqrt{D} = \pm\sqrt{-3},$$

$$2DB = \pm\sqrt{-3D}.$$

Ist nun D nicht durch λ teilbar, so gilt dasselbe von der Diskriminante der Gleichung $z^2+3D=0$ und Y_λ ist durch $\sqrt{-3D}$ irreduktibel. Es muß daher B von α frei und $\sqrt{-3D}$ rational sein. Da überdies D quadratfrei angenommen wurde, so muß $D=-3$ sein. Umgekehrt gehört ω in diesem Falle zu dem Bereich $(\alpha, \sqrt{-3})$.

Ist dagegen D durch λ teilbar, so sei

$$D = (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda D_1,$$

$$\sum\left(\frac{s}{\lambda}\right)\alpha^s = \vartheta(\alpha), \qquad s = 1, 2, \ldots \lambda-1.$$

Infolge der Gleichung

$$\sqrt{(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda} = \vartheta(\alpha)$$

lautet dann die obige Gleichung:

$$2D_1 B(\alpha)\vartheta(\alpha) = \pm\sqrt{-3D_1}.$$

Da $3D_1$ zu λ teilerfremd ist, so ist Y_λ durch $\sqrt{-3D_1}$ irreduktibel und es muß $2D_1 B(\alpha)\vartheta(\alpha)$ frei von α und somit $\sqrt{-3D_1}$ rational sein. Da überdies D_1 quadratfrei ist, so folgt

$$D_1 = -3,$$
$$D = -3\lambda, \qquad \lambda \equiv 1 \pmod 4.$$

In der Tat ist dann

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\vartheta(\alpha)}{2\lambda}\sqrt{D}.$$

Die Gleichung

$$\varepsilon = \pm i$$

erfordert

$$\varepsilon_1 = \mp i.$$

Setzt man

$$\varepsilon = A + B\sqrt{D},$$

wo A, B Zahlen in α bezeichnen, so wird

$$B\sqrt{D} = \pm i,$$
$$DB = \pm\sqrt{-D}.$$

Ist nun D zu λ teilerfremd, so gilt dasselbe von der Diskriminante der Gleichung $z^2 + D = 0$ und Y_λ ist durch $\sqrt{-D}$ irreduktibel. Es muß daher B von α frei, $\sqrt{-D}$ rational und $D = -1$ sein. Umgekehrt gehört dann $\pm i$ zu dem Bereich (i, α).

Ist dagegen D durch λ teilbar, so sei

$$D = (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda D_1.$$

Es wird dann

$$D_1 B(\alpha)\vartheta(\alpha) = \pm\sqrt{-D_1}$$

und es erhellt wie vorher, daß $D_1 = -1$ sein muß. Somit muß

$$D = -\lambda \qquad \lambda \equiv 1 \pmod 4)$$

sein und es ist in der Tat

$$i = \frac{\vartheta(\alpha)}{\lambda}\sqrt{D}.$$

3.

Es sei ε eine primitive Einheitswurzel des Bereichs $(\alpha, \sqrt{D})$, deren Grad m durch λ teilbar ist, und $m = n\lambda$.

Die Gleichung

$$\varepsilon^{n\lambda} = 1$$

ergibt

$$\varepsilon^n = \alpha^a.$$

Ist Y_λ durch $\sqrt{D}$ irreduktibel und geht ε durch Verwandlung von $\sqrt{D}$ in $-\sqrt{D}$ in ε_1 über, so ist

$$\varepsilon_1^n = \alpha^a$$

und daher

$$(\varepsilon\varepsilon_1)^n = \alpha^{2a}.$$

Somit ist in allen Fällen α^a oder α^{2a} die n^{te} Potenz einer Zahl in α und es erhellt, daß n nicht mehr durch λ teilbar sein kann. Dann ist aber, wenn h, k der Gleichung

$$nk = 1 + h\lambda$$

genügen,

$$\varepsilon = \varepsilon^{-h\lambda}\alpha^{ka}.$$

ε ist demnach das Produkt einer Potenz von α in eine Einheit $\varepsilon^{-h\lambda}$ des Bereichs $(\alpha, \sqrt{D})$ von zu λ teilerfremdem Grade n.

4.

Faßt man die unterschiedenen zwei Fälle zusammen, so ergeben sich alle Einheitswurzeln des Bereichs $(\alpha, \sqrt{D})$ in der Gestalt

$$\varepsilon = \mathfrak{e}\alpha^h,$$

wo $\mathfrak{e}$ eine Einheit desselben Bereichs von zu λ teilerfremdem Grade ist.

Über die in Bezug auf eine Primzahl des Bereichs der Quadratwurzel aus einer negativen Zahl irreduktibeln ganzen Funktionen einer Variablen

von

F. Mertens.

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Dezember 1907.)

1.

Es sei D eine negative ganze quadratfreie Zahl, σ die Zahl 2 oder 1, je nachdem $D \equiv 1 \pmod 4$ ist oder nicht, und

$$\vartheta = \frac{\sigma - 1 + \sqrt{D}}{\sigma}.$$

Alle ganzen algebraischen Zahlen des Bereichs $(\sqrt{D})$ sind Vielfachsummen von $1, \vartheta$ und sollen kurz als ganze Zahlen in $\sqrt{D}$ bezeichnet werden.

Unter einer Funktion der Variablen x in $\sqrt{D}$ werde eine ganze Funktion von x mit in $\sqrt{D}$ ganzen Koeffizienten verstanden.

Eine Funktion von x in $\sqrt{D}$ wird eine irreduktible Funktion oder Primfunktion n^{ten} Grades einer Primzahl $\mathfrak{p}$ des Bereichs $(\sqrt{D})$ genannt, wenn sie den Grad n nicht übersteigt, bei x^n den Koeffizienten 1 hat und in Bezug auf den Modul $\mathfrak{p}$ durch keine Funktion von x in $\sqrt{D}$ von geringerem als dem n^{ten} und höherem als dem 0ten Grade teilbar ist.

2.

Ist $\mathfrak{p}$ eine Primzahl des Bereichs $(\sqrt{D})$, ν ihre Norm, so besteht ein vollständiges Restsystem R von $\mathfrak{p}$ aus ν Zahlen in

$\sqrt{D}$ und jede Funktion von x in $\sqrt{D}$, welche den Grad $n-1$ nicht übersteigt, ist einer und nur einer Funktion

$$\omega = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

nach dem Modul $\mathfrak{p}$ kongruent, deren Koeffizienten zu R gehören. Die Anzahl der Funktionen ω ist ν^n.

Die Bestimmung des über alle Funktionen ω zu erstreckenden Produkts

$$P_n = \Pi(x^n + \omega)$$

in Bezug auf den Modul $\mathfrak{p}$ führt zu dem Produkte aller Primfunktionen n^{ten} Grades von $\mathfrak{p}$.

Es sei y eine Unbestimmte und über alle Funktionen ω erstreckt

$$f(y) = \Pi(y + \omega).$$

Ist ω_1 eine der Funktionen ω, so durchläuft $\omega + \omega_1$ in Bezug auf den Modul $\mathfrak{p}$ zugleich mit ω dieselben Funktionen wie ω selbst und man hat

$$f(y + \omega_1) \equiv f(y) \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Hieraus folgt

$$f'(y + \omega_1) - f'(y) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

und, wenn $y = 0$ gesetzt wird,

$$f'(\omega_1) - f'(0) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Da diese Kongruenz für alle ν^n Werte von ω_1 besteht, die Funktion $f'(y) - f'(0)$ aber in y den Grad ν^n nicht erreicht, so ist identisch in y

$$f'(y) - f'(0) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

und $f(y)$ hat die Gestalt

$$f(y) \equiv f_1(y^p) + C_0 y \pmod{\mathfrak{p}},$$

wo $C_0 = f'(0)$ ist; p bezeichnet die rationale Primzahl, in welcher $\mathfrak{p}$ aufgeht und $f_1(y)$ eine ganze Funktion vom Grade

$\frac{1}{p}\nu^n$, deren Koeffizienten ganze Funktionen von x in $\sqrt{D}$ sind und in welcher die höchste Potenz von y den Koeffizienten 1 hat.

Ist $\nu^n > p$, so folgt weiter, wenn ω_1 wieder eine der Funktionen ω bedeutet,

$$f(y+\omega_1)-f(y) \equiv f_1(y^p+\omega_1^p)-f_1(y^p)+C_0\omega_1 \pmod{\mathfrak{p}}$$

und es ist

$$f_1(y^p+\omega_1^p)-f_1(y^p)+C_0\omega_1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Nach Ersetzung von y^p durch y wird daher

$$\begin{aligned} f_1(y+\omega_1^p)-f_1(y)+C_0\omega_1 &\equiv 0, \\ f_1'(y+\omega_1^p)-f_1'(y) &\equiv 0, \\ f_1'(\omega_1^p)-f_1'(0) &\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}. \end{aligned}$$

Die Erhebung der Gleichung

$$\vartheta^2-2\frac{\sigma-1}{\sigma}\vartheta+\frac{(\sigma-1)^2-D}{\sigma^2}=0$$

in die p^{te} Potenz ergibt

$$\vartheta^{2p}-2\frac{\sigma-1}{\sigma}\vartheta^p+\frac{(\sigma-1)^2-D}{\sigma^2}=(\vartheta^p-\vartheta)(\vartheta^p-\vartheta_1)\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

wo

$$\vartheta_1=\frac{\sigma-1-\sqrt{D}}{\sigma}$$

ist und es muß entweder

$$\vartheta^p-\vartheta\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

oder

$$\vartheta^p-\vartheta_1\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

sein. Daher ist entweder

$$\omega_1^p\equiv\omega_1(x^p)$$

oder

$$\omega_1^p\equiv\omega_1'(x^p),$$

wo ω_1' den in $\sqrt{D}$ konjugierten Ausdruck von ω_1 bezeichnet. In beiden Fällen durchläuft ω_1^p zugleich mit ω_1 lauter nach $\mathfrak{p}$ inkongruente Funktionen und es muß identisch in y

$$f_1'(y) - f_1'(0) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

sein. Die Funktion $f_1(y)$ hat demnach die Gestalt

$$f_1(y) \equiv f_2(y^p) + C_1 y \pmod{\mathfrak{p}}$$

und es wird

$$f(y) \equiv f_2(y^{p^2}) + C_1 y^p + C_0 y \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Die Fortsetzung dieser Schlüsse führt in dem Falle $\nu = p$ nach n Schritten zu der Kongruenz

$$f(y) \equiv y^{p^n} + C_{n-1} y^{p^{n-1}} + \dots + C_1 y^p + C_0 y \pmod{\mathfrak{p}}$$

und in dem Falle $\nu = p^2$ nach $2n$ Schritten zu der Kongruenz

$$f(y) \equiv y^{p^{2n}} + C'_{2n-1} y^{p^{2n-1}} + \dots + C'_1 y^p + C'_0 y \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Ist $\nu = p^2$, so sind die Koeffizienten

$$C'_1,\ C'_3, \dots C'_{2n-1}$$

durch $\mathfrak{p}$ teilbar. Denn $\vartheta\omega$ durchläuft mit ω nach dem Modul $\mathfrak{p}$ dieselben Werte wie ω selbst, weil ϑ zu $\mathfrak{p}$ teilerfremd ist, und auf Grund der Kongruenzen

$$\vartheta^p \equiv \vartheta_1, \quad \vartheta^{p^2} \equiv \vartheta \pmod{\mathfrak{p}}$$

ist

$$f(\vartheta y) \equiv \Pi(\vartheta y + \vartheta\omega) \equiv \vartheta^{p^{2n}} \Pi(y+\omega) \equiv \vartheta f(y)$$

oder

$$(\vartheta_1 - \vartheta)(C'_{2n-1} y^{p^{2n-1}} + \dots + C'_1 y) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

woraus

$$C'_1 \equiv 0,\ C'_3 \equiv 0 \dots C'_{2n-1} \equiv 0$$

folgt.

Somit ist in allen Fällen

$$f(y) \equiv y^{\nu^n} + C_{n-1} y^{\nu^{n-1}} + \dots + C_1 y^\nu + C_0 y \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Da

$$f(1) \equiv 0,\ f(x) \equiv 0 \dots f(x^{n-1}) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

$$f(x^n) = P_n$$

ist, so bestehen die Kongruenzen

$$0 \equiv 1 + C_{n-1} + \dots + C_0,$$

$$0 \equiv x^{\nu^n} + C_{n-1} x^{\nu^{n-1}} + \dots + C_0 x,$$

$$\dots$$

$$P_n \equiv x^{n\nu^n} + C_{n-1} x^{n\nu^{n-1}} + \dots + C_0 x^n \pmod{\mathfrak{p}},$$

welche, mit den Koeffizienten von $z^0, z^1, \dots z^n$ in der Entwicklung des Produktes $(z-x)(z-x^\nu)\dots(z-x^{\nu^{n-1}})$ multipliziert, die Summe

$$P_n \equiv (x^{\nu^n} - x)(x^{\nu^n} - x^\nu) \dots (x^{\nu^n} - x^{\nu^{n-1}}) \pmod{\mathfrak{p}}$$

ergeben.

3.

Es sei, über alle Teiler δ von n erstreckt,

$$X_n = \Pi \left(x^{\nu^{\frac{n}{\delta}}} - x \right)^{\mu(\delta)},$$

$$F_n = \Pi \left(x^{\frac{n}{\delta}} - 1 \right)^{\mu(\delta)},$$

wo $\mu(\delta)$ bei quadratfreiem δ je nach der geraden oder ungeraden Anzahl der Primfaktoren von δ den Wert 1 oder -1 und bei nicht quadratfreiem δ den Wert 0 hat. Es ist dann

$$x^{\nu^n} - x = \Pi X_\delta,$$

$$x^n - 1 = \Pi F_\delta.$$

Bezeichnet $\mathfrak{P}_n$ das Produkt aller Primfunktionen n^{ten} Grades von x der Primzahl $\mathfrak{p}$ oder die Einheit, je nachdem solche Funktionen vorhanden sind oder nicht, und $\mathfrak{N}$ das Produkt aller zerfallenden Funktionen n^{ten} Grades mit dem Koeffizienten 1 bei der höchsten Potenz von x, so ist

$$P_n \equiv \mathfrak{N}\mathfrak{P}_n \pmod{\mathfrak{p}}$$

und daher, weil $\mathfrak{R}$ nach dem Modul $\mathfrak{p}$ in einer Potenz von P_{n-1} aufgeht,

$$P_{n-1}^h \mathfrak{P}_n \equiv 0 \quad (\text{modd } \mathfrak{p}, X_n).$$

X_n ist zu jeder Funktion $x^{\nu^m} - x$ nach $\mathfrak{p}$ teilerfremd, in welcher $m < n$ ist. Denn der größte gemeinschaftliche Teiler von $\nu^m - 1$ und $\nu^n - 1$ ist $\nu^d - 1$, wo d den größten gemeinschaftlichen Teiler von m und n bedeutet, und es besteht eine Identität

$$\frac{\nu^n - 1}{\nu^d - 1} = A(x^{\nu^m - 1} - 1) + B \frac{x^{\nu^n - 1} - 1}{x^{\nu^d - 1} - 1}$$

und somit, weil $d < n$ ist, die Kongruenz

$$1 \equiv A(x^{\nu m - 1} - 1) \quad (\text{modd } \mathfrak{p}, X_n),$$

wo A, B ganze ganzzahlige Funktion von x bezeichnen.

Hienach ist die Funktion P_{n-1}^k, welche einem Produkt von Funktionen $x^{p^m} - x$ mit unter n liegendem m nach $\mathfrak{p}$ kongruent ist, zu X_n teilerfremd und man hat

$$\mathfrak{P}_n \equiv 0 \quad (\text{modd } \mathfrak{p}, X_n).$$

Andrerseits geht, wenn $n, d, d', \ldots 1$ die Teiler von n bezeichnet, das Produkt

$$X_d X_{d'} \ldots X_1$$

in einer Potenz von P_{n-1} auf und die Kongruenz

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}\mathfrak{P}_n \equiv P_n &\equiv (x^{\nu^n} - x) \ldots (x^{\nu^n} - x^{\nu^{n-1}}) \\ &\equiv X_n X_d \ldots X_1 P_{n-1}^{\nu} \quad (\text{mod } \mathfrak{p}) \end{aligned}$$

ergibt

$$P_{n-1}^k X_n \equiv 0 \quad (\text{modd } \mathfrak{p}, \mathfrak{P}_n).$$

Da aber die Funktion P_{n-1}^k ein Produkt von Funktionen von geringerem als dem n^{ten} Grad ist, so ist sie zu $\mathfrak{P}_n$ teilerfremd und es muß

$$X_n \equiv 0 \quad (\text{modd } \mathfrak{p}, \mathfrak{P}_n)$$

sein.

Somit ist

$$\mathfrak{P}_n \equiv X_n \quad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p})$$

und die Primfunktionen n^{ten} Grades von $\mathfrak{p}$ werden durch Zerlegung von X_n gewonnen. Ihre Anzahl ist

$$\frac{1}{n}\Sigma\,\mu(\delta)\nu^{\frac{n}{\delta}}.$$

4.

Gehört ν nach dem Modul n zum Exponenten t, so geht $x^n - 1$ und daher auch F_n in $x^{\nu^t} - x$ auf. Dagegen ist F_n zu jeder Funktion $x^{\nu^\rho} - x$ teilerfremd, in welcher $\rho < n$ ist. Da aber

$$x^{\nu^t} - x = \Pi X_d$$

ist, wo d alle Teiler von t zu durchlaufen hat, so muß F_n in X_t aufgehen. Die Funktion F_n zerfällt demnach in $\frac{\varphi(n)}{t}$ Primfunktionen t^{ten} Grades nach dem Modul $\mathfrak{p}$.

5.

Ist ν von der Form $h\lambda + 1$, wo λ eine ungerade Primzahl bezeichnet, und gehört ν nach dem Modul $n = \lambda^x$ zu einem Exponenten, welcher > 1 ist, so sind die Primfunktionen der Primzahl $\mathfrak{p}$ von F_n Funktionen von x^λ.

Denn es sei $\mu = \lambda^\rho$ die höchste in $\nu - 1$ aufgehende Potenz von λ. ν gehört nach dem Modul μ zum Exponenten 1 und F_μ zerfällt demzufolge nach dem Modul $\mathfrak{p}$ in $\varphi(\mu)$ Primfunktionen ersten Grades. Es sei

$$F_\mu \equiv \Pi(x - a) \quad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}).$$

Ersetzt man x durch $x^{\frac{n}{\mu}}$, wodurch F_μ in F_n übergeht, so wird

$$F_n \equiv \Pi(x^{\frac{n}{\mu}} - a) \quad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}).$$

Andrerseits gehört ν nach dem Modul n zum Exponenten $\frac{n}{\mu}$ und F_n zerfällt nach dem Modul $\mathfrak{p}$ in lauter Primfunktionen

vom Grade $\frac{n}{\mu}$. Letztere müssen daher mit den Funktionen $x^{\frac{n}{\mu}} - a$ zusammenfallen und es ist $\frac{n}{\mu} = \lambda^{\varkappa-\rho} > 1$.[1]

Für die Primzahl 2 gilt der Satz in folgender Fassung. Wenn die Norm ν der Primzahl $\mathfrak{p}$ von der Form $4h+1$ ist und nach dem Modul $n = 2^{\varkappa}$ zu einem Exponenten t gehört, welcher > 1 ist, so sind die Primfunktionen der Primzahl $\mathfrak{p}$ von F_n Funktionen von x^2.

Denn es sei r die höchste in $\nu - 1$ aufgehende Potenz von 2. ν gehört nach dem Modul r zum Exponenten 1 und t ist $= \frac{n}{r}$. Daher ist

$$F_r \equiv \Pi(x-a) \quad (\text{mod } \mathfrak{p})$$

und nach Ersetzung von x durch $x^{\frac{n}{r}}$:

$$F_n \equiv \Pi(x^t - a) \quad (\text{mod } \mathfrak{p}).$$

Da andrerseits die Primfunktion von F_n vom Grade t sind, so müssen sie mit den Funktionen $x^t - a$ zusammenfallen.

---

[1] Serret, Cours d'algèbre supérieure.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVI. BAND. X. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Über rotierende Scheiben gleichen Fliehkraftwiderstandes

von

Alfred Basch und **Alfons Leon.**

(Mit 5 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 24. Oktober 1907.)

Es ist eine der Hauptaufgaben der Physiker und Ingenieure, ihre Apparate, Maschinen und Tragkonstruktionen technisch vollkommen zu gestalten. In keinem Punkte eines einzelnen Maschinenelementes darf die Elastizitätsgrenze überschritten werden oder gar eine Trennung der Moleküle eintreten. Hiezu kommt oftmals die Forderung, an Material möglichst zu sparen, mit anderen Worten, keinen Punkt des elastischen Körpers bezüglich der Beanspruchung zu bevorzugen. — Ein derartiges Formgebungsproblem tritt bei der Konstruktion rasch umlaufender Scheibenräder im Dampfturbinenbau zu Tage. Aufgabe der vorliegenden Studie ist es, zu untersuchen, ob die von den Konstrukteuren de Laval's verwendete »Scheibe gleicher Festigkeit« die einzige Form einer Scheibe gleichen Fliehkraftwiderstandes darstellt und ob, sofern andere Lösungen auffindbar sind, auch diesen der Mangel anhaftet, nicht als Scheiben mit Bohrung und Nabe verwendbar zu sein. —

Das Wort »Scheibe« bezeichne einen in Bezug auf eine zur Umdrehungsachse senkrechte Ebene symmetrisch gestalteten Rotationskörper, dessen axiale Ausdehnung im Vergleiche zur radialen eine geringe ist. Außerdem werde zunächst geringe Neigung der Meridianlinien der den Körper begrenzenden Flächen gegen die Symmetrieebene vorausgesetzt. Auf diese Weise ist es statthaft, anzunehmen, daß der Spannungs- und Verzerrungszustand in jedem Punkte nur von der Entfernung

von der Umdrehungsachse abhängig ist und daß die Richtungen des halbpolaren Koordinatensystems Hauptspannungsrichtungen sind. In Wirklichkeit gibt es nur eine bestimmte dreifach unendliche Mannigfaltigkeit von Umdrehungskörpern, bei denen der letzte Teil der Annahme[1] zutrifft, doch ist der durch diese Vernachlässigungen begangene Fehler bei den in Frage kommenden Rotationskörpern ein geringer, wie Stodola durch ein Näherungsverfahren nachgewiesen hat.[2]

z sei die halbe Scheibenbreite, ρ die radiale Punktverschiebung im Abstande r von der Umdrehungsachse. Die tangentiale Dehnung $\lambda_t = \frac{\rho}{r}$, die radiale Dehnung $\lambda_r = \frac{d\rho}{dr}$. μ sei die spezifische Masse, E der Young'sche Elastizitätsmodul, m die Poisson'sche Konstante des homogen und isotrop gedachten Materials. Sofern Druckspannungen als positiv bezeichnet werden, ist die tangentiale, beziehungsweise radiale Normalspannung

$$\begin{aligned} \sigma_t &= -\frac{mE}{m^2-1}\left[m\frac{\rho}{r}+\frac{d\rho}{dr}\right], \\ \sigma_r &= -\frac{mE}{m^2-1}\left[m\frac{d\rho}{dr}+\frac{\rho}{r}\right]. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Scheibe rotiere mit der unveränderlichen Winkelgeschwindigkeit w. Die Gleichgewichtsbedingung für das durch zwei koaxiale Kreiszylinder mit den Radien r und $r+dr$ sowie zwei einen sehr kleinen Winkel miteinander einschließenden Meridianebenen begrenzte Scheibenelement lautet:

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r . r . z) - \sigma_t z - \mu w^2 r^2 z = 0.^{[3]} \tag{2}$$

[1] A. Leon, Über das elastische Gleichgewicht derjenigen gleichmäßig sich drehenden Drehungskörper, deren Hauptspannungsrichtungen die Koordinatenrichtungen sind. Diese Sitzungsberichte, Bd. CXV, Abt. IIa, November 1906. — Derselbe, Über die Materialspannung in rotierenden Körpern. Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architektenvereines, 1907, Nr. 28.

[2] A. Stodola, Die Nebenspannungen in rasch umlaufenden Scheibenrädern. Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, 1907, Nr. 32.

[3] Siehe z. B. A. Stodola, Die Dampfturbinen. 3. Auflage. Verlag von Julius Springer, Berlin, p. 154 ff.

Setzt man die aus Gleichung (1) sich ergebenden Spannungen in Gleichung (2) ein, so erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\rho}{dr^2}+\left[\frac{dlz}{dr}+\frac{1}{r}\right]\frac{d\rho}{dr}+\left[\frac{1}{mr}\cdot\frac{dlz}{dr}-\frac{1}{r^2}\right]\rho+ \\ +\frac{m^2-1}{m^2}\cdot\frac{\mu w^2}{E}r=0, \qquad (3)$$

aus welcher sich bei einer Scheibe mit gegebener Meridianlinie, sobald auch die Grenzbedingungen vorliegen, die radiale Punktverschiebung, die Hauptdehnungen und Hauptspannungen berechnen lassen. — Nun ist aber hier umgekehrt eine Scheibe zu suchen, bei der die Sicherheit gegen Bruch in allen Punkten dieselbe ist. Die für die Beanspruchung maßgebende Funktion des Spannungs- oder Verzerrungszustandes, deren Form sich nach der Anschauung über das Maß der Bruchgefahr richtet, muß vom Achsabstande unabhängig erscheinen. Dies bezeichne allgemein die Gleichung

$$F\left(\frac{\rho}{r},\frac{d\rho}{dr}\right)=k, \qquad (4)$$

in der k einen konstanten Wert bedeutet. Nun ist ρ aus Gleichung (4) zu bestimmen und in Gleichung (3) einzusetzen, die vorher auf die für die Auflösung nach z zweckentsprechendere Form

$$\frac{d^2\rho}{dr^2}+\frac{1}{r}\left(\frac{d\rho}{dr}-\frac{\rho}{r}\right)+\frac{dlz}{dr}\left(\frac{d\rho}{dr}+\frac{1}{m}\cdot\frac{\rho}{r}\right)+ \\ +\frac{m^2-1}{m^2}\,\frac{\mu w^2}{E}r=0 \qquad (5)$$

gebracht werden möge. In der Folge soll auch der Einfluß der zu Grunde gelegten Bruchtheorien auf die Form der Scheiben gleicher Fliehkraftfestigkeit untersucht werden.

II.

Stellt man die Bedingung, daß die tangentiale und radiale Spannung überall denselben konstanten Wert besitzen, also

$$\sigma_t = \sigma_r = \sigma = \text{konstant}, \tag{6}$$

so folgt aus (1), daß auch tangentiale und radiale Dehnung konstant und einander gleich sind

$$\left.\begin{aligned} \lambda_t = \lambda_r = \frac{\rho}{r} = \frac{d\rho}{dr} = \lambda, \\ \rho = \lambda r. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Die radiale Punktverschiebung ist dem Achsabstande proportional. Den Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung gibt die Gleichung

$$\sigma = -\frac{m}{m-1} E\lambda. \tag{8}$$

Bei Berücksichtigung von (7) gibt die Integration von (5)

$$l\frac{z}{z_0} = -\frac{m-1}{2m} \cdot \frac{\mu w^2}{\lambda E} r^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu w^2}{\sigma} r^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{p^2} \tag{9}$$

oder

$$z = z_0 e^{+\frac{1}{2} \cdot \frac{\mu w^2}{\sigma} r^2} = z_0 e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{p^2}}. \tag{10}$$

Dies die Gleichung der Meridianlinie der von den Konstrukteuren de Laval's benützten und von Stodola eingehend behandelten Scheibe.[1] Sie besitzt im Achsabstande

$$p = \frac{1}{\sqrt{-\frac{\mu w^2}{\sigma}}}$$

einen Wendepunkt. Die willkürliche Scheibendicke z_0 in der Umdrehungsachse zeigt, daß, gleiches Material und gleiche Winkelgeschwindigkeit vorausgesetzt, für die Meridianlinien ein einfach unendliches in Bezug auf die Abszissen(r-)achse affines Kurvensystem als Lösung hervorgeht. Die Variation von z_0 erfährt durch die vorausgesetzte geringe Neigung der

---

[1] Stodola, Die Dampfturbinen, 1905, p. 157. Im folgenden sei die in Gleichung (9) und (10) dargestellte Form der Kürze wegen die Stodola-Laval'sche Lösung genannt.

Meridianlinie gegen die Abszissenachse nach oben eine Beschränkung. Die dem Absolutbetrage nach größte Neigung einer jeden Kurve, in diesem Falle jene in deren Wendepunkt, ist durch den Differentialquotienten

$$\left[\frac{dz}{dr}\right]_{r=p} = -\frac{[z]_{r=p}}{p} = -\frac{z_0}{p.\sqrt{e}} = -0\cdot 60653\,\frac{z_0}{p}.$$ [1]

gegeben. Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Form dieser Scheiben von den Elastizitätskonstanten des Materials unabhängig ist, soweit diese nicht auf den Wert der zugelassenen Spannung σ einwirken.

Die Abszissenachse ist Asymptote der Meridianlinie. Da sich die Scheibe demnach ins Unendliche erstrecken würde, wird der äußere Teil bei Aufrechterhaltung des elastischen Gleichgewichts durch einen Ring von Rechteckquerschnitt ersetzt. Ist r_i der innere, r_a der äußere Radius des Ringes, $2B$ seine Ausdehnung in axialer Richtung, $2z_i$ die Breite der Scheibe am (abgerundeten) Übergange, so ist der Zusammenhang von r_a und B durch die Bedingung gleicher radialer Punktverschiebung und Radialspannung für Ring und Scheibe am Übergange gegeben:

$$B = \frac{(m+1)r_a^2+(m-1)r_i^2}{(3m+1)r_a^2+(m-1)(r_i^2-4p^2)} \cdot \frac{4p^2}{r_a^2-r_i^2} \cdot z_i. \quad (11)$$ [2]

Es gibt also einmal unendlich viele solcher Ringe (bei gegebenem p, r_i und z_i). Man trifft aus dieser Mannigfaltigkeit die Wahl durch Rücksichten konstruktiver Natur.

---

[1] Es sei nebenbei erwähnt, daß der Rauminhalt der unendlich ausgedehnten Scheibe gleich ist dem doppelten Rauminhalte jenes Zylinders, dessen Basis der Wendekreis bestimmt und dessen Höhe der Maximaldicke gleich ist; daß das Trägheitsmoment der Scheibe dem achtfachen Trägheitsmoment des obigen Zylinders gleichkommt. Daraus folgt, daß der Trägheitsradius der Scheibe gleich wird dem doppelten Trägheitsradius des Zylinders. — Die Wendetangente schneidet die r-Axe im doppelten Wendepunktabstande $2p$.

[2] Liegt eine rotierende Zylinderscheibe mit den Radien r_i und r_a der Mantelflächen vor und wirkt auf den Innenmantel die gleichförmig verteilte Normalspannung σ_i, auf den Außenmantel die gleichförmig verteilte Normal-

Um einen anschaulichen Vergleich durch Zeichnung und Zahlenangaben zwischen der bis hieher besprochenen Scheibe

---

spannung σ_a, so ist die radiale Punktverschiebung im Abstande r von der Umdrehungsaxe

$$\rho = -\frac{m^2-1}{8m^2}\,\frac{\mu w^2}{E}\left[\frac{3m+1}{m+1}(r_a^2+r_i^2)+\frac{3m+1}{m-1}\,\frac{r_a^2 r_i^2}{r^2}-r^2\right] - \frac{(m-1)r(r_a^2\sigma_a-r_i^2\sigma_i)+(m+1)\frac{r_a^2 r_i^2}{r^2}(\sigma_a-\sigma_i)}{(r_a^2-r_i^2)mE};$$

die tangentiale, beziehungsweise die radiale Normalspannung sind gegeben durch

$$\sigma_t = -\frac{1}{8m}\mu w^2\left[(3m+1)(r_a^2+r_i^2)+\frac{r_a^2 r_i^2}{r^2}-(m+3)r^2\right] + \frac{1}{r_a^2-r_i^2}\left[r_a^2\sigma - r_i^2\sigma_i+\frac{r_a^2 r_i^2}{r^2}(\sigma_a-\sigma_i)\right],$$

$$\sigma_r = -\frac{1}{8m}\mu w^2(3m+1)\left(r_a^2+r_i^2-\frac{r_a^2 r_i^2}{r^2}-r^2\right) + \frac{1}{r_a^2-r_i^2}\left[r_a^2\sigma_a-r_i^2\sigma_i-\frac{r_a^2 r_i^2}{r^2}(\sigma_a-\sigma_i)\right].$$

Im vorliegenden Falle wirkt auf den Außenmantel des Zylinders die Spannung $\sigma_a = 0$, auf den Innenmantel bei Annahme gleichförmiger Spannungsverteilung $\sigma_i = \frac{z_i}{B}\sigma$. Die radiale Verschiebung der Punkte des Zylindermantels ist somit

$$\rho_i = \frac{1}{4m}\,\frac{\mu w^2}{E}\left[(m-1)r_i^2+(3m+1)r_a^2\right]r_i + \frac{(m+1)r_a^2-(m-1)r_i^2}{mE(r_a^2-r_i^2)}\,\frac{z_i}{B}\,\sigma r_i.$$

Dieser Wert muß mit der für die Punkte desselben Radialabstandes der Scheibe zufolge (7) und (8) sich ergebenden Punktverschiebung

$$r_i = \lambda r_i = -\frac{m-1}{m}\,\frac{\sigma}{E}\,r_i$$

übereinstimmen, welche Bedingung zu Gleichung (11) führt.

mit den in den weiteren Abschnitten abzuleitenden zu ermöglichen, sei ein spezielles Beispiel herangezogen. Eine Scheibe aus Nickelstahl von $2\,r_i = 200\,cm$ Durchmesser rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit $w = 317 \cdot 22\ \mathrm{sec}^{-1}$ (entsprechend einer minutlichen Umlaufszahl 3029). Die spezifische Masse beträgt im terrestrischen Maße ausgedrückt $7 \cdot 95 . 10^{-6}\, kg\, cm^{-4}\, \mathrm{sec}^2$ (entsprechend dem spezifischen Gewichte $0 \cdot 0078\, kg\, cm^{-3}$). Die

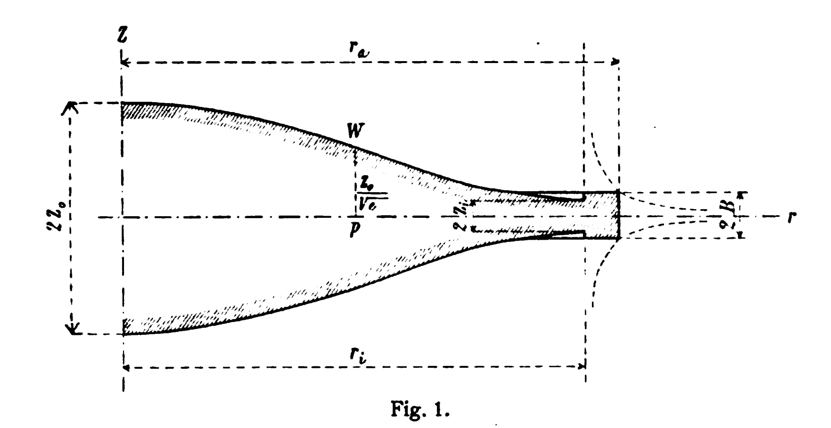


Fig. 1.

zugelassene Zugspannung sei $\sigma = -2000\, kg\, cm^{-2}$. Hieraus ergibt sich

$$\frac{1}{p^2} = -\frac{\mu w^2}{\sigma} = 0 \cdot 0004\, cm^{-2}$$

und der Wendepunktabstand $p = 50\, cm$. Es werde, um einer praktisch verwendbaren Scheibe nahe zu kommen, $z_0 = 5\, cm$ angenommen. Die numerische Berechnung der Scheibenstärken für verschiedene Radienwerte geschieht entsprechend (9) nach Übergang zu Brigg'schen Logarithmen mittels der Gleichung

$$\log z = 0 \cdot 69897 - 0 \cdot 000086858\, r^2.$$

Zahlentafel 1 gibt die Brigg'schen Logarithmen der Scheibendicken sowie diese selbst. In Fig. 1 ist die Scheibe samt Ring dargestellt. Die strichlierte Kurve ist der geometrische Ort der Eckpunkte der Querschnittsrechtecke der das elastische Gleichgewicht herstellenden Ringe unter der Voraussetzung, daß $m = 3$ gesetzt wird.

III.

Seit Poncelet und Grashof halten die Ingenieure des europäischen Kontinentes bei den Dimensionierungen an dem Prinzipe fest, daß die größte Dehnung (λ) in jedem Punkte (oder, was dasselbe bedeutet, die reduzierte Spannung $\sigma_{red} = -\lambda E$) unter einem gewissen, vom Material, allenfalls noch von der Beanspruchungsart und der verlangten Sicherheit abhängigen Wert liegen müsse. Hiebei ist es für die vorliegende Frage ohne Belang, ob auch eine negative Dehnung, eine Verkürzung, im stande sei, Bruch herbeizuführen, weil solche Scheiben durch die Fliehkraft nur Zugspannungen aufnehmen.

Die an die Spitze des vorigen Abschnittes an Stelle der allgemeinen Gleichung (4) tretende Bedingung (6) schloß zufolge (7) auch die Bedingung in sich, daß die beiden in Betracht kommenden Hauptdehnungen λ_t und λ_r überall denselben in jedem Achsabstande gleichen Wert haben müssen. Nun genügt es aber, wenn die eine dieser beiden Hauptdehnungen konstant ist, sofern die andere überall kleiner oder höchstens gleich groß wird. Würde Unveränderlichkeit der tangentialen Dehnung verlangt sein, also $\frac{\rho}{r} = \lambda =$ konstant, so wäre wieder $\rho = \lambda r$ und der früher behandelte Fall läge vor.

Anders liegt die Frage bei konstanter radialer Dehnung. Das Integral der nun an Stelle von (4) tretenden Bedingungsgleichung

$$\lambda_r = \frac{d\rho}{dr} = \lambda = \text{konst.} \tag{12}$$

lautet

$$\rho = \lambda r + C. \tag{13}$$

Ein Körper gleicher Festigkeit liegt dann vor, wenn

$$\lambda_t = \frac{\rho}{r} = \lambda + \frac{C}{r} < \lambda \tag{14}$$

ist, also wenn der Integrationskonstanten C ein negativer Wert gegeben wird. Die Integration von (7) gibt unter Berücksichtigung von (13)

$$l\frac{z}{z_0} = -ml\left[(m+1)\lambda + \frac{C}{r}\right] + ml[(m+1)\lambda] -$$

$$-\frac{m^2-1}{m}\cdot\frac{\mu w^2}{E}\left\{\frac{r^2}{2(m+1)\lambda} - \frac{Cr}{(m+1)^2\lambda^2} +\right.$$

$$\left. + \frac{C^2}{(m+1)^3\lambda^3}\, l\left[(m+1)\lambda\frac{r}{C}+1\right]\right\}. \quad (15)$$

Hiebei ist der neu eingeführten Integrationskonstanten die Form

$$lz_0 - ml[(m+1)\lambda]$$

gegeben worden, um den Vergleich mit der Stodola-Laval-schen Scheibe zu erleichtern. Zu demselben Zwecke werde die Bezeichnung

$$\sigma = \frac{m}{m-1}\sigma_{r\,red} = -\frac{m}{m-1}E\lambda$$

eingeführt und mit der Spannung σ weitergerechnet, obwohl ihr keine weitere physikalische Bedeutung zukommt. So geht (15) über in

$$l\frac{z}{z_0} = \frac{\mu w^2}{\sigma}\left\{\frac{1}{2}r^2 + \frac{m}{m^2-1}\frac{E}{\sigma}Cr +\right.$$

$$\left. + \frac{m^2}{(m^2-1)^2}\frac{E^2}{\sigma^2}C^2 l\left[1 - \frac{m^2-1}{m}\frac{\sigma}{E}\frac{r}{C}\right]\right\} -$$

$$-ml\left[1 - \frac{m}{m^2-1}\frac{E}{\sigma}\frac{C}{r}\right]. \quad (16)$$

Bei negativem C geht aber einem der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Logarithmen die reelle Bedeutung ab, da immer der eine oder der andere der beiden Numeri negativ wird. Ist aber C positiv, so ist die Scheibe wohl eine Scheibe konstanter radialer Dehnung, aber keine Scheibe konstanten Fliehkraftwiderstandes, da die Ungleichung (14) nicht erfüllt ist. $C = 0$ bedeutet aber die Stodola-Laval'sche Lösung. Es ergibt sich somit: I n a l l e n S c h e i b e n k o n s t a n t e r r a d i a l e r D e h n u n g i s t d i e t a n g e n t i a l e D e h n u n g g r ö ß e r a l s d i e r a d i a l e, i m G r e n z f a l l e i s t s i e i h r g l e i c h.

In Fig. 2 sind einige Scheiben konstanter radialer Dehnung verzeichnet. Zahlentafel 2 enthält die Ordinaten ihrer Meridianlinien, die unter der Voraussetzung $E = 2200000\, kg\, cm^{-2}$ und $m = 3$ nach der Gleichung

$$\log z = \log z_s + 0{\cdot}165\, C \left\{ 0{\cdot}43429\, r - 412{\cdot}5\, C \log\left[1 + \frac{r}{412{\cdot}5\, C}\right]\right\} - 3 \log\left[1 + \frac{412{\cdot}5\, C}{r}\right]$$

Fig. 2.

berechnet wurden. z_s bedeutet hiebei die Ordinate der Meridianlinie der Stodola-Laval'schen Scheibe für die gleiche Abszisse r. Es erweist sich auch als unmöglich, durch geringe Mehrbeanspruchung bemerkenswerte Materialersparnis zu erzielen.

IV.

Im Gegensatz zu ihren deutschen und französischen Kollegen sind die englischen und amerikanischen Ingenieure der Ansicht, daß die größte in einem Punkte auftretende Zugspannung für die Bruchgefahr maßgebend sei.[1] Der auf dieser von Lamé begründeten Hypothese[2] beruhende Rechnungs-

[1] Love, Lehrbuch der Elastizität. Deutsche Ausgabe von Timpe. Leipzig und Berlin, 1907, Verlag B. G. Teubner, p. 144.

[2] Lamé und Clapeyron, Mémoire sur l'equilibre intérieur des corps solides homogènes. Paris. Mém. pr. p. divers savants, t. 4, 1833.

vorgang wurde in Frankreich seit Poncelet und de Saint-Venant, in Deutschland seit Grashof verlassen. Wird diese Anschauung dem vorliegenden Problem zu Grunde gelegt, so ist eine Scheibe als solche konstanten Fliehkraftwiderstandes anzusehen, wenn

$$\sigma_t = \sigma = \text{konst.} \tag{17}$$

und

$$-\sigma_r \leqq -\sigma \tag{18}$$

ist. Aus (17) folgt unter Berücksichtigung von (1) die Differentialgleichung

$$m\frac{\rho}{r} + \frac{d\rho}{dr} = k \tag{19}$$

bei Einführung der Bezeichnung

$$k = -\frac{m^2-1}{m}\,\frac{\sigma}{E}. \tag{20}$$

Die allgemeine Lösung von (19) lautet

$$\rho = \frac{C}{r^m} + \frac{k}{m+1}r. \tag{21}$$

Da für $r=0$, ρ jeden endlichen Wert übersteigen würde, ist die Lösung nur dann verwertbar, wenn es gelingt (nötigenfalls künstlich) zu einer Scheibe mit Bohrung zu gelangen. Für die radiale Spannung ergibt sich

$$\sigma_r = \sigma + mE\frac{C}{r^{m+1}}. \tag{22}$$

Die Ungleichung (18) ist erfüllt, wenn C einen positiven Wert hat.

Nach Einsetzung von (21) in die allgemeine Differentialgleichung (5) erhält man

$$lz = -m\int\frac{\frac{1}{m^2C}\,\frac{\mu w^2}{E}\,r^{m+3}+1}{\frac{k}{(m^2-1)C}\,r^{m+1}-1}\cdot\frac{dr}{r}. \tag{23}$$ [1]

[1] Auf diese Scheiben hat Grübler aufmerksam gemacht. Siehe: Der Spannungszustand in rotierenden Scheiben veränderlicher Breite. Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, 1965.

Führt man die Bezeichnungen ein

$$a = \frac{1}{m^2 C}\,\frac{\mu w^2}{E}, \quad b = \frac{k}{(m^2-1)C}, \quad n = m+1; \tag{24}$$

so erhält man, nachdem

$$\int \frac{a r^{n+2}+1}{b r^n - 1}\,\frac{dr}{r} =$$

$$= \frac{a}{b}\left[\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2-n}\,\frac{1}{b}\,r^{2-n} + \frac{1}{2-2n}\,\frac{1}{b^2}\,r^{2-2n} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2-3n}\,\frac{1}{b^3}\,r^{2-3n} + \frac{1}{2-4n}\,\frac{1}{b^4}\,r^{2-4n} + \ldots\right], \tag{25}$$

$$l\frac{z}{z_0} = \frac{m^2-1}{m^2}\,\frac{\mu w^2}{kE}\left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{m-1}\,\frac{m^2-1}{k}\,\frac{C}{r^{m+1}} - \right.$$
$$- \frac{1}{2m}\left(\frac{m^2-1}{k}\right)^2 \frac{C^2}{r^{2m}} -$$
$$- \frac{1}{3m+1}\left(\frac{m^2-1}{k}\right)^3 \frac{C^3}{r^{3m+1}} -$$
$$- \frac{1}{4m+2}\left(\frac{m^2-1}{mk}\right)^4 \frac{C^4}{r^{4m+2}} -$$
$$\left. - \frac{1}{5m+3}\left(\frac{m^2-1}{k}\right)^5 \frac{C^5}{r^{5m+3}} - \ldots\right]. \tag{26}$$

Hiebei ist $l z_0$ als Integrationskonstante eingeführt worden. Bei Berücksichtigung der Spannung σ geht die Gleichung über in

$$l\frac{z}{z_0} = \frac{\mu w^2}{\sigma}\left[\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{m-1}\,\frac{mE}{\sigma}\,\frac{C}{r^{m-1}} - \right.$$
$$- \frac{1}{2m}\,\frac{m^2E^2}{\sigma^2}\,\frac{C^2}{r^{2m}} +$$
$$+ \frac{1}{3m+1}\,\frac{m^3E^3}{\sigma^3}\,\frac{C^3}{r^{3m+1}} -$$
$$- \frac{1}{4m+2}\,\frac{m^4E^4}{\sigma^4}\,\frac{C^4}{r^{4m+2}} +$$
$$\left. + \frac{1}{5m+3}\,\frac{m^5E^5}{\sigma^5}\,\frac{C^5}{r^{5m+3}} - \ldots\right].\ [1] \tag{27}$$

---

[1] Die Reihe ist konvergent, wenn

$$r^{m+1} > -\frac{mE}{\sigma}\,C.$$

Bei negativem C ist dies, weil σ als Zugspannung negativ ist, stets der Fall.

Für jene Fälle, in denen die Poisson'sche Konstante m, daher auch n, eine ganze Zahl ist, läßt sich die Lösung des Integrals der Gleichung (25) in endlicher Form geben. Setzt man in der Gleichung

$$lz = -m \int \frac{a r^{n+2} + 1}{b r^n - 1} \frac{dr}{r} =$$

$$= -\frac{m}{b} \left[\frac{1}{2} a r^2 + \int \frac{\frac{a}{b} r^2 + 1}{r^n - \frac{1}{b}} \cdot \frac{dr}{r} \right] \tag{28}$$

im letzten Integral, sofern n eine ungerade Zahl und in allen Fällen, wo $b > 0$ ist,

$$\frac{1}{b} = g^n,$$

sofern n gerade und $b < 0$ ist

$$\frac{1}{b} = -g^n$$

und

$$\frac{a}{b} = h,$$

so handelt es sich bei der Lösung von (28) bloß um die Auswertung von

$$\int \frac{h r^2 + 1}{r^n - g^n} \frac{dr}{r},$$

beziehungsweise

$$\int \frac{h r^2 + 1}{r^n + g^n} \frac{dr}{r}.$$

Für die wichtigsten ganzzahligen Werte der Poissonschen Konstanten mögen die Formen der Lösung entwickelt werden.

1. $m = 4$.

Die Partialbruchzerlegung geschieht nach der Gleichung:

$$\frac{hr^2+1}{r^5-g^5}\cdot\frac{1}{r} = -\frac{1}{g^5}\cdot\frac{1}{r} + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{g^3}+\frac{1}{g^5}\right)\frac{1}{r-g} +$$

$$+\frac{\left[\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{g^5} - \frac{1}{10}(\sqrt{5}+1)\frac{h}{g^3}\right]r - \frac{1}{10}(\sqrt{5}-1)\left(\frac{h}{g^2}+\frac{1}{g^4}\right)}{r^2-\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)rg+g^2} +$$

$$+\frac{\left[\frac{2}{5}\,\frac{1}{g^5} + \frac{1}{10}(\sqrt{5}-1)\frac{h}{g^3}\right]r + \frac{1}{10}(\sqrt{5}+1)\left(\frac{h}{g^2}+\frac{1}{g^4}\right)}{r^2+\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)rg+g^2}.$$

Nun ergibt die Integration

$$\int\frac{hr^2+1}{r^5-g^5}\cdot\frac{dr}{r} = \frac{1}{5}\left\{\frac{1}{g^5}\,l\,\frac{r^5-g^5}{r^5} + \frac{1}{2}\,\frac{h}{g^3}\left[\frac{1}{2}\left(l\,\frac{(r-g)^5}{r^5-g^5} + \sqrt{5}\,l\,\frac{r^2+\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)rg+g^2}{r^2-\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)rg+g^2}\right) +\right.\right.$$

$$+\sqrt{2}\left\{\sqrt{5+\sqrt{5}}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{10}}{5}\sqrt{5+\sqrt{5}}\left[\frac{r}{g}+\frac{1}{5}(\sqrt{5}+1)\right]-\right.$$

$$\left.\left.\left.-\sqrt{5-\sqrt{5}}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{10}}{5}\sqrt{5-\sqrt{5}}\left[\frac{r}{g}-\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\right]\right\}\right]\right\}$$

und infolgedessen

$$l\frac{z}{z_0}=-m\left[\frac{1}{2}\frac{a}{b}r^2+\frac{1}{5}\left\{l\frac{r^5-\frac{1}{b}}{r^5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt[5]{b^7}}\left[\frac{1}{2}\left(l\frac{\left(r-\frac{1}{\sqrt[5]{b}}\right)^5}{r^5-\frac{1}{b}}+\sqrt{5}\,l\frac{r^2+\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)r\frac{1}{\sqrt[5]{b}}+\frac{1}{\sqrt[5]{b^2}}}{r^2-\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)r\frac{1}{\sqrt[5]{b}}+\frac{1}{\sqrt[5]{b^2}}}\right)+\right.\right.\right.$$

$$+\sqrt{2}\left\{\sqrt{5+\sqrt{5}}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{10}}{5}\sqrt{5+\sqrt{5}}\left[r\sqrt[5]{b}+\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)\right]-\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.-\sqrt{5-\sqrt{5}}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{10}}{5}\sqrt{5-\sqrt{5}}\left[r\sqrt[5]{b}-\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\right]\right\}\right]\right\}\right]$$

und mit Berücksichtigung von (24)

$$l\frac{z}{z_0} = -\frac{m^2-1}{m}\frac{\mu w^2}{kE}\frac{r^2}{2} - \frac{m}{5}\Bigg\{ l\,\frac{r^5 - \frac{m^2-1}{k}C}{r^5} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{m^2-1}{m}\frac{\mu w^2}{kE}\sqrt[5]{\frac{(m^2-1)^2}{k^2}C^2}\Bigg[\frac{1}{2}\Bigg(l\,\frac{\left(r-\sqrt[5]{\frac{m^2-1}{k}C}\right)^5}{r^5-\frac{m^2-1}{k}C} +$$

$$+\sqrt{5}\,l\,\frac{r^2+\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)r\sqrt[5]{\frac{m^2-1}{k}C}+\sqrt[5]{\frac{(m^2-1)^2}{k^2}C^2}}{r^2-\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)r\sqrt[5]{\frac{m^2-1}{k}C}+\sqrt[5]{\frac{(m^2-1)^2}{k^2}C^2}}\Bigg) +$$

$$+\sqrt{2}\Bigg\{\sqrt{5+\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{10}}{5}\sqrt{5+\sqrt{5}}\left[r\sqrt[5]{\frac{k}{(m^2-1)C}}+\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)\right] -$$

$$-\sqrt{5-\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{10}}{5}\sqrt{5-\sqrt{5}}\left[r\sqrt[5]{\frac{k}{(m^2-1)C}}+\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\right]\Bigg\}\Bigg]\Bigg\}.$$

Führt man gemäß der Gleichung (20) die Spannung ein, so ist

$$
\begin{aligned}
l\frac{z}{z_0} = &+\frac{1}{2}\frac{\mu w^2}{\sigma}r^2 - \frac{m}{5}\Biggl\{ l\,\frac{r^5+\frac{mE}{\sigma}}{r^5} - \frac{1}{2}\frac{\mu w^2}{\sigma}\sqrt[5]{\frac{m^2E^2}{\sigma^2}C^2}\Biggl[\frac{1}{2}\Biggl(l\,\frac{\left[r-\sqrt[5]{-\frac{mE}{\sigma}C}\right]^5}{r^5+\frac{mE}{\sigma}C}+ \\
&+\sqrt{5}\,l\,\frac{r^2+\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)r\sqrt[5]{-\frac{mE}{\sigma}C}+\sqrt[5]{\frac{m^2E^2}{\sigma^2}C^2}}{r^2-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)r\sqrt[5]{-\frac{mE}{\sigma}C}+\sqrt[5]{\frac{m^2E^2}{\sigma^2}C^2}}\Biggr)+ \\
&+\sqrt{2}\Biggl\{\sqrt{5+\sqrt{5}}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{10}}{5}\sqrt{5+\sqrt{5}}\left[r\sqrt[5]{-\frac{\sigma}{mEC}}+\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)\right]- \\
&-\sqrt{5-\sqrt{5}}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{10}}{5}\sqrt{5-\sqrt{5}}\left[r\sqrt[5]{-\frac{\sigma}{mEC}}-\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\right]\Biggr\}\Biggr]\Biggr\}.
\end{aligned}
$$

Bei Einführung des Wertes Vier der Poisson'schen Zahl ergibt sich nach einer kleinen Umformung das schließliche Resultat:

$$
\begin{aligned}
l\frac{z}{z_0} = \frac{1}{2}\frac{\mu w^2}{\sigma} r^2 - \frac{4}{5}\Biggl\{ l\,\frac{r^5+\frac{4E}{\sigma}C}{r^5} - \frac{1}{2}\frac{\mu w^2}{\sigma}\sqrt[5]{\frac{16E^2}{\sigma^2}C^2}\Biggl[\frac{1}{2}\Biggl(l\,\frac{\left[r+\sqrt[5]{\frac{4E}{\sigma}C}\right]^5}{r^5+\frac{4E}{\sigma}C} + \\
+\sqrt{5}\, l\,\frac{r^2-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\,r\sqrt[5]{\frac{4E}{\sigma}C}+\sqrt[5]{\frac{16E^2}{\sigma^2}C^2}}{r^2+\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\,r\sqrt[5]{\frac{4E}{\sigma}C}+\sqrt[5]{\frac{16E^2}{\sigma^2}C^2}} + \\
+\sqrt{2}\Biggl\{\sqrt{5-\sqrt{5}}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{10}}{5}\sqrt{5-\sqrt{5}}\left[r\sqrt[5]{\frac{\sigma}{4E}C}+\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\right] - \\
-\sqrt{5+\sqrt{5}}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{10}}{5}\sqrt{5+\sqrt{5}}\left[r\sqrt[5]{\frac{\sigma}{4E}C}-\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)\right]\Biggr\}\Biggr)\Biggr]\Biggr\}. \qquad (29)
\end{aligned}
$$

2. $m = 3$.

In diesem Fall ist die Form der Lösung bedeutend einfacher. Für C, daher auch $b > 0$ entfallen in der Lösung die zyklometrischen Glieder. Die Partialbruchzerlegung lautet

$$\frac{hr^2+1}{r^4-g^4}\cdot\frac{1}{r} = -\frac{1}{g^4}\cdot\frac{1}{r} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{g^4}+\frac{h}{g^2}\right)\left(\frac{1}{r+g}+\frac{1}{r-g}\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{g^4}-\frac{h}{g^2}\right)\frac{r}{r^2+g^2},$$

wonach hervorgeht

$$\int\frac{hr^2+1}{r^4-g^4}\,\frac{dr}{r} = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{g^4}\,l\,\frac{r^4-g^4}{r^4} + \frac{h}{g^2}\,l\,\frac{r^2-g^2}{r^2+g^2}\right\},$$

daher

$$l\,\frac{z}{z_0} = -m\left[\frac{1}{2}\,\frac{a}{b}\,r^2 + \frac{1}{4}\left\{l\,\frac{r^4-\frac{1}{b}}{r^4} + \frac{a}{\sqrt{b^3}}\,l\,\frac{r^2-\frac{1}{\sqrt{b}}}{r^2+\frac{1}{\sqrt{b}}}\right\}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{m^2-1}{m}\,\frac{\mu w^2}{kE}\,r^2 - \frac{m}{4}\,l\,\frac{r^4-\frac{m^2-1}{k}C}{r^4} -$$

$$-\frac{m^2-1}{4m}\cdot\frac{\mu w^2}{kE}\sqrt{\frac{m^2-1}{k}C}\;l\,\frac{r^2-\sqrt{\frac{m^2-1}{k}C}}{r^2+\sqrt{\frac{m^2-1}{k}C}} =$$

$$= +\frac{1}{2}\,\frac{\mu w^2}{\sigma}\,r^2 - \frac{m}{4}\,l\,\frac{r^4+\frac{mE}{\sigma}C}{r^4} +$$

$$+\frac{1}{4}\,\frac{\mu w^2}{\sigma}\sqrt{-\frac{mE}{\sigma}C}.\,l\,\frac{r^2-\sqrt{-\frac{mE}{\sigma}C}}{r^2+\sqrt{-\frac{mE}{\sigma}C}}.$$

Bei Berücksichtigung des Wertes Drei der Poisson'schen Zahl folgt

$$l\frac{z}{z_0} = \frac{1}{2}\frac{\mu w^2}{\sigma}r^2 - \frac{3}{4}\,l\,\frac{r^4 + \frac{3E}{\sigma}C}{r^4} +$$

$$+\frac{1}{4}\frac{\mu w^2}{\sigma}\sqrt{-\frac{3E}{\sigma}C}\,l\,\frac{r^2 - \sqrt{-\frac{3E}{\sigma}C}}{r^2 + \sqrt{-\frac{3E}{\sigma}C}}. \tag{30}$$

Sofern $C > 0$ ist, wird die im Resultat vorkommende Wurzel reell. Der Fall $C < 0$ gibt wohl eine Scheibe konstanter Tangentialspannung, aber zufolge (18) und (22) keine Scheibe konstanter Fliehkraftfestigkeit. Immerhin möge der Vollständigkeit des Lösungssystems wegen auch dieser Fall miteinbezogen sein. Um eine für ein negatives C sinngemäßere Form der Lösung zu erhalten, ist es zweckentsprechend, die Partialbruchzerlegung nach der Gleichung vorzunehmen:

$$\frac{hr^2+1}{r^4+g^4}\cdot\frac{1}{r} = +\frac{1}{g^4}\cdot\frac{1}{r} - \frac{\frac{1}{2g^4}r + \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{g^3}+\frac{h}{g}\right)}{r^2+\sqrt{2}rg+g^2} -$$

$$-\frac{\frac{1}{2g^4}r - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{g^3}+\frac{h}{g}\right)}{r^2-\sqrt{2}rg+g^2}.$$

Daher ist

$$\int\frac{hr^2+1}{r^4+g^4}\cdot\frac{dr}{r} = \frac{1}{4g^4}\,l\,\frac{r^4}{r^4+g^4} -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{h}{g^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{r\sqrt{2}+g}{g} - \operatorname{arctg}\frac{r\sqrt{2}-g}{g}\right) =$$

$$= \frac{1}{4g^4}\,l\,\frac{r^4}{r^4-g^4} - \frac{1}{2}\frac{h}{g^2}\operatorname{arctg}\frac{g^2}{r^2}.$$

Man erhält schließlich die mit (30) identische Gleichung:

$$l\,\frac{z}{z_0} = +\frac{1}{2}\,\frac{\mu w^2}{\sigma}\,r^2 + \frac{3}{4}\,l\,\frac{r^4}{r^4+\frac{3E}{\sigma}C} +$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{\mu w^2}{\sigma}\sqrt{\frac{3E}{\sigma}C}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\frac{3E}{\sigma}C}}{r^2}. \qquad (31)$$

3. $m = 2$.

Dieser Wert kommt zwar nicht bei den Konstruktionsmaterialien des Maschinenbaues, wohl aber bei Versuchsmaterialien wie z. B. Kautschuk in Betracht.

Die Partialbruchzerlegung lautet:

$$\frac{hr^2+1}{r^3-g^3}\cdot\frac{1}{r} = -\frac{1}{g^3}\cdot\frac{1}{r} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{g^3}+\frac{h}{g}\right)\frac{1}{r-g} +$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{g^3}-\frac{h}{g}\right)r + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{g^2}+h\right)}{r^2+rg+g^2}.$$

Daher ist

$$\int\frac{hr^2+1}{r^3-g^3}\,\frac{dr}{r} = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{g^3}\,l\,\frac{r^3-g^3}{r^3} +\right.$$

$$\left.+\frac{h}{g}\left[\frac{1}{2}\,l\,\frac{(r-g)^3}{r^3-g^3} + \sqrt{3}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2r}{g}+1\right)\right]\right\}.$$

Die Rücksubstitution ist wie in den früheren Fällen vorzunehmen und ergibt:

$$l\,\frac{z}{z_0} = +\frac{1}{2}\,\frac{\mu w^2}{\sigma}\,r^2 - \frac{1}{3}\left\{2l\,\frac{r^3+\frac{2E}{\sigma}C}{r^3} -\right.$$

$$-\frac{\mu w^2}{\sigma}\sqrt[3]{\frac{4E}{\sigma}C}\left[\frac{1}{2}\,l\,\frac{\left(r+\sqrt[3]{\frac{2E}{\sigma}C}\right)^3}{r^3+\frac{2E}{\sigma}C} -\right.$$

$$\left.\left.-\sqrt{3}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2r\sqrt[3]{\frac{\sigma}{2EC}}-1\right)\right]\right\}. \qquad (32)$$

Wie aus den Gleichungen (27), (29), (30) und (32) hervorgeht, besitzen die Oberflächen der Scheiben einen asymptotischen Zylinder, dessen Halbmesser r_0 aus der Gleichung

$$r_0^{m+1} + \frac{mE}{\sigma} C = 0 \tag{33}$$

zu berechnen ist. (Der Fall $C = 0$ bildet einen Sonderfall und gibt die Stodola-Laval'sche Lösung.) Für denselben Wert des Radius verschwindet zufolge (22) die Radialspannung, was ja auch aus der Bedingung der von Normalspannungen freien Oberfläche hervorgeht. Für die in diesem Zylinder nahe der Mittelebene liegenden Punkte der Scheibe ist dieses Ergebnis mit Vorsicht aufzunehmen, da wegen der zur Umdrehungsachse parallelen Asymptoten die Bedingung geringer Neigung der Meridianlinie gegen die Abszissenachse nicht erfüllt ist. Wären die Gleichungen in aller Strenge gültig, so wäre es möglich, ein (unendlich langes) zylindrisches Loch vom Halbmesser r_0 zu bohren, ohne daß das elastische Gleichgewicht des rotierenden Körpers gestört wäre. Es ergeben sich in diesem Falle tatsächlich Scheiben gleicher Festigkeit mit einem Loch in der Mitte. Der Asymptotenzylinder bildet dann die Welle, auf welcher die Scheibe sitzt. Natürlich muß ihr Profil für praktische Zwecke abgerundet werden. Der Wellenhalbmesser r_0 bestimmt nach Gleichung (33) die Konstante C.[1]

Fig. 3 zeigt die Meridianlinien der Scheiben mit konstanter Tangentialspannung. Nur die außerhalb der Stodola-Laval'schen Scheibe liegenden sind als solche konstanten Fliehkraftwiderstandes zu betrachten, da bei den innerhalb liegenden der Wert der Radialspannung jenen der unveränderlich gehaltenen Tangentialspannung überschreitet. Die Ordinaten sind für den in Abschnitt II zu Grunde gelegten Fall unter der Voraussetzung $m = 3$ gemäß den identischen Gleichungen (30) und (31) gerechnet nach den Formeln

---

[1] Ist es notwendig, zwischen Welle und Scheibe einen Hohlzylinder (eine Nabe) einzuschalten, so wären die Formeln in Anmerkung p. 1357 sinngemäß zu verwenden.

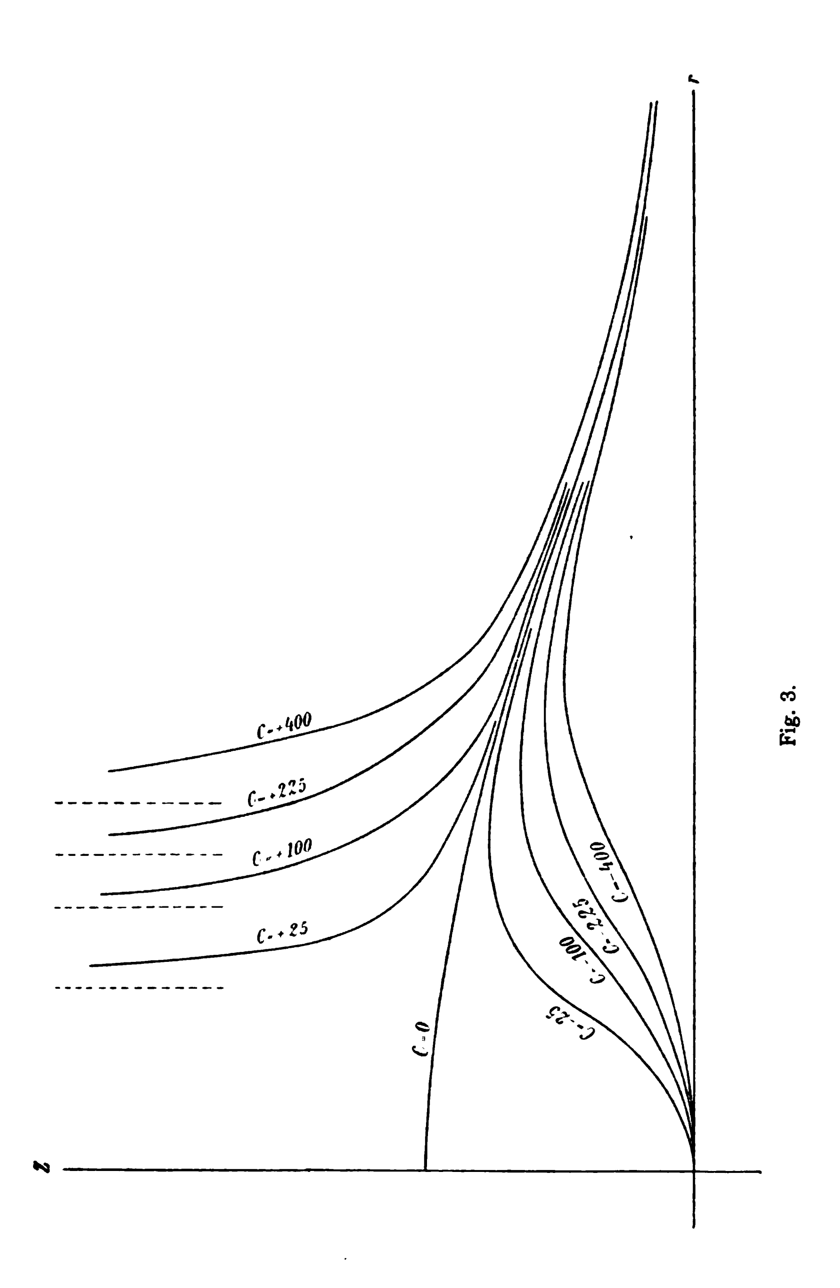


Fig. 3.

$$\log z = \log z_s + \log r^3 -$$
$$-(0\cdot 75 + 0\cdot 00574456\sqrt{C})\log(r^2 - 57\cdot 4456\sqrt{C}) -$$
$$-(0\cdot 75 - 0\cdot 00574456\sqrt{C})\log(r^2 + 57\cdot 4456\sqrt{C}),$$

beziehungsweise

$$\log z = \log z_s + \log r^3 - 0\cdot 75\log(r^4 - 3300\,C) -$$
$$-0\cdot 00498961\sqrt{-C}\,\mathrm{arctg}\,\frac{57\cdot 4456}{r^2}\sqrt{-C},$$

von denen die erste für positive, die zweite für negative Werte der Integrationskonstanten C verwendet wurde. Die Ordinaten sind in Zahlentafel 3 zusammengestellt. Die letzte Zeile enthält die Abszissen r_0 der in der Figur durch gestrichelte Gerade angedeuteten Asymptoten.

V.

Nun möge die Radialspannung konstant gehalten werden. Wenn

$$\sigma_r = \sigma = \text{konst.} \tag{37}$$

und

$$-\sigma_t \leqq -\sigma, \tag{38}$$

ist die Scheibe bei der in Abschnitt IV zu Grunde liegenden Festigkeitstheorie ebenfalls als Scheibe gleichen Fliehkraftwiderstandes anzusehen. Aus (37) folgt unter Berücksichtigung von (1)

$$m\frac{d\rho}{dr} + \frac{\rho}{r} = k, \tag{39}$$

wobei k auf die durch (20) ausgedrückte Art mit der unveränderlichen Spannung zusammenhängt. Die allgemeine Lösung von (39) lautet

$$\rho = \frac{C}{r^{\frac{1}{m}}} + \frac{k}{m+1}r. \tag{40}$$

Auch hier gilt bezüglich der Verwirklichungsmöglichkeit der Lösung für den Mittelteil des erhaltenen Drehungskörpers

das in dem vorangehenden Abschnitte gesagte. Für die Tangentialspannung ergibt sich

$$\sigma_t = \sigma - \frac{C}{r^{\frac{m+1}{m}}}. \tag{41}$$

Die Ungleichung (38) ist erfüllt, wenn der Integrationskonstanten C ein negativer Wert gegeben wird.

Die Einsetzung von (40) in (5) ergibt die Gleichung

$$\frac{dlz}{dr} = -\frac{m^2-1}{m}\frac{\mu w^2}{kE}r + \frac{m^2-1}{mk}\frac{C}{r^{\frac{2m+1}{m}}} =$$

$$= \frac{\mu w^2}{\sigma}r - \frac{\mu w^2}{\sigma}\frac{EC}{r^{\frac{2m+1}{m}}}, \tag{42}$$

durch deren Integration man

$$l\frac{z}{z_0} = +\frac{1}{2}\cdot\frac{\mu w^2}{\sigma}r^2 + \frac{m}{m+1}\cdot\frac{E}{\sigma}\cdot\frac{C}{r^{\frac{m+1}{m}}}. \tag{43}$$

erhält. lz_0 wurde als neue Integrationskonstante eingeführt. Die durch (43) gegebenen Meridiankurven besitzen, wenn $C < 0$, die beiden Koordinatenachsen als Asymptoten. Der Fall $C = 0$ stellt wieder die Stodola-Laval'sche Lösung dar. Ist $C > 0$, so haben die Kurven den Koordinatenursprung als gemeinsamen Punkt, die Abszissenachse als gemeinsame Asymptote. Diese Kurven kämen als Meridianlinien von Scheiben gleichen Fliehkraftwiderstandes nicht in Betracht, da zufolge (40) die tangentiale Zugspannung den Wert der konstant gehaltenen radialen übersteigen würde.

Aus (41) geht hervor, daß bei kleinem r das σ_t eine Druckspannung werden kann. Aus dieser Gleichung ergibt sich die Abszisse, für welche die tangentiale Spannung verschwindet. Die Anschauung lehrt aber, daß Druckspannungen im Innern der Scheibe nicht möglich sind. Wie früher verwischen in der Nähe des Mittelpunktes die sogenannten Nebenspannungen das theoretische Ergebnis.

Es sei wieder das in den früheren Abschnitten behandelte Beispiel herangezogen. Die Ordinaten der durch (43) gegebenen Kurven ergeben sich für $m = 3$ aus der Gleichung

$$\log z = \log z_s - 358 \cdot 289 \frac{C}{r^{\frac{4}{3}}},$$

für $m = 4$ aus der Gleichung

$$\log z = \log z_s - 382 \cdot 175 \frac{C}{r^{\frac{5}{4}}}.$$

In Fig. 4 sind einige Kurven des Systems für $m = 3$, in Fig. 5 für $m = 4$ dargestellt. (Siehe auch Zahlentafeln 4 und 5.)

VI.

Legt man der Untersuchung die Anschauung zu Grunde, daß die größte in einem Punkte auftretende Schubspannung, also die Differenz zwischen größter und kleinster Hauptnormalspannung für die Bruchgefahr maßgebend sei, wie dies nach der Mohr'schen Theorie für solche Materialien gilt, deren Hüllkurve eine zur Achse parallele Gerade ist, für welche also Streck- und Quetschgrenze nicht stark voneinander abweichen, eine Anschauung, die von Coulomb, Treska, G. H. Darwin[1] u. a. gestützt wurde und welcher für die im Turbinenbau verwendeten Materialien große Beachtung gebührt, so ergeben sich für die vorliegende Formgebungsaufgabe keine neuen Gesichtspunkte. Die größte Hauptschubspannung ist in diesem Falle, wo radiale und tangentiale Spannung Zugkräfte sind, also gleiches Vorzeichen haben, nur von der größten Hauptspannung abhängig, denn in axialer Richtung ist die Normalspannung gleich Null. Die hieraus sich ergebenden Aufgaben wurden in den obigen Kapiteln behandelt. Könnten aber radiale und tangentiale Spannung verschiedene Vorzeichen haben, so daß ihre Differenz dem Absolutbetrage nach größer würde als Minuend oder Subtrahend, so würde sich folgendes ergeben.

---

[1] O. Mohr, Zivilingenieur, 1882. Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, 1900. Love, Lehrbuch der Elastizität.

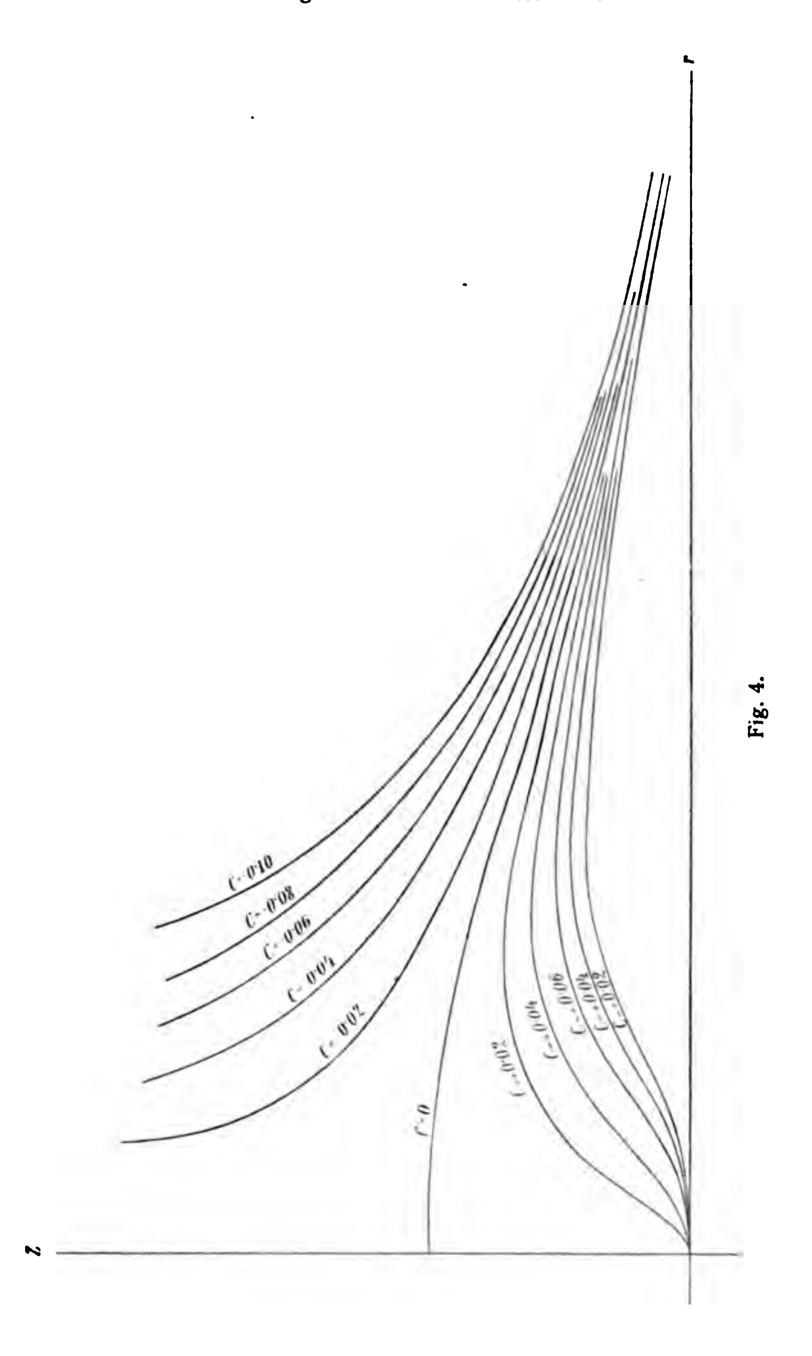


Fig. 4.

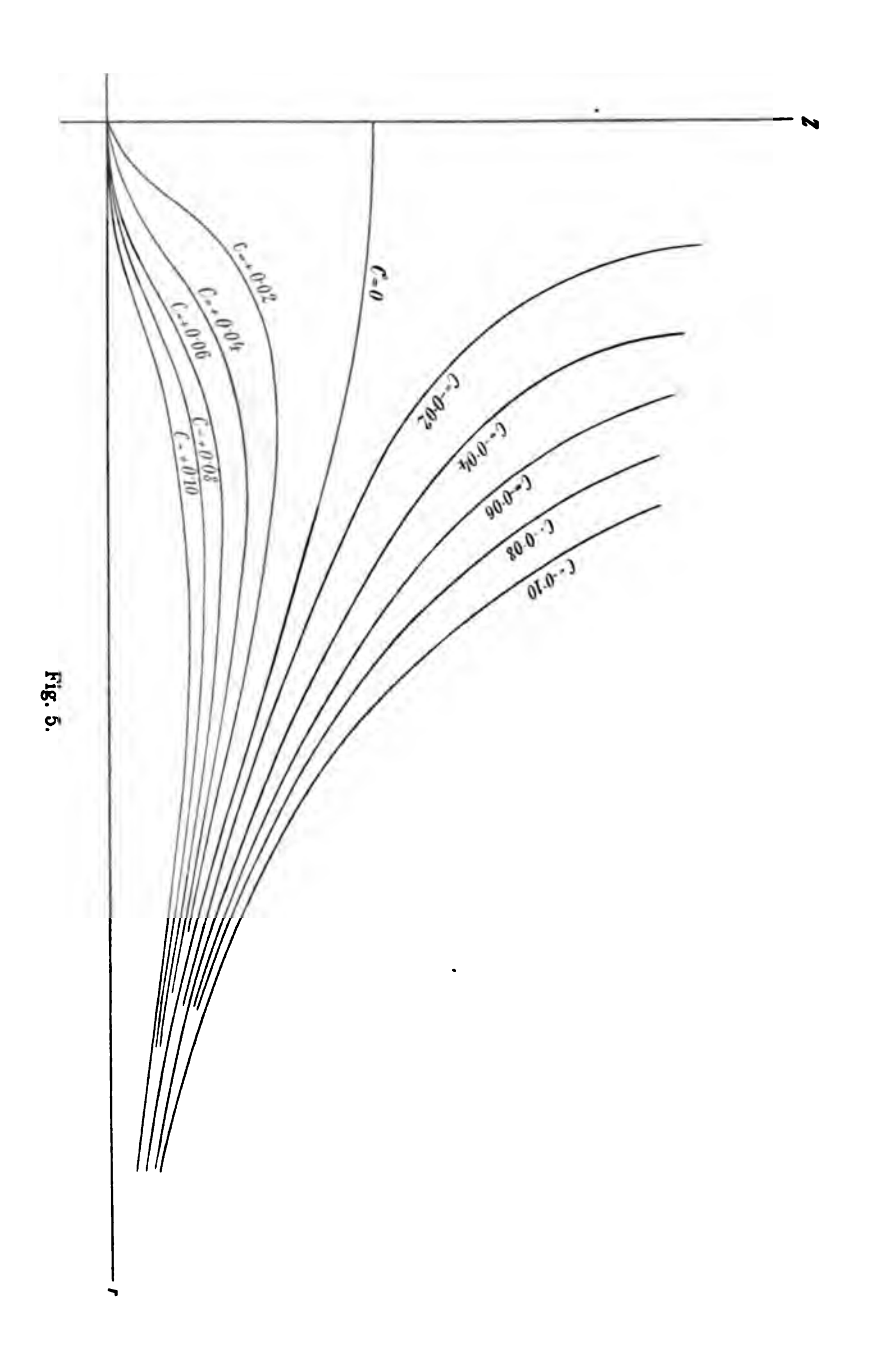


Fig. 5.

Die Hauptschubspannung

$$\tau = \pm \frac{1}{2} (\sigma_t - \sigma_r), \tag{44}$$

nachdem im vorliegenden Fall die tangentiale und die radiale Richtung die Richtungen der Hauptnormalspannungen sind. Soll τ für alle Punkte die gleiche Größe haben, so besteht die Gleichung

$$\frac{\rho}{r} - \frac{d\rho}{dr} = k, \tag{45}$$

wobei k durch die Gleichung

$$k = -\frac{m+1}{m} \frac{2\tau}{E} \tag{46}$$

von der zugelassenen Schubspannung τ abhängig ist. Das Vorzeichen ist in diesem Falle belanglos. Die Integration von (45) ergibt

$$\rho = -krl\frac{r}{C} \tag{47}$$

und durch Einsetzung dieser Gleichung in (5) ergibt sich die Beziehung

$$\frac{dlz}{dr} = \frac{dl\frac{z}{C}}{dr} = \frac{\frac{m^2-1}{m^2} \frac{\mu w^2}{kE} r - \frac{2}{r}}{\frac{m+1}{m} l\frac{r}{C} + 1}, \tag{48}$$

aus welcher hervorgeht

$$l\frac{z}{C} = \frac{m-1}{m} \frac{\mu w^2}{kE} \int_{r_0}^{r} \frac{r\,dr}{l\left(e^{\frac{m}{m+1}} \cdot \frac{r}{C}\right)} - \frac{2m}{m+1} \int_{r_0}^{r} \frac{\frac{dr}{r}}{l\left(\frac{r}{C} e^{\frac{m}{m+1}}\right)}.$$

Diese Gleichung geht, wenn man die neue Konstante

$$C' = Ce^{-\frac{m}{m+1}}$$

einführt, über in

$$l\left[\frac{z}{C'}\cdot e^{-\frac{m}{m+1}}\right] =$$

$$= \frac{m-1}{m}\cdot\frac{\mu w^2}{kE}C'^2\int_{r_0}^{r}\frac{d\left(\frac{r}{C'}\right)^2}{l\left(\frac{r}{C'}\right)^2} - \frac{2m}{m+1}\int_{r_0}^{r}\frac{dl\frac{r}{C'}}{l\frac{r}{C'}}.$$

Der Integrallogarithmus bewirkt, daß die Lösung nur durch eine unendliche Reihe ausgedrückt werden kann.

$$l\frac{z}{C'} = \frac{m-1}{m}\,\frac{\mu w^2}{kE}\left\{l\,\frac{l\frac{r}{C'}}{l\frac{r_0}{C'}} + \frac{2}{1.1!}\left[l\frac{r}{C'} - l\frac{r_0}{C'}\right] + \right.$$

$$+ \frac{2^2}{2.2!}\left[\left(l\frac{r}{C'}\right)^2 - \left(l\frac{r_0}{C'}\right)^2\right] +$$

$$\left. + \frac{2^3}{3.3!}\left[\left(l\frac{r}{C'}\right)^3 - \left(l\frac{r_0}{C'}\right)^3\right] + \dots\right\} -$$

$$- \frac{m}{m+1}\left[2l\,\frac{l\frac{r}{C'}}{l\frac{r_0}{C'}} - 1\right]. \quad (49)$$

VII.

Schließlich nehmen wir noch an, daß die auf die Raumeinheit bezogene Formänderungsarbeit in einem bestimmten Punkte das Maß der Bruchgefahr bilde, eine Anschauung, die

zuerst von Beltrami ausgesprochen, jüngst neuerdings vertreten wurde.[1]

Im vorliegenden Falle eines ebenen Spannungszustandes ist das elastische Potential durch die Gleichung gegeben

$$f = \frac{1}{E}\left[\frac{1}{2}(\sigma_t^2+\sigma_r^2) - \frac{1}{m}\sigma_t\sigma_r\right]. \tag{50}$$

Mit Hilfe von (1) erhält man

$$\frac{\rho^2}{r^2} + \left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2 + \frac{2}{m}\frac{\rho}{r}\frac{d\rho}{dr} = k = \frac{2f}{m^2E}. \tag{51}$$

Die Einführung der neuen Variablen

$$\xi = lr, \quad \eta = \frac{\rho}{r} \tag{52}$$

gibt

$$\eta'^2 + \frac{2(m+1)}{m}\eta\eta' + \frac{2(m+1)}{m}\eta^2 - k = 0, \tag{53}$$

woraus hervorgeht, daß

$$\xi = \int \frac{d\eta}{-\frac{m+1}{m}\eta \pm \sqrt{k - \frac{m^2-1}{m^2}\eta^2}}$$

und sofern man

$$\frac{\sqrt{m^2-1}}{m\sqrt{k}}\eta = \sin\varphi$$

setzt,

$$\xi = \frac{m}{\sqrt{m^2-1}}\int \frac{d\varphi}{\pm 1 - \frac{m+1}{\sqrt{m^2-1}}\operatorname{tg}\varphi}.$$

Setzt man

$$a = \pm 1, \quad b = -\frac{m+1}{\sqrt{m^2-1}}$$

---

[1] E. Beltrami, Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici. Lomb. Ist. Rend. (2), XVIII (1885). — Beiblätter zu den Annalen der Physik, 1885. — R. Girtler, Über das Potential der Spannungskräfte in elastischen Körpern als Maß der Bruchgefahr. Diese Sitzungsberichte, Bd. CXVI, Abt. IIa, 1907, März. — Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architektenvereines, 1907, Nr. 37.

und beachtet, daß

$$\int \frac{d\varphi}{a+b\,\mathrm{tg}\,\varphi} = \frac{a\varphi}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}\, l(a\cos\varphi+b\sin\varphi),$$

so erhält man

$$\xi = \frac{1}{2}\left[\pm \frac{m-1}{\sqrt{m^2-1}}\varphi + l\left(-\frac{m+1}{m\sqrt{k}}\eta \pm \sqrt{1-\frac{m^2-1}{m^2 k}\eta^2}\right)\right]$$

und wenn man wieder die ursprünglichen Veränderlichen r und ρ einführt

$$lr = \frac{1}{2}\left[\pm \frac{m-1}{\sqrt{m^2-1}} \arcsin \frac{\sqrt{m^2-1}}{m\sqrt{k}}\cdot\frac{\rho}{r} + \right.$$
$$\left. + l\left(-\frac{m+1}{m\sqrt{k}}\cdot\frac{\rho}{r} \pm \sqrt{1-\frac{m^2-1}{m^2 k}\cdot\frac{\rho^2}{r^2}}\right)\right] + lC. \quad (54)$$

Da es nicht möglich ist, einen expliziten Ausdruck für die radiale Punktverschiebung ρ zu finden, so erweist es sich als unmöglich, die Aufgabe der Scheiben gleichen Fliehkraftwiderstandes bei Zugrundelegung des Potentials der Spannungskräfte als Maß der Bruchgefahr einer geschlossenen exakten Lösung zuzuführen.

Fassen wir die Betrachtungen zusammen, so ergibt sich folgendes:

Bei Annahme konstanter tangentialer Dehnung ergibt sich für die Scheiben gleichen Fliehkraftwiderstandes ein einfach unendliches, affines Lösungssystem.

Bei Annahme konstanter radialer Dehnung ergibt sich ein System mit zwei willkürlichen Parametern (C und z_0). Sofern der eine (C) verschwindet, gelangt man zum obigen einfach unendlichen Lösungssystem; sofern dies nicht geschieht, liegt der Scheibenmittelpunkt in der Oberfläche. Es liegen jedoch keine Scheiben gleicher Festigkeit vor, denn die tangentiale Dehnung ist immer größer als die radiale; im Mittelpunkt ist sie unendlich groß.

Bei Annahme unveränderlicher tangentialer Spannung erhält man wieder ein zweifach unendliches den Raum zweifach füllendes Lösungssystem, welches sich wie früher versondern läßt. Nicht alle erhaltenen Umdrehungskörper sind jedoch solche gleichen Fliehkraftwiderstandes. Die Scharen der Meridianlinien der Körper gleicher Festigkeit werden von den übrigen durch die besondere Linienschar getrennt, welche sich ergibt, wenn der eine Parameter *(C)* verschwindet. Im Außenraume liegen die Scheiben, deren radiale Zugspannung kleiner, im Innenraume jene, deren radiale Zugspannung größer ist als die tangentiale. Erstere kämen für den Maschinenbau in Betracht; ihre Meridianlinien besitzen eine zur Drehungsachse parallele Asymptote. Ist die Poisson'sche Konstante eine ganze Zahl, so ergibt sich für die Lösung eine geschlossene Form durch Integration rationaler Funktionen.

Bei Annahme stets gleicher radialer Spannung ergibt sich ein ähnliches Lösungssystem, wie es soeben besprochen wurde. Nur fallen die Asymptoten der Meridianlinien in die Umdrehungsachse selbst. Auch diese Scheiben kämen für den Turbinenbau in Frage. Die Beschaffenheit der Poisson'schen Zahl hat für den hier benützten Lösungsweg keine Bedeutung. — Die in diesen zwei Abschnitten besprochenen Scheiben gleicher Fliehkraftfestigkeit können hyperbolische Profile annehmen.

Die Annahme konstanter Differenz zwischen tangentialer und radialer Normalspannung führt zu einem zweifach unendlichen Lösungssystem, das sich aber, sofern diese Differenz nicht verschwindet, in geschlossener Form nicht darstellen läßt.

Der Annahme konstanten Potentials der Spannungskräfte entspricht ebenfalls ein zweifach unendliches Lösungssystem. Doch erweist es sich als unmöglich, auf exaktem Wege zu einer Gleichung der betreffenden Drehungskörper zu gelangen.

Zahlentafel 1 zu Abschnitt II.

r	$\log z$	z
0	0·69897	5·0000
10	0·69028	4·9010
20	0·66423	4·6156
30	0·62080	4·1764
40	0·56000	3·6308
50	0·48182	3·0326
60	0·38628	2·4338
70	0·27336	1·8766
80	0·14307	1·3902
90	0·99541—1	0·9395
100	0·83038—1	0·6767

Zahlentafel 2 zu Abschnitt III.

($m = 3$)

r	z			
	$C = 0$	$C = 0·025$	$C = 0·05$	$C = 0·1$
0	5·0000	0 0000	0·0000	0·0000
10	4·9010	0·5922	0·1732	0·0321
20	4·6156	1·3753	0·5788	0·1707
30	4·1764	1·8382	0·9555	0·3526
40	3·6308	2·0116	1·3059	0·5267
50	3·0326	2·1108	1·3184	0·6624
60	2·4338	1·7850	1·3048	0·7397
70	1·8766	1·5200	1·1977	0·7553

Zahlentafel 3 zu Abschnitt IV.

$(m = 3)$

r	z								
	$C = -400$	$C = -225$	$C = -100$	$C = -25$	$C = 0$	$C = +25$	$C = +100$	$C = +225$	$C = +400$
	$\sqrt{-C} = 20$	$\sqrt{-C} = 15$	$\sqrt{-C} = 10$	$\sqrt{-C} = 5$	$\sqrt{C} = 0$	$\sqrt{C} = 5$	$\sqrt{C} = 10$	$\sqrt{C} = 15$	$\sqrt{C} = 20$
0	0·0000	0·0000	0·0000	0·0000	5·0000	—	—	—	—
10	0·0890	0·1493	0·2964	0·8607	4·9010	—	—	—	—
20	0·6551	1·0368	1·7850	3·2602	4·6156	8·5246	—	—	—
30	1·5797	2·2477	3·0278	3·8151	4·1764	4·6136	6·7440	3·7449	—
40	2·3036	2·7548	3·1865	3·5095	3·6308	3·7602	4·2044	5·2078	7·6966
50	2·3793	2·6328	2·8431	2·9833	3·0326	3·0834	3·2447	3·5475	4·0593
60	2·1079	2·2416	2·3453	2·4138	2·4338	2·4567	2·5276	2·6858	2·8462
70	1·7097	1·7800	1·8327	1·8654	1·8766	1·8877	1·9220	2·0280	2·0688
80	1·3032	1·3403	1·3677	1·3846	1·3902	1·3943	1·4136	1·4427	1·4854
90	0·9435	0·9635	0·9767	0·9866	0·9895	0·9922	1·0382	1·0165	1·0402
100	0·6527	0·6630	0·6706	0·6751	0·6767	0·6775	0·6829	0·6907	0·7019
Abszissen der Asymptoten									
r_0	—	—	—	—	—	16·948	23·967	29·352	33·894

Zahlentafel 4 zu Abschnitt V.

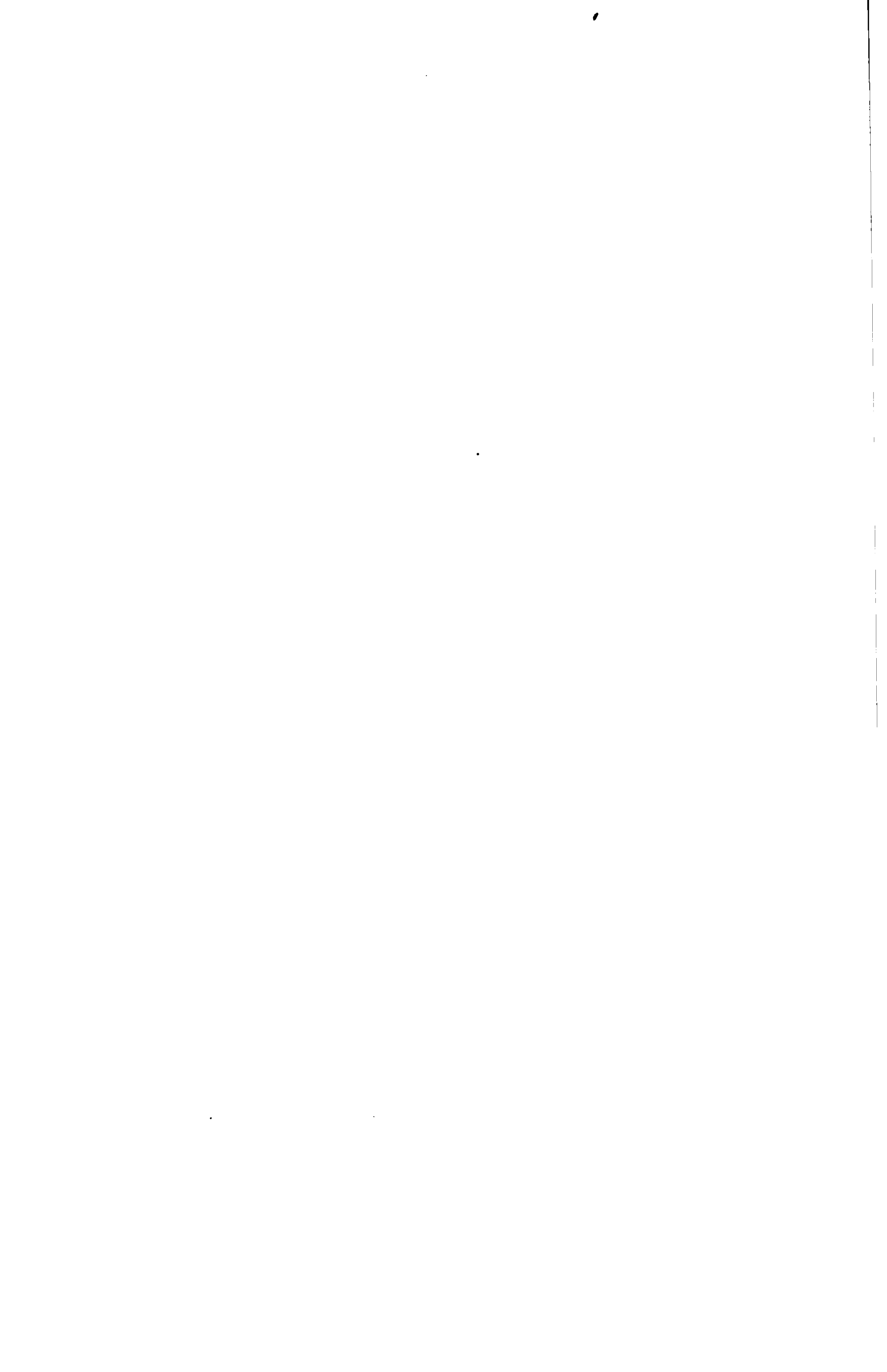
$(m = 3)$

r	z										
	$C = -0·10$	$C = -0·08$	$C = -0·06$	$C = -0·04$	$C = -0·02$	$C = 0$	$C = +0·02$	$C = +0·04$	$C = +0·06$	$C = +0·08$	$C = +0·10$
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	5·0000	0·0000	0·0000	0·0000	0·0000	0·0000
10	223·81	104·22	48·533	22·601	10·524	4·9010	2·2822	1·0628	0·4949	0·2305	0·1073
20	20·616	15·567	11·487	8·4722	6·2549	4·6156	3·4060	2·5133	1·8978	1·3685	1·0099
30	10·119	8·4780	7·1027	5·9503	4·9850	4·1764	3·4989	2·9313	2·4557	2·0574	1·7236
40	6·6360	5·8820	5·2138	4·6212	4·0962	3·6308	3·2182	2·8526	2·5284	2·2412	1·9865
50	4·7493	4·3394	3·9676	3·6276	3·3168	3·0326	2·7728	2·5352	2·3180	2·1194	1·9378
60	3·4579	3·2233	3·0047	2·8009	2·6109	2·4338	2·2687	2·1148	1·9713	1·8376	1·7130
70	2·4978	2·3589	2·2278	2·1040	1·9870	1·8766	1·7722	1·6737	1·5807	1·4928	1·4098
80	1·7661	1·6835	1·6048	1·5299	1·4583	1·3902	1·3252	1·2633	1·2042	1·1480	1·0943
90	1·2141	1·1654	1·1187	1·0717	1·0308	0·9895	0·9498	0·9118	0·8752	0·8401	0·8065
100	0·8083	0·7801	0·7528	0·7265	0·7012	0·6767	0·6530	0·6302	0·6082	0·5870	0·5665

Zahlentafel 5 zu Abschnitt V.

$(m = 4)$

r	z										
	$C = -0{\cdot}10$	$C = -0{\cdot}08$	$C = -0{\cdot}06$	$C = -0{\cdot}04$	$C = -0{\cdot}02$	$C = 0$	$C = +0{\cdot}02$	$C = +0{\cdot}04$	$C = +0{\cdot}06$	$C = +0{\cdot}08$	$C = +0{\cdot}10$
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	5·0000	0·0000	0·0000	0·0000	0·0000	0·0000
10	690·84	256·78	95·442	35·475	13·186	4·9010	1·8217	0·6771	0·2517	0·0935	0·0348
20	36·968	24·386	16·083	10·609	6·9977	4·6150	3·0445	2·0081	1·3246	0·8737	0·5763
30	14·626	11·383	8·8594	6·8950	5·3663	4·1764	3·2508	2·5297	1·9688	1·5323	1·1925
40	8·7080	7·3102	6·1369	5·1519	4·3249	3·6308	3·0481	2·5588	2·1481	1·8033	1·5138
50	5·8783	5·1494	4·5111	3·9517	3·4618	3·0326	2·6566	2·3273	2·0387	1·7860	1·5645
60	4·1223	3·7100	3·3388	3·0049	2·7043	2·4338	2·1904	1·9712	1·7740	1·5966	1·4369
70	2·8981	2·6568	2·4356	2·2329	2·0470	1·8766	1·7203	1·5771	1·4458	1·3254	1·2151
80	2·0082	1·8657	1·7334	1·6105	1·4963	1·3902	1·2916	1·2000	1·1159	1·0364	0·9624
90	1·3591	1·2755	1·1971	1·1234	1·0543	0·9895	0·9286	0·8715	0·8179	0·7676	0·7204
100	0·8938	0·8454	0·7995	0·7564	0·7154	0·6767	0·6400	0·6054	0·5726	0·5416	0·5123



Zur Thermodynamik bewegter Systeme

von

Dr. **Fritz Hasenöhrl.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 31. Oktober 1907.)

Der Strahlung in einem bewegten Hohlraume kommt eine bestimmte elektromagnetische Bewegungsgröße und Masse zu. Da der Wärmeinhalt eines jeden Körpers zum Teil aus strahlender Energie besteht, besitzt jeder Körper eine bestimmte elektromagnetische Masse, die von seinem Energieinhalt, also etwa auch von seiner Temperatur abhängt. Diese Behauptung habe ich in früheren Arbeiten bewiesen.[1] Seither ist eine Arbeit des Herrn v. Mosengeil über die Strahlung in einem bewegten Hohlraum erschienen, worin unter anderen der Energieinhalt des bewegten Hohlraumes mit Hilfe der Beziehung zwischen Energie und Bewegungsgröße berechnet ist.[2] Ferner hat Herr Planck[3] die Dynamik eines beliebigen bewegten Systems studiert, wobei er von der Existenz der erwähnten elektromagnetischen Bewegungsgröße ausgeht.

Herr Planck setzt die Gültigkeit des sogenannten Relativitätsprinzips in der Fassung von Einstein voraus, benützt den bewegten Hohlraum als Vergleichskörper und gelangt so zu Sätzen, welche für jeden Körper gelten müssen.

---

[1] F. Hasenöhrl, diese Sitzungsber., CXIII, p. 1039, 1904; Ann. d. Phys. (4), 15, p. 344, 1904, und 16, p. 589, 1905.

[2] K. v. Mosengeil, Berliner Dissertation 1906; Ann. d. Phys. (4), 22, p. 867, 1906. — Auf Herrn v. Mosengeil's Kritik meiner Arbeiten komme ich später zu sprechen.

[3] M. Planck, Berliner Berichte, 1907, p. 542.

In der vorliegenden Arbeit habe ich versucht, gleichfalls eine Theorie eines beliebigen bewegten Körpers auszuarbeiten. Der eingeschlagene Weg unterscheidet sich wesentlich von der Methode des Herrn Planck. Es sind nur die thermodynamischen Sätze sowie die Definition der elektromagnetischen Bewegungsgröße vorausgesetzt. Stellt man dann die Forderung, daß ein mitbewegter Beobachter nichts von der Bewegung wahrnehmen soll, so ergibt sich die Fitzgerald-Lorentz'sche Kontraktionshypothese.

Wir betrachten also einen beliebigen Körper, dessen Zustand in der Ruhe durch die innere Energie U_0 und das Volumen v gegeben ist. Wird derselbe bei konstantem Volum adiabatisch auf die Geschwindigkeit $q = \beta c$ gebracht,[1] so besitzt er eine bestimmte Bewegungsgröße $\mathfrak{G}$, die als Funktion von U_0, v, β darstellbar sein muß. Wir setzen

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{c}\psi(U_0, v, \beta).$$

Die dabei geleistete Arbeit der Translationskräfte ist

$$\int q\,dt\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \int_0^\beta \beta\frac{\partial\psi}{\partial\beta}d\beta.$$

Um diesen Betrag hat die Energie des Körpers zugenommen; bezeichnen wir dieselbe mit U, so ist

$$U = U_0 + \int_0^\beta \beta\frac{\partial\psi}{\partial\beta}d\beta = \Phi(U_0, v, \beta),$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\beta} = \beta\frac{\partial\psi}{\partial\beta}. \tag{1}$$

Wir führen ferner die Größe

$$H = U - \beta\psi \tag{2}$$

ein, die wir auch als Funktion von U_0, v und β betrachten können. Es gilt dann:

---

[1] Es soll stets nur von reversibeln Vorgängen die Rede sein. c ist die Lichtgeschwindigkeit im Äther.

$$H = U_0 - \int_0^\beta \psi\, d\beta, \tag{3}$$

$$\psi = -\frac{\partial H}{\partial \beta}, \tag{4}$$

$$U = H - \beta \frac{\partial H}{\partial \beta}. \tag{5}$$

Bei der Differentiation nach einer der Größen U_0, v, β sind die beiden anderen konstant zu halten. Wir heben noch hervor, daß wir unter U_0 den Wert der Energie verstehen, welchen sie annimmt, wenn der Körper adiabatisch und isochorisch zur Ruhe gebracht wird; ganz gleichgültig, auf welchem Wege der Körper auf seinen momentanen (bewegten) Zustand gekommen ist.

1. Berechnung des Druckes.

Wir bezeichnen den Druck des ruhenden Systems mit p_0, den des bewegten mit p. Zur Berechnung des letzteren betrachten wir folgenden Kreisprozeß:

A. Der Anfangszustand sei der der Ruhe; U_0, v, p_0 seien die Werte der betreffenden Zustandsgrößen. Wir ändern das Volum adiabisch von v auf $v' = v + dv$; die Energie nimmt den Wert $U_0' = U_0 - p_0 dv$ an.

B. Wir bringen den Körper auf die Geschwindigkeit βc. Die Energie nimmt den Wert

$$U = \Phi(U_0', v', \beta)$$

an. Die Arbeit der äußeren Kräfte ist

$$U - U_0' = \Phi(U_0', v', \beta) - U_0'.$$

C. Wir ändern bei konstanter Geschwindigkeit das Volumen adiabatisch um $-dv$. Die äußeren Kräfte leisten die Kompressionsarbeit $p dv$ und die Translationsarbeit (um die Geschwindigkeit konstant zu erhalten) $\beta d\psi$. Es ist also die Zunahme der Energie

$$dU = p dv + \beta d\psi.$$

Sei U_0'' der Wert, den U_0 jetzt angenommen hat; dann ist

$$dU = \Phi(U_0'', v, \beta) - \Phi(U_0', v', \beta),$$

$$d\psi = \psi(U_0'', v, \beta) - \psi(U_0', v', \beta).$$

D. Wir bringen den Körper adiabatisch und isochorisch zur Ruhe. Dabei wird die Arbeit

$$U_0'' - \Phi(U_0'', v, \beta)$$

geleistet. Der Zustand des Körpers ist jetzt durch die Variabeln $U_0'', v, \beta = 0$ gegeben. Die gesamte Arbeit der äußeren Kräfte ist:

$$(-p_0 dv) + (\Phi(U_0', v', \beta) - U_0') + (p dv + \beta d\psi) + (U_0'' - \Phi(U_0'', v, \beta)).$$

Nach dem ersten Hauptsatze muß diese Arbeit gleich $U_0'' - U_0$ sein. Der zweite Hauptsatz verlangt überdies, daß diese Differenz gleich Null sei. Sonst würde dieser Kreisprozeß, oder der umgekehrte ein thermisches Perpetuum mobile repräsentieren. Setzen wir also im obigen Ausdrucke $U_0'' = U_0$; beachten, daß dann:

$$d\psi = \psi(U_0, v, \beta) - \psi(U_0', v', \beta) =$$

$$= \frac{\partial \psi}{\partial U_0}(U_0 - U_0') + \frac{\partial \psi}{\partial v}(v - v') =$$

$$= \frac{\partial \psi}{\partial U_0} p_0 dv - \frac{\partial \psi}{\partial v} dv$$

und

$$\Phi(U_0', v', \beta) - \Phi(U_0, v, \beta) = \frac{\partial \Phi}{\partial v} dv - \frac{\partial \Phi}{\partial U_0} p_0 dv$$

ist, so erhalten wir:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} dv - \frac{\partial \Phi}{\partial U_0} p_0 dv + \beta \frac{\partial \psi}{\partial U_0} p_0 dv - \beta \frac{\partial \psi}{\partial v} dv + p dv = 0$$

oder nach (2):

$$p = p_0 \frac{\partial H}{\partial U_0} - \frac{\partial H}{\partial v}. \tag{6}$$

Wir erhalten also den Satz: Steht ein beliebiger Körper im Zustande der Ruhe unter dem Druck p_0, so nimmt derselbe

bei adiabatisch isochorischer Beschleunigung den Wert p, der durch Gleichung (6) gegeben ist, an.

Dieser Satz läßt sich einfacher, aber vom physikalischen Standpunkte weniger klar, auf folgendem Weg ableiten: Bei einer adiabatischen Zustandsänderung ist der Betrag von U nur von den momentanen Werten der Größen β und v abhängig. Wenn also bei beliebiger Geschwindigkeit v adiabatisch um dv verändert wird, so ändert sich U_0 um $-p_0 dv$.[1] Es muß dann die Zunahme der Energie, welche hier der Arbeit der äußeren Kräfte gleich ist:

$$dU = -p dv + \beta d\phi$$

und daher auch

$$-p dv - \phi d\beta$$

ein vollständiges Differential, also

$$\frac{\partial p}{\partial \beta} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial v}\right)$$

sein. Hiebei ist unter $\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)$ eine Differentiation bei adiabatischer Zustandsänderung zu verstehen; ist also ϕ als explizite Funktion von v und U_0 gegeben, so ist

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial v}\right) = \frac{\partial \phi}{\partial v} + \frac{\partial \phi}{\partial U_0}\left(\frac{\partial U_0}{\partial v}\right) = \frac{\partial \phi}{\partial v} - p_0 \frac{\partial \phi}{\partial U_0}.$$

Da ferner nach (4)

$$\phi = -\frac{\partial H}{\partial \beta}$$

ist, läßt sich obige Gleichung nach β integrieren und wir erhalten:

$$p = p_0 \frac{\partial H}{\partial U_0} - \frac{\partial H}{\partial v} + \text{Konst.}$$

Diese Konstante kann noch eine Funktion von U_0 und v sein; sie reduziert sich auf Null, da für $\beta = 0$, $p = p_0$

$$H = U_0; \quad \left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)_{U_0} = 0$$

ist.

---

[1] Vergl. den folgenden Abschnitt 2.

2. Das Differential der zugeführten Wärme

ist gleich der Zunahme der Energie vermehrt um die (vom betrachteten Körper) geleistete Arbeit, also

$$dQ = dU + p dv - \beta d\psi.$$[1]

Führen wir wieder U_0, v und β als independente Variable ein, so wird:

$$dQ = \frac{\partial \Phi}{\partial U_0} d U_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial v} dv + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} d\beta -$$

$$- \beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial U_0} d U_0 + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv + \frac{\partial \psi}{\partial \beta} d\beta \right) + p dv.$$

Berücksichtigen wir (1), (2) und (6), so wird:

$$dQ = \frac{\partial H}{\partial U_0} d U_0 + \frac{\partial H}{\partial v} dv + \left(p_0 \frac{\partial H}{\partial U_0} - \frac{\partial H}{\partial v} \right) dv,$$

oder

$$dQ = \frac{\partial H}{\partial U_0} (dU_0 + p_0 dv). \tag{7}$$

Dieser Ausdruck gilt ganz allgemein.

3. Die Temperatur des bewegten Körpers.

Wir betrachten zuerst ein System von Körpern, die sich alle mit derselben konstanten Geschwindigkeit bewegen. Die Erfahrung lehrt, daß dann dQ/T ein vollständiges Differential ist. Gleichung (7) zeigt, daß diese Bedingung erfüllt ist, wenn wir

$$T = T_0 \frac{\partial H}{\partial U_0} \cdot f(\beta) \tag{8a}$$

setzen. Denn T_0 ist der integrierende Nenner von $dU_0 + p_0 dv$, wenn wir analog dem früheren unter T_0 die Temperatur verstehen, die der bewegte Körper annimmt, wenn er adiabatisch

---

[1] Darauf, daß hier auch die Translationsarbeit $\beta d\psi$ berücksichtigt werden muß, hat zuerst Herr Planck aufmerksam gemacht.

und isochorisch auf die Geschwindigkeit Null gebracht wird. Die auftretende Funktion von β spielt hier die Rolle einer Konstanten, ist daher belanglos. Natürlich muß sie für alle Körper denselben Wert haben.

Da wir in diesem Falle β als konstant ansehen, ist

$$dQ = \frac{\partial H}{\partial U_0}(dU_0 + p_0 dv) = dH + pdv.$$

In einem Systeme, dessen Geschwindigkeit sich nicht ändert, spielt H für den mitbewegten Beobachter die Rolle der inneren Energie; zwischen den Größen H, v, p, T bestehen dieselben Beziehungen, welche aus den thermodynamischen Hauptsätzen für U_0, v, p_0, T_0 folgen.

Wir lassen nun einen Körper einen Carnot'schen Kreisprozeß durchlaufen, bei dem die beiden Reservoire verschiedene Geschwindigkeit haben; und zwar sei T_1, $\beta_1 c$ Temperatur und Geschwindigkeit des einen Reservoirs; T_2, $\beta_2 c$ seien die betreffenden Größen für das andere. Gilt der Satz von der Unmöglichkeit eines thermischen Perpetuum mobile auch, wenn dasselbe in seinen verschiedenen Stadien verschiedene Geschwindigkeit annimmt, so kann das Verhältnis der an die Reservoire abgegebenen Wärmemengen nicht von der Natur des den Kreisprozeß ausführenden Körpers abhängig sein. Es muß dann

$$\frac{dQ_1}{dQ_2} = \frac{\left[\frac{\partial H}{\partial U_0}(dU_0 + p_0 dv)\right]_1}{\left[\frac{\partial H}{\partial U_0}(dU_0 + p_0 dv)\right]_2} = \varphi(T_1, T_2, \beta_1, \beta_2)$$

sein. Man erkennt leicht, daß diese Funktion die Gestalt

$$\frac{\psi(T_1, \beta_1)}{\psi(T_2, \beta_2)}$$

haben muß. Da ferner

$$\frac{\psi(T_1, \beta)}{\psi(T_2, \beta)} = \frac{T_1}{T_2}$$

sein muß, weil für Körper derselben Geschwindigkeit die gewöhnliche Temperaturdefinition zu gelten hat, ergibt sich für ψ die Form:

$$\psi(T, \beta) = T . g(\beta).$$

Wir wollen diese Funktion $g(\beta)$, sowie die Funktion $f(\beta)$ in (8a) gleich Eins setzen; dann wird

$$T = T_0 \frac{\partial H}{\partial U_0}. \tag{8}$$

Wir müssen jedoch betonen, daß darin eine gewisse Willkür liegt. Auch wenn wir diese Funktionen nicht gleich Eins setzen, kommen wir weder in Widerspruch mit dem Satz von der Unmöglichkeit des thermischen Perpetuum mobile, noch mit der gewöhnlichen Temperaturdefinition, die sich ja nur auf Körper derselben Geschwindigkeit bezieht. Das Kriterium der Temperaturgleichheit ist auf Körper ungleicher Geschwindigkeit nicht anwendbar, da wir sie nicht direkt, sondern nur mit Hilfe eines Hilfskörpers, der verschiedene Geschwindigkeiten annimmt, in reversibeln Wärmeaustausch bringen können. Setzen wir jedoch $g(\beta)$ nicht gleich Eins, so ändert sich auch die Entropie bei adiabatischer Beschleunigung.

Es ist also jedenfalls am einfachsten, T durch die Gleichung (8) zu definieren; dann ist dQ/T ein vollständiges Differential und die Entropie bleibt bei adiabatischer Beschleunigung konstant.[1]

4. Die Entropie eines bewegten Körpers.

Wir sind zum Resultate gelangt, daß bei der isochoren adiabatischen Beschleunigung Druck und Temperatur die Werte

$$p = p_0 \frac{\partial H}{\partial U_0} - \frac{\partial H}{\partial v}, \tag{6}$$

$$T = T_0 \frac{\partial H}{\partial U_0} \tag{8}$$

[1] Es ist dies auch in den Arbeiten der Herren v. Mosengeil und Planck bei der Bestimmung der Temperatur eines bewegten Hohlraumes geschehen.

annehmen. H spielt in einem System, das sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, die Rolle der inneren Energie.

Die Entropie des ruhenden Systems sei $S_0(U_0, v)$, die des bewegten kann durch $S(H, v)$ ausgedrückt werden. Es gelten die Beziehungen

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial U_0}\right)_v = \frac{1}{T_0}, \quad \left(\frac{\partial S_0}{\partial v}\right)_{U_0} = \frac{p_0}{T_0};$$

ebenso aber auch

$$\left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_v = \frac{1}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_H = \frac{p}{T};$$

denn es ist ja (bei konstantem β)

$$dS = \frac{1}{T}(dH + p\,dv).$$

Da das System aus dem Zustande der Ruhe adiabatisch in den der Bewegung gebracht wurde, hat die Entropie in beiden Fällen denselben Wert, also:

$$S_0(U_0, v) = S(H, v);$$

daher auch

$$\frac{\partial S_0}{\partial U_0} = \frac{\partial S}{\partial U_0} = \frac{\partial S}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial U_0},$$

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial v}\right)_{U_0} = \left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_{U_0} = \frac{\partial S}{\partial H}\left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)_{U_0} + \left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_H.$$

Daraus ergeben sich auch sofort die Gleichungen (6) und (8).

5. Die Bewegungsgröße.

Wir haben bisher die Existenz einer Bewegungsgröße vorausgesetzt, ohne eine spezielle Annahme über ihren Wert zu machen. Nun wollen wir in Übereinstimmung mit der Theorie von Lorentz uud Abraham annehmen, daß die Bewegungsgröße gleich sei dem Raumintegral des (absoluten)

Energiestromes, dividiert durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit. Nehmen wir an, daß es auf den Strom der gesamten Energie ankommt, daß also die gesamte innere Energie elektromagnetischer Natur sei, so kann die Bewegungsgröße durch folgende einfache Überlegung berechnet werden.

Wir betrachten einen zylindrischen Körper vom Querschnitt Eins, der sich in der Richtung seiner Achse bewegt (einen anders geformten Körper können wir in zylindrische Teile zerlegt denken). Durch einen beliebigen Querschnitt, der die Bewegung mitmacht, fließe der (relative) Energiestrom π_1 in der Richtung der Bewegung, der Energiestrom π_2 in der entgegengesetzten Richtung. Da der Körper homogen gedacht ist, sind diese Größen von der Lage des Querschnittes unabhängig; es wird daher die (dem Sinne der Bewegung nach) rückwärtige Basisfläche in der Zeiteinheit die Energiemenge π_1 aussenden und die Energiemenge π_2 zugeführt erhalten. Die Differenz $\pi_1 - \pi_2$ muß gleich sein der in der Zeiteinheit an dieser Fläche geleisteten äußeren Arbeit. Die hier angreifende Kraft ist der Druck p; die Druckarbeit in der Zeiteinheit ist pq; also

$$pq = \pi_1 - \pi_2.$$

Um den absoluten Energiestrom, also den Energiestrom durch einen ruhend gedachten Querschnitt zu berechnen, haben wir zum relativen Energiestrom in der Richtung der Bewegung, also zur Größe $\pi_1 - \pi_2$ noch das Produkt der Energiedichte mal der Translationsgeschwindigkeit hinzuzufügen.[1] Bezeichnen wir die erstere für den Augenblick mit u, so wird der absolute Energiestrom durch einen Querschnitt durch die Größe

$$\pi_1 - \pi_2 + qu = (p+u)q$$

gegeben sein. Multiplizieren wir diese Größe mit dem Volumen und dividieren durch c^2, so wird

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{c^2} v(p+u)q$$

[1] Vergl. etwa M. Abraham, Theorie der Elektrizität, II., p. 108.

oder, da wir uv mit U bezeichnen:

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{c^2}(pv+U)q.^1 \tag{10}$$

Es kommt also gar nicht darauf an, welcher Art die innere Energie des Körpers ist, wenn sie nur elektromagnetischer Natur ist (wir denken uns dieselbe wohl aus strahlender Energie und der Energie irgendwie bewegter Elektronen zusammengesetzt). Auf die Relativgeschwindigkeit der Energieströmung kommt es hier gleichfalls nicht an; die einzelnen Energiearten können natürlich auch mit verschiedener Geschwindigkeit strömen.

Man kommt natürlich zum selben Resultate, wenn man die einzelnen Energieströmungen in Rechnung zieht. Sei etwa $u(\psi)\sin\psi d\psi$ die Dichte einer bestimmten Energieart, welche sich in einer relativen Richtung bewegt, die mit der Bewegungsrichtung zwischen ψ und $\psi+d\psi$ einschließt. Dann ist die gesamte Energie dieser Art

$$U = 2\pi v\int_0^\pi u(\psi)\sin\psi d\psi.$$

Die Bewegungsgröße erhalten wir, wenn wir die absolute Strömung, das ist also $u(\psi)\sin\psi d\psi.\omega_A$ (wo ω_A die absolute Strömungsgeschwindigkeit ist) mit $\cos\varphi$ multiplizieren, wenn φ der Winkel zwischen der absoluten Strömungsrichtung und der Bewegungsrichtung ist. Also:

$$\mathfrak{G} = \frac{2\pi v}{c^2}\int_0^\pi u(\psi).\omega_A.\cos\varphi.\sin\psi d\psi.$$

Nun ist aber[2]

$$\omega_A\cos\varphi = q+\omega_R\cos\psi,$$

[1] Die hier angegebene Methode basiert auf einer Überlegung, die ich bereits in einer früheren Arbeit (diese Sitzungsber., CXIII., p. 1039, 1904) verwendet habe. Die Gleichung (10) wurde bereits von Herrn Planck, l. c., abgeleitet. Die Methode Planck's hat aber mit der hier verwendeten gar nichts zu tun.

[2] Vergl. etwa F. Hasenöhrl, Ann. d. Phys., *15*, p. 347, 1904 (dort ist allerdings nur strahlende Energie in Betracht gezogen. Wir haben jetzt die dort mit c und c' bezeichnete Größe durch ω_A und ω_R zu ersetzen. Da die Beziehungen rein geometrisch sind, ist diese Vertauschung ohneweiters gestattet).

wo ω_R die Relativgeschwindigkeit ist (ω_A und ω_R sind im allgemeinen Funktionen von ψ oder φ).

Also wird

$$\mathfrak{G} = \frac{2\pi v}{c^2} q \int_0^\pi u(\psi) \sin\psi d\psi + \frac{2\pi v}{c^2} \int_0^\pi u(\psi) \sin\psi \cos\psi \omega_R d\psi .$$

Der erste Summand ist gleich $\frac{1}{c^2} qU$; der zweite gibt den Überschuß der von der Basisfläche abgehenden Energie über die, welche ihr zuströmt, an, hängt daher mit der Druckarbeit pq zusammen, wodurch wir wieder zur Gleichung (10) gelangen.

6. Die Änderung des Volumens.

Sei ein ruhendes System gegeben, das sich im mechanischen und thermischen Gleichgewichte befindet, in dem also alle Körper denselben Druck und dieselbe Temperatur haben. Wird dieses System adiabatisch (jeder Körper für sich adiabatisch) in Bewegung gesetzt, so ändern sich Druck und Temperatur jedes einzelnen Körpers, und zwar, wie wir von vornherein annehmen müssen, bei den einzelnen Körpern in verschiedenem Maße. Es wird also das Gleichgewicht gestört; stellt es sich wieder her, so werden die einzelnen Körper ihre Volumina ändern müssen. Sind diese Volumsänderungen für verschiedene Körper verschieden, so sind sie prinzipiell beobachtbar. Wenn aber das mechanische und thermische Gleichgewicht dadurch wieder hergestellt wird, daß die Dimensionen aller Körper in gleicher Weise geändert werden, ist ein Einfluß der gemeinsamen Translationsbewegung nicht merkbar.

Dies ist in der Tat der Fall; es läßt sich erstens zeigen, daß, wenn adiabatisch β um $d\beta$ und gleichzeitig v um $-v\frac{\beta d\beta}{1-\beta^2}$ geändert wird, der Druck eines jeden Körpers unverändert bleibt. Es muß also

$$dp = \frac{\partial p}{\partial U_0} dU_0 + \frac{\partial p}{\partial v} dv + \frac{\partial p}{\partial \beta} d\beta = 0 \tag{11}$$

sein, wenn

$$dv = -v\frac{\beta d\beta}{1-\beta^2} \quad \text{und} \quad dU_0 = -p_0 dv \tag{12}$$

ist (letztere Beziehung gilt je nach (7) allgemein für die adiabatische Zustandsänderung).

Wir beachten, daß nach (10) und (2)

$$\begin{aligned} H &= U - \beta\psi = U - q\mathfrak{G} = U - \beta^2(pv + U) \\ &= U(1-\beta^2) - \beta^2 pv \end{aligned}$$

ist. Setzen wir noch für U seinen Wert aus (5) ein, so ergibt sich

$$H = (1-\beta^2)H - (1-\beta^2)\beta\frac{\partial H}{\partial \beta} - \beta^2 pv$$

oder

$$(1-\beta^2)\frac{\partial H}{\partial \beta} = -\beta(H + pv). \tag{13}$$

Es wird dann:

$$\begin{aligned} (1-\beta^2)\frac{\partial p}{\partial \beta} &= (1-\beta^2)\frac{\partial}{\partial \beta}\left(p_0\frac{\partial H}{\partial U_0} - \frac{\partial H}{\partial v}\right) = \\ &= -\beta p_0 \frac{\partial}{\partial U_0}(H+pv) + \beta\frac{\partial}{\partial v}(H+pv) = \\ &= -\beta\left(p_0\frac{\partial H}{\partial U_0} - \frac{\partial H}{\partial v}\right) - \beta v\left(p_0\frac{\partial p}{\partial U_0} - \frac{\partial p}{\partial v}\right) + \beta p = \\ &= \beta v\left(\frac{\partial p}{\partial v} - p_0\frac{\partial p}{\partial U_0}\right). \end{aligned}$$

Setzen wir diesen Wert in (11) ein und berücksichtigen (12), so sehen wir, daß in der Tat $dp = 0$ wird.

Die gleichzeitige Änderung von T ist:

$$\begin{aligned} dT &= \frac{\partial T}{\partial v}dv + \frac{\partial T}{\partial U_0}dU_0 + \frac{\partial T}{\partial \beta}d\beta = \\ &= -v\frac{\beta d\beta}{1-\beta^2}\left(\frac{\partial T}{\partial v} - p_0\frac{\partial T}{\partial U_0}\right) + \frac{\partial T}{\partial \beta}d\beta. \end{aligned}$$

Und zwar ist nach (8):

$$\frac{\partial T}{\partial \beta} = T_0 \frac{\partial^2 H}{\partial \beta \partial U_0} = -\frac{1}{1-\beta^2} T_0 \beta \frac{\partial}{\partial U_0}(H+pv) =$$

$$= -\frac{1}{1-\beta^2} \beta T_0 \frac{\partial H}{\partial U_0} - \frac{1}{1-\beta^2} \beta v T_0 \frac{\partial p}{\partial U_0}.$$

Nun ist aber

$$T_0 \frac{\partial p}{\partial U_0} = T_0 \left(\frac{\partial p_0}{\partial U_0} \frac{\partial H}{\partial U_0} + p_0 \frac{\partial^2 H}{\partial U_0^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial U_0 \partial v} \right).$$

Setzen wir hierin

$$T_0 \frac{\partial p_0}{\partial U_0} = p_0 \frac{\partial T_0}{\partial U_0} - \frac{\partial T_0}{\partial v},$$

welche Relation bekanntlich aus der Thermodynamik ruhender Körper folgt, so wird:

$$T_0 \frac{\partial p}{\partial U_0} = \left(p_0 \frac{\partial T_0}{\partial U_0} - \frac{\partial T_0}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial H}{\partial U_0} + p_0 T_0 \frac{\partial^2 H}{\partial U_0^2} - T_0 \frac{\partial^2 H}{\partial U_0 \partial v} =$$

$$= p_0 \frac{\partial}{\partial U_0} \left(T_0 \frac{\partial H}{\partial U_0} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(T_0 \frac{\partial H}{\partial U_0} \right) = p_0 \frac{\partial T}{\partial U_0} - \frac{\partial T}{\partial v}.$$

Also wird

$$\frac{\partial T}{\partial \beta} = -\frac{\beta}{1-\beta^2} \cdot T - \frac{\beta}{1-\beta^2} v \left(p_0 \frac{\partial T}{\partial U_0} - \frac{\partial T}{\partial v} \right)$$

und

$$dT = -\frac{\beta d\beta}{1-\beta^2} T.$$

Die Änderung der Temperatur ist also für alle Körper die gleiche.

Wir können diesen Ausdruck sowie den Ausdruck für dv (12) sofort integrieren. Wir erhalten dann:

$$v = v_0 \sqrt{1-\beta^2}, \qquad (14)$$

$$T = T_0 \sqrt{1-\beta^2}.$$

Wir gelangen also zu dem Resultate:

Wenn sich das Volumen mit der Geschwindigkeit nach obigem Gesetze verkleinert, sich also etwa die Dimensionen der Materie in der Richtung der Bewegung im Verhältnisse

$$\sqrt{1-\beta^2}$$

verkürzen, so bleibt bei adiabatischer Änderung der Geschwindigkeit der Druck jedes Körpers unverändert, während die Temperatur aller Körper in gleichem Maße sinkt. Es ist dann kein Einfluß einer gemeinsamen Translationsbewegung merkbar.

Es stimmt dies mit der Kontraktionshypothese von H. A. Lorentz, sowie mit den Sätzen, die Herr Planck aus dem sogenannten Relativitätsprinzip abgeleitet hat, überein.

Während Herr Planck die Gültigkeit des Relativitätsprinzips von vornherein annimmt, sind wir gewissermaßen zu einem Beweise der Kontraktionshypothese gelangt, in dem wir den Satz postulierten, daß eine gemeinsame Translationsbewegung für einen mitbewegten Beobachter nicht wahrnehmbar ist; oder auch in dem wir gezeigt haben, daß bei konstantem Druck eine Volumänderung in der oben angegebenen Weise eintreten muß.



Über das Eintreffen gleichartiger Meteoriten

von

G. Tschermak,

w. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Dezember 1907.)

I. Meteoriten und Sternschnuppen.

Die Zahl der Meteoritenfälle, die sich auf der Erde jährlich ereignen, ist sehr groß. Reichenbach schätzte dieselbe auf beiläufig 4500.[1] Dies kann wohl nur als ein Minimum angesehen werden. Andere Schätzungen gehen weit darüber hinaus. In einem Jahrhunderte würden demnach zum mindesten 450.000 Fälle eintreten, bei denen einzelne Meteoriten oder Schwärme derselben die Atmosphäre durchdringen und sich mit der Erde vereinigen.

Davon kommt nur wenig in die Sammlungen. Die meisten Meteoritenfälle werden nicht wahrgenommen und die Produkte der beobachteten werden nicht immer gefunden.

Ein Teil dieser fremden Gäste wird aufgelesen, ohne daß der Falltag bestimmt ist, ein Teil ist bisher nicht genauer geprüft und klassifiziert. Von diesen abgesehen, beträgt die Zahl der Meteoritenfälle des vorigen Jahrhunderts ungefähr 320, nämlich solcher, von denen Exemplare aufbewahrt werden, deren Falltag und Beschaffenheit bekannt ist.[2]

---

[1] Poggendorff's Annalen, Bd. 105, p. 557 (1858).

[2] Nach F. Berwerth's Verzeichnis der Meteoriten im naturhistorischen Hofmuseum Ende Oktober 1902 (Annalen des naturhist. Hofmus., Bd. 18), dem auch die übrigen ziffermäßigen Daten bezüglich der Meteoriten entnommen sind.

Obgleich dieser Betrag im Verhältnisse zu der vorher genannten Zahl ein sehr geringer ist, so gilt es doch als wahrscheinlich, daß die Summe der in den Sammlungen vorhandenen Proben die durchschnittliche Beschaffenheit jener kleinen Himmelskörper verrät, welche als Meteoriten fortwährend von der Erde aufgenommen werden. Es ist aber wohl möglich, daß künftig auch einzelne Meteoriten gesammelt werden, die eine neue Zusammensetzung darbieten.

Die Meteoriten enthalten, wie bekannt, nur solche Grundstoffe, die auch in der Erdrinde und der Atmosphäre nachgewiesen sind und ihre Gemengteile gleichen, wenn auch nicht der Art, so doch der Gattung nach, Mineralen. Werden sie nach dem spezifischen Gewicht angeordnet, so ergibt sich eine Reihe, die mit den kohligen Meteoriten von der Dichte 1·7 bis 2·9 beginnt, worauf die feldspatführenden, deren Dichte 3 bis 3·4 ist, folgen. Daran schließen sich die bronzit- und olivinhaltigen Steine, die gewöhnlich kleine Kügelchen (Chondren) enthalten, mit der Dichte 3 bis 3·8; ferner die silikatführenden Eisen, deren Dichte zu 4·3 bis 7 angenommen werden kann, endlich die Meteoreisen von der Dichte 7·5 bis 7·8. Unter den steinartigen Meteoriten bilden jene mit Kügelchen, welche von G. Rose als Chondrite bezeichnet werden, die Hauptmasse. Unter den aufgesammelten 320 Meteoriten des vorigen Jahrhunderts haben ungefähr 270 die Beschaffenheit der Chondrite.

Die Beobachtungen, welche beim Eintritte der Meteoriten in die Atmosphäre gemacht werden, sind gewöhnlich sehr unvollkommen, weil die Beobachter meistens nicht geschult und der plötzlichen Erscheinung gegenüber nicht vorbereitet sind. Wer aus den Aussagen der Augen- und Ohrenzeugen auf die Bahn der Meteoriten in der Atmosphäre schließen will, ist auf die Kombination verschiedenwertiger Wahrnehmungen und auf Schätzungen angewiesen. Wenn nicht ein einzelner Meteorit, sondern ein ganzer Schwarm niederfällt, gibt die Art der Verstreuung auf der Erdoberfläche wenigstens die Projektion der Richtung beiläufig an. Über die Neigung der Bahn und über die Geschwindigkeit der Meteoriten ist nur selten eine sichere Angabe zu erhalten.

Trotz der vielen Schwierigkeiten wurden schon früher von Galle, Heis, Newton, Petit einzelne Meteoritenbahnen berechnet. In der letzten Zeit hat G. v. Niessl die Erforschung des Problems der Meteoriten und Feuerkugeln zu seiner Aufgabe gemacht und die Bahnbestimmungen, soweit dies möglich, mit rühmenswertem Eifer und großem Erfolge durchgeführt.

Das Ergebnis lautet im allgemeinen dahin, daß für die Mehrzahl der Meteoritenfälle eine hyperbolische Bahn anzunehmen ist, weil die Geschwindigkeit, mit welcher diese Körper in die Atmosphäre eintreten, sowohl jene der Planeten, die sich in geschlossenen Bahnen bewegen, als jene der Kometen, welchen parabelähnliche Bahnen zukommen, um ein bedeutendes übertrifft. Demnach würden die Meteoriten, aus fernen Räumen anlangend, in das Sonnensystem eintreten und würden alle jene, die sich hier nicht mit den Planeten vereinigen, diesen Raum wiederum und für immer verlassen. Da jedoch die Geschwindigkeit nicht immer annähernd bestimmt werden kann, so ist es nicht ausgeschlossen, daß es auch Meteoriten gibt, die sich ähnlich den Planeten in elliptischen Bahnen bewegen und in regelmäßiger Wiederkehr das Sonnensystem besuchen.

Den gleichen Charakter bezüglich der Bahn weisen die detonierenden Feuerkugeln auf, deren Wesen von jenem der Meteoriten kaum verschieden sein dürfte, wenngleich keine Residuen derselben gefunden werden.

Die Erscheinung der Sternschnuppen ist eine ähnliche. Sie wird ebenfalls als das Erglühen fester Körper, die in die Atmosphäre eindringen, aufgefaßt. J. V. Schiaparelli, der vor Jahren in einem grundlegenden Werke[1] den Zusammenhang der feurigen Erscheinungen in der Lufthülle unseres Planeten beleuchtete, bezeichnet den astronomischen Unterschied damit, daß den Meteoriten vorwiegend eine hyperbolische Bahn, den Sternschnuppen hingegen eine solche zugeschrieben wird, welche sich der parabolischen nähert.

Durch diese Auffassung ist hier eine numerische Grenze gezogen, deren Bestehen durch den Umstand bekräftigt wird,

---

[1] Entwurf einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen. Deutsch von Boguslawski, Stettin 1871.

daß zur Zeit der großen Sternschnuppenschauer keine größere Häufigkeit der Meteoritenfälle beobachtet wird, ferner dadurch, daß bei Durchsicht der Falltage der genauer bekannten Meteoriten die größte Dichtigkeit auf die Monate Mai und Juni fällt, was mit der Häufigkeit der Sternschnuppen sich nicht vereinigt. Da jedoch die Wahl zwischen den beiden Arten der Bahn bloß durch die Geschwindigkeit beim Zusammentreffen mit der Erde bestimmt ist und diese lediglich auf Schätzungen beruht, so ist die vorbezeichnete Grenze keine scharfe. Mit Recht bemerkt G. v. Niessl, daß nichts hindert, für einen Teil der Sternschnuppen hyperbolische oder auch elliptische Bahnen anzunehmen.[1]

Allgemein gilt als sicher, daß der Lichtstreif in der Atmosphäre von sehr kleinen Stücken fester Körper veranlaßt wird. Nach dem Auftreten der Erscheinung zu schließen, sind diese Körper teils unregelmäßig im Himmelsraume verteilt, zum Teil jedoch nach ihrem Eintritt in das Sonnensystem zu langgezogenen Schwärmen angeordnet.

Was die Beschaffenheit der letzteren betrifft, ist die Gleichartigkeit bemerkenswert, welche sich bei den großen Meteorströmen herausstellt. E. Weiss, einer der ersten Kenner des Phänomens bemerkt,[2] daß die einzelnen Meteorströme ganz verschiedenen Charakter nach Farbe, Lichtschweif, scheinbarer Geschwindigkeit besitzen, daß aber die Sternschnuppen desselben Stromes der Mehrzahl nach dieselbe Leuchtkraft besitzen, woraus man den Schluß ziehen darf, daß hier ungefähr die gleiche Größe der Partikel und die gleiche chemische Beschaffenheit vorherrscht.

Eine Bestätigung dieser Wahrnehmung bieten die spektroskopischen Beobachtungen, da Browning in dem Schweif der Augustmeteore die gelbe Natriumlinie, in jenem der Novembermeteore ein kontinuierliches Spektrum ohne die gelbe Linie erblickte und Secchi in diesem die Magnesiumlinien deutlich erkannte.

---

[1] Über die Periheldistanzen und Bahnelemente... von Meteoriten. Verhandlungen des naturforschenden Vereines in Brünn, Bd. 29 (1891).

[2] Diese Sitzungsber., Bd. 57, Abt. II, p. 281 (1868).

Alle diese Beobachtungen liefern eine Stütze für die Ansicht, daß die zahllosen, im Weltraume verteilten kleinen Körper so angeordnet sind, daß sie zum Teile große Ströme von ungefähr gleichartiger Beschaffenheit bilden und daß die voneinander verschiedenen Ströme auch verschiedene Bahnen verfolgen.

Die stoffliche Beschaffenheit dieser Körper läßt sich nicht bestimmen, aber vielleicht erraten, wenn man die an den Meteoriten gemachten Erfahrungen zu Hilfe nimmt.

Daubrée hat auf die Analogie der petrographischen Zusammensetzung hingewiesen, welche zwischen den Meteoriten und jenen Bestandteilen der Erde, die eine Bildung bei hoher Temperatur verraten, besteht. Das Meteoreisen und die mit Silikaten gemischten Eisen entsprechen der vermutlichen Zusammensetzung des Erdinneren, aus dessen Bereich wohl niemals etwas an die Erdoberfläche gelangt.[1] Die olivin- und bronzithaltigen Meteorsteine sind einigen Felsarten analog, die an der Erdoberfläche wenig verbreitet sind, in größerer Menge aber in den tiefen Regionen der Erdrinde vermutet werden. Die feldspatreichen Meteoriten sind einzelnen eruptiven Felsarten sehr ähnlich.

Werden die seit vielen Jahrtausenden herabgefallenen Meteoriten zu einer Masse vereinigt gedacht, in der die spezifisch schweren den Kern bilden, die übrigen nach Abnahme der Dichte aufeinander folgen, so konstruiert die Phantasie ein kugeliges Gebilde, das der Erde analog zusammengesetzt ist, wenn man die Atmosphäre, das Wasser und die sedimentären Schichten der letzteren wegdenkt. Der Unterschied würde darin bestehen, daß auf der Erde noch eine äußere Schichte jener salzartigen Verbindungen existierte, deren Elemente im Meerwasser gelöst enthalten sind. Solche Verbindungen sind in einigen kohligen Meteoriten bloß in geringer Menge nachgewiesen worden. Spezifisch leichtere Stoffe scheinen jedoch im Sonnensystem eine größere Rolle zu spielen.

Während der Erde eine mittlere Dichte von 5·6 zukommt, berechnet sich für den Mond eine solche von 3·4. Wird für

[1] Schwantke A., Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1906, p. 853.

diesen ein analoger Bau wie für die Erde angenommen, wonach der äußeren Rinde des Mondes die Dichte von höchstens 2 zukäme, so wird die Vermutung angeregt, daß die Kruste des Mondes aus leichterem Material bestehe, ähnlich den vorher genannten salzartigen Verbindungen, die auf dem Monde früher vorhanden gewesenen Wasser absorbiert haben.[1]

Geleitet durch die Formen der Mondoberfläche, die eine ehemals heftige eruptive Tätigkeit verrät, hat man wohl angenommen, daß die Rinde des Mondes aus vulkanischem Gestein, Laven und Aschen von derselben Beschaffenheit bestehe, wie die Produkte der irdischen Vulkane, aber die riesigen Kraterformen auf dem Monde sprechen mehr für eine explosive Tätigkeit, die ein Emporschleudern leichten, pulverigen Materials bewirkte, als für Ergüsse von Laven.

Wenn schon auf dem Begleiter der Erde Massen von geringerer Dichte als jener der Erdrinde anzunehmen sind, so führen die Zahlen für die Dichte der unteren Planeten, wie Jupiter, dessen mittlere Dichte 1·4, Neptun, dessen mittlere Dichte 1·1, zu der Erkenntnis, daß in den äußeren Regionen des Sonnensystems Stoffe von geringer Dichte verbreitet sind und daran knüpft sich die Vermutung, daß die aus fernen Himmelsräumen zu uns gelangende Spreu zum großen Teil aus solchen Stoffen bestehe.

Zuerst könnte man an lockere, staubförmige Massen denken, die im weiten Raume Wolken bilden. Solche könnten wie die Meteoritenschwärme in die Atmosphäre treten und sich hier zerteilen. Dafür würde der Fund in dem bei der Challenger-Expedition emporgebrachten Meeresschlamm sprechen, worin Renard kleine Kügelchen beobachtete, die den eisenhaltigen Chondren vollkommen gleichen.

Ferner möchte man in den fernen Räumen auch Flocken jener pulverigen, salzartigen Verbindungen annehmen. In den kohligen Meteoriten sind außer dem Steinstaub auch Kohle und Kohlenwasserstoffe zugegen. Beim Auflesen der Meteoriten von Pultusk wurden als Begleiter derselben auch Flocken von

---

[1] Siehe meine Abhandlung über den Vulkanismus als kosmische Erscheinung. Diese Sitzungsber., Bd. 75, Abt. I, p. 166 (1877).

kohliger Beschaffenheit beobachtet. Für das selbständige Auftreten von kohligen Flocken unter den zur Erde gelangenden Gästen spricht auch die von A. E. Nordenskiöld erwähnte Auffindung kohligen Staubes auf frischem Eis und Schnee in menschenleeren Gegenden.[1]

Bei der niedrigen Temperatur des Weltraumes, die nach Pouillet ungefähr —142° beträgt, könnten daselbst auch Stoffe, die an der Erdoberfläche im flüssigen oder dampfförmigen Zustande vorkommen, in fester Form bestehen und könnten auch Flocken solcher Stoffe, wie Schnee, Kohlendioxyd und leichter Kohlenwasserstoffe in großen Schwärmen die fernen Regionen durchziehen. Diese würden sich aber, wenn sie nicht von festen Stoffen adsorbiert sind, kaum längere Zeit in dieser Form erhalten und würden allmählich in die Gasform übergehen.

Dem Gesagten entsprechend, gewinnt die Vermutung Raum, daß Partikel und Flocken von lockerer Beschaffenheit und scheinbar geringer Dichte, die aus verschiedenen Stoffen, wie Steinpulver, salzartigen Verbindungen, aus Kohle und Kohlenwasserstoffen bestehen, im Weltraume verbreitet sind und zum Teil stromweise in das Sonnensystem eintreten. Ein kleiner Teil derselben begegnet der Erde und tritt mit einer enormen Geschwindigkeit in die Atmosphäre. Die Partikel werden glühend, leuchtend und geben die Erscheinung der Sternschnuppen. Der genannten Zusammensetzung und lockeren Beschaffenheit zufolge werden dieselben schon bevor sie der Erde nahe kommen, verbrannt, fein verteilt, wie man zu sagen pflegt, aufgezehrt, indem sie Kohlensäure, Wasserdampf und einen feinen Staub zurücklassen. Demnach wäre das Material der Sternschnuppen bezüglich der Aggregation und zum Teil auch in chemischer Beziehung von jenem der Meteoriten verschieden.

II. Die vulkanische Theorie der Meteoritenbildung.

Die Meteoriten gelangen in der Form von Bruchstücken und Splittern in die Atmosphäre, woraus geschlossen wird, daß

---

1 Zeitschrift der deutschen geol. Ges., Bd. 33, p. 27 (1881).

dieselben durch Zertrümmerung von größeren Massen entstanden sind. Sie zeigen in ihrer Struktur Ähnlichkeit mit vulkanischen Felsarten, mit deren Breccien, Tuffen und es weist ihr Gefüge an vielen Stücken auf sehr intensive Vorgänge der Verschiebung, Zerstäubung und Wiedervereinigung durch Schmelzung und Frittung hin. Demnach ist es wahrscheinlich, daß jene Zertrümmerung durch einen Vorgang ähnlich den vulkanischen Explosionen erfolgte.

Von der Ansicht ausgehend, daß die vulkanischen Erscheinungen der Erde durch die Entwicklung der in dem metallischen Erdkern absorbierten Gase und Dämpfe, die bei der allmählichen Erstarrung des glutflüssigen Inneren sich entbinden, hervorgebracht werden und daß dem analog an kleinen kosmischen Körpern bei deren Abkühlung Eruptionserscheinungen von großer Heftigkeit eintreten würden, habe ich vor mehreren Jahren die Hypothese der vulkanischen Entstehung der Meteoriten entwickelt[1] und bin zu dem Schlusse gelangt, daß die Erwägung aller Umstände dazu führt, eine Anzahl kleiner Himmelskörper, die zwar einen erheblichen Umfang hatten, aber doch so klein waren, daß sie Trümmer, welche durch Explosionen emporgeschleudert wurden, nicht mehr zurückzuführen vermochten, als die Werkstätten der Meteoriten anzusehen. Jene kleinen Sterne verloren aber durch das wiederholte Abschleudern der Bruchstücke fortwährend an Masse, bis sie endlich ganz oder zum großen Teil in kleine Stücke aufgelöst wurden, die nun in verschiedenen Bahnen den Weltraum durchziehen.

Diese Annahme unterscheidet sich erheblich von der älteren Explosionshypothese, nach welcher jene kleinen Himmelskörper durch eine heftige Explosion zerplatzten und mit einem Male zertrümmert wurden. In diesem Falle müßten, wie Schiaparelli richtig bemerkte, außer kleinen Stücken auch sehr große Blöcke nach allen Richtungen verstreut werden, so daß keine Schwärme von kleinen Stücken gebildet würden.

---

[1] Die Bildung der Meteoriten und der Vulkanismus. Diese Sitzungsber., Bd. 71, Abt. IIa, p. 661 (1875).

Die Meteoriten sind immer relativ kleine Massen und ihr Gefüge weist auf einen Vorgang der Zerteilung hin, der mit dem auf der Erde beobachteten vulkanischen Prozeß bloß durch das Emporschleudern fester Stücke eine Ähnlichkeit hat, während alles fehlt, was an die Bildung von Laven erinnert.

Das Material der Meteoriten ist nur in der Minderzahl der Fälle gleichförmig kristallinisch, was auf die ruhige Bildung einer Erstarrungskruste hinweist. Viele Meteoriten zeigen eine Zusammenfügung von Splittern, ein tuffartiges Gefüge, was einer Zermalmung des früheren kristallinischen Gesteins entspricht. Die meisten sind Chondrite und bestehen aus ganzen oder zerbrochenen Kügelchen und aus kristallinischer oder tuffartiger Grundmasse. Dies spricht wiederum für eine gestörte Bildung unter häufiger Bewegung der ganzen Masse.

Der Auflösungs- und Zerteilungsprozeß der gedachten kleinen Himmelskörper vollzieht sich gemäß der vulkanischen Hypothese derart, daß immer, sobald sich eine Erstarrungskruste gebildet hatte, diese durch die empordringenden heißen Gase zerkleinert, durch Stöße zerrieben, in Staub und kleine Stücke umgeformt und wieder zusammengefrittet, endlich durch stärkere Explosionen abgesprengt wird und dieser Vorgang sich beständig wiederholt. Die erste Kruste besteht aus spezifisch leichteren Massen, die folgenden sind ein schweres Material, bis endlich auch Krusten von Eisen gebildet, zersprengt, abgeschleudert und zerstreut werden. Die gleichzeitig abgesprengten Stücke würden besonders im Anfange dieser Zertrümmerung von gleichartiger Beschaffenheit sein. G. v. Niessl hat die vulkanische Hypothese einer allgemeinen Diskussion unterzogen und ist zu dem Ergebnisse gelangt, daß die Auflösung solcher explodierender Massen in Gegenden außerhalb des Sonnensystems zu verlegen seien.[1]

Wird der angenommene Vorgang weiter verfolgt, so ergibt sich, daß die abgesprengten Stücke verschiedene Bahnen, darunter auch geschlossene, antreten, also rekurrente, regelmäßig wiederkehrende Schwärme gebildet werden können. Alle so entstehenden, gleichzeitig gebildeten Meteoriten haben

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 113, Abt. IIa, p. 1361 (1904).

in ihrem Laufe den Explosionspunkt gemein. Werden ihre Bahnen zurückverfolgt, so kreuzen sich dieselben in jenem Punkte. Bei wiederholten Explosionen reihen sich viele solche Kreuzungspunkte aneinander. Aus dem Gesagten folgt, daß gleichartige Meteoriten verschiedene Bahnen antreten können, deren ursprünglicher Kreuzungspunkt nicht leicht erkennbar wäre.

Ist die Explosionsstelle weit von dem Zentralkörper entfernt, wo die Geschwindigkeit des die Meteoriten erzeugenden Körpers eine geringe ist, so hat die Explosionsgeschwindigkeit einen erheblichen Einfluß auf die Gestaltung der Meteoritenbahnen. Viele der Trümmer werden in Richtungen geraten, die von jener des erzeugenden Körpers stark abweichen. Ein Teil behält anfangs die Richtung des letzteren und bewegt sich mit vermehrter Geschwindigkeit weiter. Es sind jene, bei denen die Stoßrichtung mit der Bahnrichtung nahe übereinstimmt. Jene, deren Explosionsrichtung der Bahnrichtung des erzeugenden Körpers entgegengesetzt ist, werden mit verminderter Geschwindigkeit ihren Lauf antreten oder sogar eine rückläufige Bewegung annehmen.

Diesen Bemerkungen, welche sich Niessl's Ausführungen anschließen, möchte ich noch zufügen, daß nach der vulkanischen Hypothese die Explosionen fortdauern, während sich der erzeugende Körper dem Sonnensystem nähert. Jetzt wird die Explosionsgeschwindigkeit immer weniger Einfluß auf die Veränderung der ursprünglichen Bahn ausüben und werden die entstehenden Meteoritenschwärme immer mehr der ursprünglichen Bewegungsrichtung treu bleiben. Gleichartige Stücke werden benachbarte Bahnen einschlagen, so daß der Auflösungsprozeß Schwärme liefert, welche eine Anordnung entsprechend der Zeitfolge ihrer Entstehung darbieten. Trifft nun ein Teil dieser Schwärme mit der Erdbahn zusammen, so kann die Erscheinung eintreten, daß mit der Zeit eine regelmäßige Verschiebung jenes Punktes eintritt, in welchem die Erdbahn von einem solchen Schwarme durchschritten wird.

Es kann nicht meine Aufgabe sein, den astronomischen Teil der hier berührten Meteoritentheorie weiter auszuführen, was den Forschern vorbehalten bleibt, welche dieses Gebiet

beherrschen. Die vorstehende Betrachtung dürfte aber ausreichen, um anzudeuten, daß infolge der hier angenommenen Bildungsweise der Meteoriten die Ausstreuung derselben im Weltraume so stattgefunden hätte, daß dieselben zum Teil in Schwärmen von gleichartiger Beschaffenheit angeordnet wurden und daß demgemäß Schwärme von verschiedener Beschaffenheit auch verschiedene Bahnen verfolgen. Damit ist einerseits der weiter zu besprechende Versuch gerechtfertigt, einer Gesetzmäßigkeit des Erscheinens gleichartiger Meteoriten nachzuforschen, andrerseits die Analogie zwischen Meteoriten und Sternschnuppen zu beleuchten. Für letztere wären als erzeugende Körper keine kompakten Massen, vielmehr lockere Anhäufungen von festen und flüchtigen Stoffen anzunehmen, die beim Eintritt in das Sonnensystem in Flocken aufgelöst und oft stromweise angeordnet würden.

Die kosmischen Staubmassen, durch deren Zusammenschließung die Meteoriten, Sternschnuppen und Kometen entstehen, leitet S. Arrhenius von den unmeßbar kleinen Partikelchen ab, die von der Sonne und den vielen anderen glühenden Zentralkörpern aus vom Strahlungsdruck in den Sternenraum geführt werden und sich stellenweise zu größeren oder kleineren Aggregaten ansammeln.[1]

Arrhenius verlegt die Bildung der Meteoriten in die Region der Nebelflecke, weit außerhalb des Sonnensystems.

III. Falltage der gleichartigen Meteoriten.

Bei der Betrachtung der Fallzeiten ergibt sich eine ungleiche Verteilung auf die einzelnen Tage des Jahres. Einer gleichförmigen Verbreitung der Meteoriten im Raume würde auch eine derartige Verteilung der Fallzeiten entsprechen, zumal die Zahl der sämtlichen bisher bekannten Fallzeiten der Zahl 365 nahekommt. Dem entgegen zeigen sich einerseits Lücken, andrerseits für manche Tage Anhäufungen von Meteoritenfällen, woraus man schließen könnte, daß die Meteoriten in Strömen angeordnet sind, welche zur selben Zeit

---

[1] Das Werden der Welten. Übersetzt von L. Bamberger. Leipzig 1907.

des Jahres wiederkehren. Wenn man sich aber gegenwärtig hält, daß die Zahl der beobachteten Meteoritenfälle nur einen verschwindend kleinen Teil der tatsächlich eingetretenen ausmacht, so wird man jenen Anhäufungen keine so weittragende Bedeutung beimessen.

Wären die Meteoriten von gleicher Fallzeit in chemischer und petrographischer Beziehung als gleichartig zu betrachten, so hätte die Vorstellung von einer homogenen Beschaffenheit der einzelnen Meteorströme einige Berechtigung und die Erforschung der Bahnen, welche diese Körper vor ihrem Eintritt in die Atmosphäre beschreiben, könnte dafür den Beweis erbringen. Die an gleichen oder benachbarten Tagen gefallenen Meteoriten zeigen aber gewöhnlich eine verschiedene Zusammensetzung oder wenigstens verschiedene Struktur, daher es bei der ersten Durchsicht der Angaben scheint, als ob kein Zusammenhang zwischen dem Orte des Zusammentreffens mit der Erde und der Art der Meteoriten bestünde.

Bei genauer Durchmusterung ergeben sich jedoch nicht wenige Beispiele dafür, daß gleicher Fallzeit auch eine gleiche oder ähnliche Beschaffenheit entspricht. Dadurch veranlaßt, unternahm es A. G. Högbom[1] auf Grund der von E. A. Wülfing veröffentlichten Zusammenstellung[2] eine Statistik der bis zum Jahre 1896 bekannten und durch Proben belegten Meteoritenfälle unter Angabe der beiläufigen Stellung im petrographischen Systeme zu verfassen, die eine gute Übersicht gewährt.

Von den dort verzeichneten Beispielen mögen vorläufig nur zwei hervorgehoben werden:

1803 am 13. Dezember Massing,
1813 am 13. Dezember Luotolaks.

Die beiden Meteoriten sind petrographisch sehr ähnlich, doch wären dieselben in chemischer Beziehung noch vollständiger als bisher zu untersuchen.

---

[1] Eine meteorstatistische Studie. Bull. of the Geol. Instit. of Upsala, Nr. 9, Vol. V, Part I (1900). Eine Zusammenstellung der Falltage ohne Angabe der petrographischen Beschaffenheit hat auch Reusch im Jahrb. für Mineralogie, 4. Beilageband, p. 513 (1886) gegeben.

[1] Die Meteoriten in Sammlungen und ihre Literatur. Tübingen 1897.

1827,	am 9. Mai	Drake Creek,
1829,	» 8. »	Forsyth,
1840,	» 9. »	Karakol,
1846,	» 8. »	Monte Milone.

Alle vier sind einander sehr ähnlich. Sie gehören zu den weißen Chondriten. Die zwei ersten sind sehr unvollkommen, die beiden anderen gar nicht analysiert. Somit fehlt der genauere Nachweis ihrer Gleichartigkeit. Die Nachrichten über die Fallerscheinungen gestatten für keinen der genannten Meteoriten eine Berechnung der Bahn. Aus diesen Gründen lassen sich diese Fälle nicht verwenden, um der Frage bezüglich der Herkunft gleichartiger Meteoriten näherzutreten.

Diese wenigen Andeutungen geben schon zu erkennen, welche Hindernisse gegenwärtig einer gründlichen Erforschung des Meteoritenphänomens entgegenstehen. Bald fehlt es an der petrographisch-chemischen, bald an der astronomischen Bestimmung, meist an beiden. Die Angabe der Fallzeit allein ist nicht genügend.

Was die Bahnbestimmung, d. i. die Berechnung der Bahntangente und Geschwindigkeit betrifft, so läßt sich für die Zukunft nichts weiter tun, als immer wieder betonen, daß die Meteoritenforschung nicht nur ein petrographisches, sondern zugleich ein astronomisches Problem verfolgt und daß die Aufsammlung aller Falldaten ebenso wichtig ist als die Aufsammlung der gefallenen Exemplare. Obwohl die Erscheinung eine sehr seltene ist, wäre es doch zweckmäßig, eine einfache Belehrung über die bei Meteoritenfällen zu beobachtenden Erscheinungen und erforderlichen Zeitmessungen zu verfassen und diese in geeigneter Weise zur Kenntnis der Naturfreunde aller Länder zu bringen.

Die Erforschung der petrographisch-chemischen Beschaffenheit hingegen liegt in der Hand jener, die im Besitze größerer Quantitäten einzelner Meteoriten sind. Das Aufbewahren solcher liegt allerdings im Interesse der Erforschung durch künftige Generationen, aber bei dem gegenwärtig schon hochentwickelten Zustande der petrographischen und chemischen Analyse wäre es schon an der Zeit, eine systematische

Untersuchung der Meteoriten in beiden Richtungen durchzuführen. In jeder größeren Sammlung lagern von mehreren Meteoritenfällen größere Mengen, daher ohne Gefahr für die künftige Forschung so viel geopfert werden kann, daß eine petrographische Prüfung und eine chemische Analyse durchführbar ist. Von einzelnen Meteoritenfällen liegt das Hauptstück in einer kleineren Sammlung und die großen Museen besitzen bloß Splitter davon, die höchstens eine beiläufige Klassifikation ermöglichen. Es wäre demnach ein Zusammenwirken aller Besitzer von Meteoriten erwünscht. Die Bearbeitung sollte so durchgeführt werden, daß nur bewährte Fachmänner mit denselben betraut werden und nicht Anfänger, die zum ersten Mal einen Meteoriten in die Hand bekommen.

IV. Fallzeiten der Eukrite.

Wenn am gleichen Tage verschiedener Jahre zwei Meteoritenfälle beobachtet werden, die gleichartige Meteoriten lieferten, so kann diese Wiederholung einem Zufalle zugeschrieben werden. Die Bahn des einen und des anderen kann eine sehr verschiedene gewesen sein und es ist bloß der Durchschnittspunkt an der Erdbahn, die Knotenlänge annähernd die gleiche. Würde sich aber herausstellen, daß für beide Fälle die Bahn im Sonnensystem ungefähr die gleiche war, so erhält damit die Existenz eines Meteorstromes von homogener Beschaffenheit einige Wahrscheinlichkeit. Letztere würde noch vergrößert, wenn diese zwei Meteoriten von den übrigen erheblich verschieden wären, weil der supponierte Strom sich von anderen Strömen und von den regellos verteilten Meteoriten deutlich abheben würde. Die bezeichnete Wahrscheinlichkeit würde sich endlich sehr der Gewißheit nähern, wenn unter gleichen Umständen die Erscheinung auch ein drittes Mal einträte, wenn also drei gleichartige Meteoriten das gleiche Zusammentreffen mit der Erdbahn und ungefähr gleiche Bahnen im Sonnensystem aufwiesen. Eine solche Wiederholung ist jedoch bisher noch nicht konstatiert.

Wenn bemerkt wird, daß am selben oder an benachbarten Tagen verschiedener Jahre drei Fälle gleichartiger Meteoriten sich ereignet haben, ohne daß Beobachtungen gemacht wurden,

die eine Bahnbestimmung ermöglichen, so wird diese Wiederholung schon eine, wenn auch geringe Wahrscheinlichkeit des Zusammenhanges der Erscheinungen ergeben. Diese wird aber vergrößert, wenn diese drei gleichartigen Meteoriten zugleich von den übrigen verschieden wären. Wenn dieselbe Knotenlänge gleichartiger Meteoriten mehr als dreimal vorkommt, so wird ein Zusammenhang dieser Beobachtungsergebnisse nicht mehr zweifelhaft sein, wenngleich keine Bahnbestimmungen vorliegen, also eine Erklärung im vorgedachten Sinne noch aussteht. Bei jeder ferneren Wiederholung wird aber ein solcher Zusammenhang immer sicherer begründet sein.

Von diesen Erwägungen ausgehend, habe ich die Falldaten aller jener Meteoriten, die sich von der Hauptmasse derselben, also von den Chondriten, merklich unterscheiden, genauer verglichen (siehe Anmerkung 1).

Vor allem erschienen mir die Daten bezüglich der Eukrite bemerkenswert. Stellt man deren Fallzeiten zusammen, so ergibt sich eine merkwürdige Regelmäßigkeit, aber nicht von der Art, daß das Eintreffen immer am gleichen Knotenpunkte stattfindet, vielmehr in einer solchen Aufeinanderfolge, daß ein ungefähr gleichförmiges und beständiges Vorrücken der Knotenpunkte wahrzunehmen ist. Dies zeigt schon die Übersicht der Falltage:

1808, Mai 22....... Stannern,
1819, Juni 13...... Jonzac,
1821, Juni 15...... Juvinas,
1855, August 5.... Petersburg,
1865, August 25.... Shergotty,
1899, Oktober 24... Peramiho.

Diese Reihe umfaßt alle Meteoriten von bekannter Fallzeit, die auf Grund petrographischer und chemischer Gleichartigkeit zu den Eukriten gerechnet werden können. Vier davon, jene von Stannern, Jonzac, Juvinas und Peramiho, sind einander außerordentlich ähnlich und besitzen ganz gleiche chemische Zusammensetzung. Die übrigen zwei, jene von Petersburg und Shergotty, werden nicht allgemein als Eukrite betrachtet, obwohl dieselben zufolge ihrer Zusammensetzung

hier und nicht in die nächste Gruppe einzureihen sind (siehe Anmerkung 2). Auch wenn hervorgehoben wird, daß diese beiden Meteoriten nicht genau den übrigen Eukriten gleichen, so ist doch zu berücksichtigen, daß dieselben als lokale Ausbildungsarten des gleichen Gemenges angesehen werden können.

Jedenfalls sind die zuvor aufgezählten Meteoriten von allen übrigen merklich verschieden, wodurch die Wahrscheinlichkeit, daß der Reihenfolge ihrer Fallzeiten eine Gesetzmäßigkeit entspricht, vergrößert wird. Freilich muß dabei angenommen werden, daß jene Eukrite, deren Fall nicht beobachtet wurde, auch dieser Reihenfolge der Fallzeiten sich einordnen.

Um genauer vergleichbare Zahlen zu erhalten, richtete ich an Herrn Hofrat E. Weiss das Ersuchen um die Bestimmung der Knotenlängen sowohl der Eukrite als der noch weiter zu besprechenden Meteoritenfälle. Ich verdanke seiner gütigen Bereitwilligkeit die weiterhin angegebenen Zahlen, die von Herrn Dr. A. Prey ermittelt wurden.

Die geographischen Längen beziehen sich auf den Meridian von Greenwich, die Erdlängen oder Knotenlängen auf das mittlere Äquinoctium von 1900. Diese sind in ganzen Graden und Dezimalteilen angegeben.

		Geogr. L.	Knotenlänge
Stannern,	1808, Mai 22, um 6^h a.	12° 36′ O	242·13°
Jonzac,	1819, Juni 13, » 6^h a.	0 27 W	262·45
Juvinas,	1821, Juni 15, » $3^h 30^m$ p. ..	4 21 O	265·20
Petersburg,	1855, Aug. 5, » $3^h 30^m$ p. ..	86 50 W	313·45
Shergotty,	1865, Aug. 25, » 9^h a.	85 33 O	332·38
Peramiho,	1899, Okt. 24, » 7^h a.	35 32 O	390·56

Um keinen Widerspruch aufkommen zu lassen, sollen zuerst bloß jene vier Fälle, deren Meteoriten ganz unzweifelhaft gleichartig sind, einer Berechnung unterzogen werden. Wird hier angenommen, daß die Verschiebung des Knotens der Zeit proportional erfolgt, so erhält man nach Ermittelung der Konstanten durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate für die Knotenlängen E die Formel

$$E = 230·64 + 1·6175t,$$

in welcher t die Jahreszahl minus 1800 bedeutet. Dieser entsprechend ergeben sich im Vergleiche zu den Beobachtungen die Zahlen:

	Beob.	Rechnung	B.—R.
1808, Stannern........	242·13	243·58	—1·45
1819, Jonzac	262·45	261·37	+1·08
1821, Juvinas.........	265·20	264·61	+0·59
1899, Peramiho	390·56	390·78	—0·22

Die berechneten Werte stimmen mit den Beobachtungen so gut überein, als es nach der Analogie mit den wiederkehrenden Sternschnuppenschauern zu erwarten war, denn die größte Differenz übersteigt nicht $1^1/_2$ Tage. Somit ist hier ein regelmäßiges Vorschreiten des Knotens konstatiert.

Die obige Zusammenstellung regt nunmehr zwei Fragen an. Die eine bezieht sich auf die Möglichkeit einer gemeinsamen Herkunft dieser Meteoriten, die zweite auf die regelmäßige Verschiebung der Knoten.

Da die vier Eukrite einander ungemein ähnlich sind, so ist nach den früheren Erörterungen eine Übereinstimmung ihrer Bahnen zu erwarten und die der Zeit proportionale Zunahme der Knotenlängen würde voraussichtlich durch die sukzessive Bildung zu erklären sein. Die Frage, ob jene Übereinstimmung sich bestätigt, erschien im vorliegenden Falle wenigstens zum Teile beantwortet werden zu können, da für drei dieser Meteoritenfälle Angaben vorhanden sind, welche eine beiläufige Bestimmung der Bahnelemente gestatten. Ich wandte mich daher an den Herrn Hofrat G. v. Niessl, der schon früher eine Untersuchung über den Meteoritenfall von Stannern veröffentlicht hatte, mit der Bitte, auch die beiden anderen Fälle, jene von Jonzac und von Juvinas, einer Berechnung unterziehen zu wollen. Mit großer Bereitwilligkeit ging dieser auf meine Anregung ein und bemühte sich, auf Grund der oft mangelhaften Daten die Bahnberechnung durchzuführen.

Das Resultat[1] war der Ansicht von der kosmischen Zusammengehörigkeit ungünstig, indem sich herausstellte, daß

[1] Siehe diese Sitzungsber., Bd. 113, Abt. II a, p. 1361 (1904).

die von den drei Meteoriten im Sonnensystem unmittelbar vor dem Zusammentreffen mit der Erde verfolgten Bahnen wesentlich verschieden waren. Auch die weiteren Berechnungen begegneten unter der Annahme, daß die drei verschiedenen Bahnen innerhalb des Sonnensystems durch Störungen seitens eines der großen Planeten, insbesondere Jupiters, aus ursprünglich einheitlichen oder nahezu identischen Bahnen entstanden seien, einer großen Schwierigkeit, indem zwar die Bahnen von Jonzac und Juvinas durch solche Störungen erzeugt worden sein können, die Bahn von Stannern hingegen ohne Voraussetzungen, denen nur geringe Wahrscheinlichkeit zukommt, sich nicht in gleicher Weise ableiten läßt.

Dieser Schwierigkeit läßt sich dadurch begegnen, daß die Bildungsstätte dieser drei Meteoriten in einen Punkt weit außerhalb der Planetenregion verlegt wird, wo auch störende Körper von geringer Masse eine völlige Umwandlung der ursprünglichen Bahnen veranlassen konnten. Dann ergibt sich die Möglichkeit ihrer Herkunft aus derselben Gegend des Weltraumes, wenigstens kann dem gegenüber nicht mit Sicherheit behauptet werden, daß jene Meteoriten von ganz verschiedener Abkunft seien.

Die Mitteilung G. v. Niessl's besagt also, daß aus den Beobachtungen beim Niederfallen der genannten Meteoriten kein Beweis für einen gemeinsamen Ursprung abgeleitet werden kann, wenngleich die Möglichkeit eines solchen nicht ausgeschlossen ist.

Dieses Ergebnis, das meine Erwartung täuschte, war nicht sehr ermutigend. Ich zögerte daher, meine Niederschrift, welche die erkannte Regelmäßigkeit des Eintreffens dieser und anderer gleichartiger Meteoriten beleuchten soll, zu veröffentlichen. Schließlich überwog aber meine Überzeugung, daß trotzdem hier ein Zusammenhang der Erscheinungen bestehen müsse.

Einerseits ist es die Gleichartigkeit der Eukrite, die so groß ist, daß, wenn die Steine irdischen Ursprungs wären, jeder Petrograph geneigt wäre, anzunehmen, daß dieselben von einer und derselben Eruptivmasse herrühren, andrerseits war ich in der Ansicht, die regelmäßige Folge des Erscheinens der Eukrite sei nicht als ein Spiel des Zufalls zu betrachten,

dadurch bestärkt worden, daß nach der Berechnung, die ich vor 8 Jahren anstellte, sich ergab, daß in dem Falle, als in den nächsten Jahren das Niederfallen eines Eukrits beobachtet würde, dies gegen Ende Oktober eintreten sollte. In der Tat wurde diese Vorausberechnung durch den Fall des Eukrits von Peramiho am 24. Oktober 1899 bestätigt.

Obwohl es nicht gelungen ist, die Regelmäßigkeit des Eintreffens dieser Meteoriten durch eine Ähnlichkeit ihrer Bahnen im Sonnensystem zu erklären, so ist doch die Möglichkeit nicht zu bestreiten, daß durch die Betrachtung der vorliegenden Daten von einem neuen Gesichtspunkt eine solche Erklärung gelingen werde. Die vulkanische Hypothese der Meteoritenbildung leitet schon darauf, daß Meteoriten gleichen Ursprungs verschiedene Bahnen einschlagen können. Daß einige derselben trotzdem die Erdbahn in demselben Punkte oder nahe demselben schneiden, bildet ein Problem, das einstweilen wohl kaum lösbar erscheint, zu dessen Lösung aber eine Zusammenstellung dieser Schnittpunkte beitragen kann.

Diese Auffassung läßt den Versuch nicht ganz überflüssig erscheinen, die Knotenpunkte der petrographisch gleichartigen Meteoriten zu vergleichen, weil dadurch eine Anregung für künftige Forschungen gegeben ist.

Vorher wurde schon bemerkt, daß das Zusammentreffen der Gleichartigkeit von Meteoriten mit der regelmäßigen Wiederkehr ihres Falles auch dann von Bedeutung sei, wenn bezüglich der Bahn dieser Meteoriten keine Beobachtungen vorliegen, zumal wenn die Zahl der Fälle eine größere ist. Dieser Ansicht folgend, will ich die Knotenpunkte sowohl der vier genannten, im strengsten Sinne gleichartigen Eukrite, als der zwei denselben nahestehenden Meteoriten von Petersburg und Shergotty, für welche keine genaueren Falldaten bekannt sind, einer Betrachtung unterziehen.

Wird auch hier angenommen, daß die Verschiebung des Knotens der Zeit proportional erfolgt, so erhält man nach Bestimmung der Konstanten durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate für die Knotenlänge L die Formel

$$L^{\circ} = 230 \cdot 04 + 1 \cdot 5953\, t,$$

in welcher t die Jahreszahl minus 1800 bedeutet. Dieser entsprechend ergeben sich im Vergleiche mit der Beobachtung folgende Zahlen:

	Beob.	Rechnung	B.—R.
1808, Stannern	242·13	242·80	—0·67
1819, Jonzac	262·45	260·35	+2·10
1821, Juvinas	265·20	263·54	+1·66
1855, Petersburg	313·45	317·77	—4·32
1865, Shergotty	332·38	333·73	—1·35
1899, Peramiho	390·56	387·98	+2·58

Die Übereinstimmung der beobachteten und berechneten Werte ist eine befriedigende. Immerhin ergeben sich Abweichungen, die bis 4·32° gehen, wonach für den Meteoritenstrom, der hier angenommen werden kann, ungefähr das doppelte zu nehmen wäre, also die Breite des Stromes beim Durchschnitte mit der Erdbahn mindestens 8·6° ausmachen würde. Diese Breite ist von einem Betrage, der nichts Unwahrscheinliches darbietet. Übrigens lassen sich die Knotenlängen mit einer noch größeren Annäherung an die beobachteten berechnen, wenn zwar eine der Zeit proportionale Zunahme, zugleich aber ein periodisches Schwanken dieses Fortschrittes angenommen wird (Anmerkung 3).

Für eine Periode von 72 Jahren erhielt ich die Zahlen:

	Beob.	Rechnung	B.— R.
1808, Stannern	242·13	242·64	—0·51
1819, Jonzac	262·45	261·78	+0·67
1821, Juvinas	265·20	264·98	+0·22
1855, Petersburg	313·45	314·24	—0·79
1865, Shergotty	332·38	331·56	+0·82
1899, Peramiho	390·56	391·00	—0·44

Hier ist die Übereinstimmung eine so vollkommene, daß die größte Differenz noch nicht einen vollen Tag ausmacht. Der Kreuzungspunkt des angenommenen Meteoritenstromes würde, nach dieser Berechnung zu urteilen, in einem Jahrhundert um beiläufig 160° vorschreiten. Es erscheint aber auch

möglich, daß nach längerer Zeit eine Verschiebung im entgegengesetzten Sinne eintritt.

Die hier erkannte Regelmäßigkeit verdient aus dem Grunde besonders hervorgehoben zu werden, weil alle bisher bekannten Eukrite derselben folgen, keine Ausnahme stattfindet und die Zahl 6 der dieser Gruppe angehörigen Fälle so erheblich erscheint, daß die Wahrscheinlichkeit ihrer astronomischen Zusammengehörigkeit eine sehr große ist.

V. Fallzeiten der Howardite und nahestehender Meteoriten.

Den Eukriten sind die Howardite ähnlich, doch unterscheiden sich diese durch einen wesentlichen Bronzitgehalt und dem entsprechend in chemischer Beziehung durch die geringere Menge von Calcium. Die Struktur ist die einer feinen Breccie, was hier als tuffartig bezeichnet wird (Anmerkung 1 und 4). Unter den Juli — August-Meteoriten sind drei Howardite hervorzuheben:

		Geogr. Länge	Knotenlänge
Nobleborough,	1823, Aug. 7, um $4^h 30^m$ p. . .	69°40′ W	315·55°
Le Teilleul,	1845, Juli 14, um 3^h p.	0 53 W	292·70
Pawlowka,	1882, Aug. 2, um $4^h 30^m$ p. . .	42 20 O	310·53

Hier zeigt sich eine große Verschiedenheit der Knotenlängen, so daß eine Zusammengehörigkeit kaum erkennbar ist. Wird jedoch auch in diesem Falle außer einer der Zeit proportionalen Abnahme auch ein gleichzeitiges Schwanken dieser Abnahme vorausgesetzt und so wie bei den Eukriten eine 72jährige Periode angenommen (Anmerkung 3), so berechnen sich die Knotenlängen mit großer Annäherung an die Beobachtung.

	Beob.	Rechnung	B.—R.
1823, Nobleborough	315·55°	315·40°	+0·15
1845, Le Teilleul.	292·70	292·54	+0·16
1882, Pawlowka	310·53	310·65	—0·30

Ähnlich wie diese verhalten sich die Fallzeiten dreier Juni-Meteoriten, von denen jedoch die ersten zwei zu den bronzitischen Gemengen gehören und nur der dritte zu den Howarditen gezählt wird (Anmerkung 1).

		Geogr. Länge	Knotenlänge
Manegaon,	1843, Juni 29, um $3^h 30^m$ p....	75° 37′ O	277·77°
Ibbenbühren,	1870, Juni 17, um 2^h p.......	7° 42′ O	266·50
Jodzie,	1877, Juni 17, um $4^h 30^m$ p....	24° 22′ O	266·28

Auch hier ergibt sich eine vollständige Übereinstimmung der Rechnung mit der Beobachtung, wenn dieselben Voraussetzungen gelten wie vorhin und wiederum eine Schwankungsperiode von 72 Jahren angenommen wird (Anmerkung 3).

	Beob.	Rechnung	B.—R.
1843, Manegaon	277·77°	277·71°	+0·06
1870, Ibbenbühren ...	266·50	266·52	—0·02
1877, Jodzie	266·28	266·32	—0·04

Als zusammengehörig werden oft jene Meteoritenfälle betrachtet, welche sich um die erste Hälfte des Dezember ereignen, wegen des beiläufigen Zusammentreffens mit der Erscheinung des Kometen Biela.

Werden diejenigen ausgewählt, deren Meteoriten vermöge ihrer Zusammensetzung als ähnlich anzusehen sind, so ergibt sich die Reihe:

1803, Dezember 13.....	Massing,
1813, Dezember 13.....	Luotolaks,
1850, November 30.....	Shalka,
1852, Dezember 2.....	Busti,
1868, Dezember 5.....	Frankfort.

Von diesen sind die drei Howardite Massing, Luotolaks und Frankfort einander sehr ähnlich, während Shalka und Busti schon zu der folgenden Abteilung der bronzitischen Gemenge zu stellen sind.

Dies könnte indes als Verschiedenheit infolge lokaler Ausbildung aufgefaßt werden (Anmerkung 1). Immerhin erscheint die Vereinigung zu einer gleichartigen Gruppe etwas gewagt. Die Berechnung der Knotenlängen ergibt sich aus folgenden Daten, wobei zu bemerken ist, daß bei Luotolaks und Busti die Rechnung für die Mittagszeit geführt wurde.

		Geogr. Länge	Knotenlänge
Massing,	1803, Dez. 13, um $10^h 30^m$ a....	12°36′O	81·83°
Luotolaks,	1813, Dez. 13, bei Tage	27°49′O	82·30
Shalka,	1850, Nov. 30, um $4^h 30^m$ a.....	87°22′O	68·12
Busti,	1852, Dez. 2	82°42′O	70·97
Frankfort,	1868, Dez. 5, um 3^h p.	85° 5′W	74·50

Die Zahlen für die Knotenlängen geben im Mittel 75°54 und die Differenzen zwischen der Beobachtung und dieser Mittelzahl betragen:

+6·29, +6·76, —7·42, —4·57, —1·04.

Wird hier angenommen, daß der Durchschnitt an der Erdbahn statt konstant zu bleiben, sich periodisch verschiebt, um wieder zur selben Stelle zurückzukehren, so berechnen sich für eine 80jährige Periode, innerhalb welcher die Knotenlänge schwankt (Anmerkung 3), nachstehende Zahlen:

	Beob.	Rechnung	B.—R.
1803, Massing	81·83	81·59	+0·24
1813, Luotolaks....	82·30	81·98	+0·32
1850, Shalka	68·12	69·32	—1·20
1852, Busti........	70·97	69·48	+1·49
1868, Frankfort....	74·50	75·29	—0·79

Shalka und Busti, welche von den drei übrigen in petrographischer Beziehung abweichen, geben auch die größeren Differenzen.

Die übrigen Meteoriten von ungewöhnlicher Zusammensetzung lassen sich bezüglich der Knotenlängen nicht in solche Reihen bringen (Anmerkung 5).

VI. Falltage der Chondrite.

Diese Abteilung der Meteoriten ist die umfangreichste. Von je 100 Meteoriten bekannter Fallzeit gehören ungefähr 86 zu den Chondriten. Ihrer Beschaffenheit nach lassen sich dieselben größtenteils in eine Reihe bringen, deren Glieder von einander wenig abweichen, auch die typisch aussehenden Glieder sind in der Reihe mit den benachbarten meist durch Übergänge verbunden. Unter diesen Umständen ist es schwer, solche Gruppen aufzufinden, deren Glieder gleichartig wären und sich von den übrigen Chondriten abheben würden. Die Gleichartigkeit müßte aber nicht bloß durch die äußere Beschaffenheit, sondern auch durch eine chemische Ähnlichkeit begründet sein. Dazu reichen aber, wie schon bemerkt wurde, die bisherigen Untersuchungen nicht aus.

Aus allen diesen Gründen bietet die heutige Kenntnis der Chondrite zu wenig Anhaltspunkte für eine Zusammenstellung der Fallzeiten solcher Meteoriten, die miteinander unzweifelhaft gleichartig sind.

Früher wurde schon ein Beispiel angeführt, welches zeigt, daß vier als weiße Chondrite bezeichnete Meteoriten, die nicht genauer untersucht sind, die Fallzeiten vom 8. und 9. Mai aufweisen. Hier möge noch ein zweites Beispiel Platz finden, welches die bei den Chondriten herrschenden Verhältnisse von einer anderen Seite beleuchtet.

1785,	Februar	19....	Eichstädt,
1814,	»	15....	Bachmut,
1853,	»	10....	Girgenti,
1875,	»	12....	West-Liberty.

Diese Gruppe zeigt eine Verschiebung der Knoten von einer ziemlich großen Regelmäßigkeit, zugleich sind alle vier Meteoriten bezüglich der chemischen Zusammensetzung sehr ähnlich (Anmerkung 6), sie sind aber in Bezug auf ihre Struktur ungleich, indem Eichstädt als Kügelchenchondrit, Bachmut und Girgenti als weiße Chondrite, West-Liberty als ein grauer Chondrit von breccienartigem Gefüge bezeichnet werden. Ob

diese Unterschiede im vorliegenden Fall als wesentliche zu betrachten sind, läßt sich gegenwärtig nicht entscheiden.

VII. Falltage der Meteoreisen.

Unter den Meteoreisen sind zwei einander ähnliche von ungefähr gleicher Fallzeit zu erwähnen:

Charlotte, Dickson Cty. Tennesee 1835, Juli 31 oder August 1,
Quesa, Prov. Valencia, Spanien... 1898, August 1.

Beide Eisen bestehen aus dünnen, oktaedrischen Lamellen und der Nickelgehalt wurde zu 8 und 10% bestimmt. Eine Zusammengehörigkeit ist nicht unwahrscheinlich. Da bisweilen Meteoriten gefunden werden, die ein Gemenge von Eisen und Howardit darstellen (Grahamite), so könnte daran gedacht werden, diese beiden Meteoritenfälle mit den früher erwähnten howarditischen Augustmeteoriten in Zusammenhang zu bringen.

VIII. Übersicht.

1. Das Material der Sternschnuppen scheint von dem der Meteoriten bloß durch lockere Beschaffenheit und das Vorwalten von Kohlenwasserstoffen und salzartigen Verbindungen verschieden zu sein.

2. Aus den bisherigen Beobachtungen läßt sich schließen, daß die zu verschiedenen Zeiten des Jahres periodisch eintretenden Meteorschauer aus etwas verschiedenem Material bestehen und daß jedem dieser Meteorströme eine ungefähr gleichartige Beschaffenheit zukommt.

3. Dementsprechend ist zu vermuten, daß es auch Ströme von Meteoriten gibt, die beiläufig gleichartig sind und in regelmäßiger Wiederkehr eintreffen.

4. Nach der von mir entwickelten Anschauung bezüglich der Bildung der Meteoriten durch eine Zerstreuung von Auswürflingen kleiner Himmelskörper können Schwärme gleichartiger Meteoriten gebildet werden, die mit der Erde in regelmäßiger Folge zusammentreffen.

5. Nach diesen Voraussetzungen gewinnen die Daten bezüglich der Bahnen und demzufolge bezüglich der Knotenpunkte gleichartiger Meteoriten eine genetische Bedeutung.

6. Werden von den Meteoritenfällen jene ausgewählt, welche gleichartige Produkte lieferten, die sich auch von allen übrigen unterscheiden, so ergeben sich Regelmäßigkeiten bezüglich ihrer Knotenpunkte.

7. Das Eintreffen der calciumreichsten Meteoriten (Eukrite) läßt eine bestimmte Wiederkehr und zugleich eine regelmäßige Folge der Knotenpunkte erkennen, indem hier eine jährliche Verschiebung von 1° 36′ eintritt.

8. Die Bahnberechnung für drei der Eukrite ergab unter Annahme von Störungen durch Himmelskörper außerhalb des Bereiches der bekannten Planeten bloß die Möglichkeit einer gemeinsamen Herkunft dieser Meteoriten.

9. Für einige Meteoriten, die sich den Eukriten anreihen, ergeben sich Regelmäßigkeiten in demselben Sinne und jene Gruppe, deren Fallzeiten in die erste Hälfte des Dezember treffen, zeigt ein regelmäßiges Schwanken der Knotenlängen innerhalb bestimmter Grenzen.

Anmerkung 1.

G. Rose hat eine Einteilung vorgeschlagen, derzufolge jene Meteoriten, die eine gleiche Kombination der Gemengteile darstellen, unter derselben Gruppenbezeichnung zusammengefaßt werden.[1] Diese Klassifikation wurde von mir unter Berücksichtigung der späteren Forschungsergebnisse fortgesetzt und vervollständigt.[2] Seither sind nur geringe Veränderungen dieser Gruppierung eingetreten.

Eine solche Einteilung bezieht sich mehr auf die Anordnung einer großen Sammlung, als auf die petrographische Zusammengehörigkeit der bisher aufgesammelten Meteoriten. Soll eine hierauf bezügliche Übersicht erhalten werden, so ist zu berücksichtigen, daß die einzelnen Meteoritenfälle immer

---

[1] Beschreibung und Einteilung der Meteoriten. Abhandlungen der Berliner Akad., 1864, p. 23 bis 161.

[2] Beitrag zur Klassifikation der Meteoriten. Diese Sitzungsber., Bd. 88, Abt. I, p. 347 (1883), und: Die mikroskopische Beschaffenheit der Meteoriten. Stuttgart 1883.

nur je eine Probe aus einer größeren Masse, die nicht vollkommen gleichartig ist, darstellen. In einer solchen können allerlei lokale Abweichungen von dem normalen Bestande vorkommen. Denkt man sich aus vielen Bruchstücken von Granit einzelne herausgenommen, so werden solche wohl häufig das Granitgemenge darstellen, nicht selten wird aber das einzelne Stück als Quarz oder als Feldspat, mitunter auch als Glimmer oder vielleicht als Turmalin zu bezeichnen sein. Die den Meteoriten zu Grunde liegende Masse ist aber nicht so homogen wie gewöhnlich der Granit. Man sieht an den einzelnen Stücken, die von einem sogenannten Steinregen herrühren, wie z. B. an den Meteoriten von Stannern, eine große Ungleichförmigkeit, so daß einzelne Steine gar nicht der durchschnittlichen Beschaffenheit entsprechen. Es darf auch nicht übersehen werden, daß bei der Untersuchung der Meteoriten wegen Kostbarkeit des Materials immer nur kleine Teile eines größeren Stückes für die petrographische und chemische Analyse benutzt werden. Wir sind bei der Prüfung der Meteoriten auch nicht in der Lage, wie bei anstehendem Gestein, die Übergänge der einzelnen Typen zu studieren und so zu bestimmen, was als normales Gemenge und was als ein Übergangsglied zu betrachten ist.

Um die petrographische Gleichartigkeit und Verschiedenheit hervortreten zu lassen, kann die folgende Übersicht dienlich sein. Durch die in Klammern stehenden Ziffern wird angegeben, wie viele unter den Meteoriten, deren Fall beobachtet wurde, zu je einer Gruppe gehören.

A. Feldspatführende Gemenge.

Eukrit, wesentlich aus Augit und Anorthit bestehend, untergeordnet auch Bronzit. Struktur ophitisch, bisweilen tuffartig. Alle sind genauer untersucht (6). Hierher gehören die Steine von Stannern, Jonzac, Juvinas, Shergotty, Peramiho, Petersburg. Der letztere wurde wegen tuffartiger Struktur von einigen Forschern zur nächsten Gruppe gestellt. Er ist aber den vorigen chemisch gleichartig und die Struktur kann angesichts der an dem Steinregen von Stannern gemachten Beobachtung von Steinen mit Tuffstruktur neben solchen von

kristallinischem Gefüge nicht zur Trennung berechtigen. Der Meteorit von Shergotty reiht sich an die Eukrite. Der isotrope Feldspatgemengteil (Maskelynit) entspricht seiner chemischen Zusammensetzung nach einem Labradorit. Es erscheint mir nicht zweifelhaft, daß ursprünglich Labradorit vorhanden war und dieser, wahrscheinlich durch später eingetretene Temperaturerhöhung, in eine isotrope Masse verwandelt wurde. Beispiele dafür liefern Erscheinungen in anderen Meteoriten. Prof. F. Becke, dessen Autorität im Gebiete der Feldspate allgemein anerkannt ist, bestätigte nach Prüfung der Dünnschliffe, daß die äußere Form und die Erscheinung im gewöhnlichen Lichte, welche das Detail der Plagioklastextur erkennen läßt, vollkommen einem Labradorit entspricht. Einem in dem Wiener Hofmuseum aufbewahrten Eukrit, welcher mit dem von Stannern identisch ist, wurde früher der Fallort Konstantinopel zugeschrieben. Ich habe schon vor langer Zeit diesen Fallort als höchst zweifelhaft bezeichnet[1] und bin in meiner Ansicht durch den Mangel jeder verbürgten oder zuverlässigen Nachricht bestärkt worden.

Howardit, wesentlich aus Augit, Bronzit, Anorthit bestehend. Struktur tuffartig. Zum großen Teile nicht genauer untersucht (9). Reiht sich an die Eukrite. Manche Exemplare lassen sogar kleine Bruchstücke von Eukrit erkennen. Durch den Gehalt an Bronzit mit der folgenden Gruppe verbunden. Hierher werden gezählt die Steine von Massing, Luotolaks, Nobleborough, Bialystok, Le Teilleul, Zmenj, Frankfort, Jodzie, Pawlowka.

B. Feldspatarme bis feldspatfreie bronzitische Gemenge.

Meist kristallinisch-körnig. Ein ungewöhnliches Gemenge von Diopsid und Enstatit repräsentiert der Stein von Busti. Jener von Aubres wird als zugehörig bezeichnet.

Chladnit, wesentlich aus Bronziten (Enstatit und Bronzit) bestehend (4). Zugehörig Bishopsville, Manegaon, Shalka, Ibbenbühren.

---

[1] Mineralogische Mitteilungen, Bd. II, p. 85 (1872).

C. Olivinhaltige kristallinische Steine.

Der Meteorit von Angra, wohl eine lokale Ausbildung olivinhaltiger Massen, besteht aus Augit und wenig Olivin. Ähnlich verhält es sich mit dem Stein von Novo Urei.

Amphoterit, ein Gemenge von Olivin und Bronzit (2). Als zugehörig werden Manbhoom und Roda bezeichnet. Der Stein von Jelica hat schon chondritische Ausbildung, jener von Chassigny besteht fast nur aus Olivin.

D. Bronzit- und Olivingemenge mit Kügelchen.

Chondrit. Dem Amphoterit entsprechende Gemenge mit Chondren und meist mit Flittern von Eisen und Magnetkies. Grundmasse kristallinisch, tuffartig, selten halbglasig oder fehlend (nahezu 300). Diese Abteilung wird nur durch das Vorkommen der Chondren zusammengehalten. Im einzelnen zeigen sich große Unterschiede in der Beschaffenheit der Grundmasse und der Kügelchen, daher nach der physikalischen Beschaffenheit mehrere Gruppen aufgestellt werden können. Da jedoch nur ein Teil dieser Steine chemisch untersucht ist, so fehlt eine sichere Grundlage der Klassifikation und es muß die Entscheidung über die Gleichartigkeit noch hinausgeschoben werden.

E. Leichte, durch Kohle und Kohlenwasserstoffe gefärbte Steine.

Kohlige Meteoriten, von tuffartiger Struktur. In der von Kohle und Kohlenwasserstoff durchtränkten Grundmasse wurden auch Kügelchen beobachtet (7). Obwohl diese Steine gewöhnlich den Chondriten angeschlossen werden, so zeigt doch deren physikalische Beschaffenheit eine besondere Bildungsweise an.

F. Eisen, mit Silikaten gemischt.

Sie enthalten die Gemengteile des Howardits Chladnits, Chassignits, Amphoterits in einer Eisengrundmasse. Nur letztere,

als Mesosiderit bezeichnet (4), sind unter den Meteoriten, deren Fall beobachtet wurde, repräsentiert.

G. Meteoreisen.

Vorwiegend aus Nickeleisen bestehend (9).

Anmerkung 2.

Die Ähnlichkeit in der chemischen Zusammensetzung der Eukrite geht aus folgenden Zahlen hervor:

	Stannern Rammelsberg	Juvinas Rammelsberg	Petersburg Smith	Shergotty Lumpe	Peramiho Ludwig
SiO_2	48·30	48·33	49·21	50·21	49·32
TiO_2	—	0·10	—	—	0·42
Al_2O_3	12·65	12·55	11·05	5·90	11·24
Fe_2O_3	—	1·21	—	—	—
FeO	19·32	19·48	20·41	21·85	20·65
MnO	0·81	—	0·04	—	—
MgO	6·87	6·44	8·13	10·00	7·15
CaO	11·27	10·23	9·01	10·41	10·84
Na_2O	0·62	0·63	0·83	1·28	0·40
K_2O	0·23	0·12	—	0·57	0·25
Außerdem	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
	100·61	100·97	99·24	100·22	100·38
Dichte	3·17	3·11	3·28	3·28	3·08

a = Chromit 0·54, Schwefel Spur.
b = Fe 0·16, S 0·09, Chromit 1·35, P_2O_5 0·28.
c = Fe 0·50, S 0·06, Ni, P Spur.
d = Magnetit (von mir separat bestimmt) 4·57, S Spur.
e = S 0·23, ab Sauerstoff 0·12.

Der Stein von Shergotty weicht in der Zusammensetzung etwas von den übrigen ab, gleichwie er durch den eigentümlichen Feldspatbestandteil etwas verschieden ist. In der Struktur gleicht er den kristallinischen Eukriten.

Anmerkung 3.

Die Abweichung der nach angegebener Formel berechneten Werte für die Knotenlängen der Eukrite zeigen eine Regelmäßigkeit, welche sich darin ausspricht, daß die Differenzen entsprechend der Zeit ihr Vorzeichen wechseln:

1808	1819	1821	1855	1865	1899
—0·67	+2·10	+1·66	—4·32	—1·35	+2·58

Ich möchte angesichts der Unsicherheit, welche das hier berührte Problem darbietet, auf diese Wahrnehmung weiter keinen Nachdruck legen und will nur andeuten, daß bei Annahme einer Periode von 72 Jahren für das Schwanken in der Zunahme der Knotenlängen sich ein ziemlich genauer Anschluß an die Beobachtungen ergibt. Das Resultat der Berechnung nach der Formel:

$$E = 229 \cdot 55 + 1 \cdot 624 t + 3 \sin \frac{t}{72} \pi,$$

worin t die Jahreszahl minus 1801, ist im Text angeführt. Demnach wäre der Charakter der Schwankung dieser, daß die Verschiebung der Knotenlänge im Anfange der Periode rascher als durchschnittlich erfolgt, diese Beschleunigung aber nach 18 Jahren wieder abnimmt und mit 36 Jahren $= 0$ wird, worauf eine Verzögerung eintritt, die 18 Jahre später ihr Maximum erreicht u. s. w.

Nach der gleichen Formel, jedoch mit anderen Konstanten, lassen sich die Knotenlängen der drei Howardite: Nobleborough, Le Teilleul und Pawlowka berechnen. Diese ist:

$$E = 302 \cdot 70 - 0 \cdot 025 t + 14 \cdot 1 \sin \left(\frac{t}{72} \pi \right),$$

worin t die Jahreszahl minus 1801.

Auch die als zusammengehörig betrachtete Gruppe: Manegaon, Ibbenbühren, Jodzie gestattet eine Berechnung der Knotenlängen durch Anwendung der gleichen Formel mit anderen Konstanten, nämlich:

$$E = 298 \cdot 25 - 0 \cdot 439\,t + 4 \cdot 2 \sin\left(\frac{t}{72}\pi\right),$$

worin t dieselbe Bedeutung hat, wie in der zuletzt angeführten Formel.

Für die Meteoritenfälle um den Anfang Dezember, nämlich Massing, Luotolaks, Shalka, Busti, Frankfort ergibt sich keine kontinuierliche Verschiebung des Knotens, vielmehr ein Schwanken zwischen den Grenzen 82° und 68°. Bei Annahme einer 80jährigen Periode wurde gerechnet nach der Formel:

$$E = 75 \cdot 8 + 6 \cdot 5 \sin\left(\frac{t}{80}\pi\right),$$

in welcher t die Jahreszahl minus 1789. Die Schwankungsbreite würde sonach ungefähr 13 Tage betragen.

Anmerkung 4.

Für den Vergleich der Howardite mit dem Eukrit ist folgende Zusammenstellung dienlich:

	Howardit			Eukrit	
	Massing Schwager	Frankfort Brush und Mixter	Zmenj Melikow	Peramiho Ludwig	Shergotty Lumpe
SiO_2	53·11	51·33	48·18	49·32	50·21
Al_2O_3	8·20	8·05	8·06	11·24	5·90
FeO	19·14	13·70	14·48	20·65	21·85
MnO	—	—	2·17	—	—
MgO	8·49	17·59	16·81	7·15	10·00
CaO	5·79	7·03	5·84	10·84	10·41
Na_2O	1·93	0·45	1·75	0·40	1·28
K_2O	1·19	0·22	0·38	0·25	0·57
Außerdem	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
	99·72	99·02	99·95	100·38	100·22

a = FeS 0·37, Fe_2Ni 0·52, Cr_2O_3 0·98.
b = S 0·23, Cr_2O_3 0·42.
c = FeS 1·32, Fe_2Ni 0·32, $FeCr_2O_4$ 0·56, P_2O_5 0·08.
d = S 0·23.
e = S Spur.

Der Unterschied zeigt sich vor allem in den Zahlen für CaO, aber auch für FeO. Selbst der von den übrigen Eukriten etwas abweichende Stein von Shergotty läßt die Verschiedenheit in diesen beiden Stoffen erkennen.

Anmerkung 5.

Die früher nicht angeführten Fälle, welche Steinmeteoriten von ungewöhnlicher Zusammensetzung lieferten, sind die folgenden:

			Geogr. Länge	Knotenlänge
Aubres,	1836, Sept. 14,	um 3^h p......	5° 8′O	352°67
Novo Urei,	1886, Sept. 22,	» $7^h 15^m$ a...	43 41 O	359·27
Chassigny,	1815, Okt. 3,	» 8^h a......	5 23 O	10·40
Bialystok,	1827, Okt. 5,	» $9^h 30^m$ a...	23 10 O	12·30
Manbhoom,	1863, Dez. 22,	» 9^h a......	86 33 O	90·20
Angra,	1869, Jänn. 20,	» 5^h a......	44 10 W	120·49
Bishopsville,	1843, März 25,	bei Tage	80 12 W	185·22

Alle diese Meteoriten sind, ihrer Zusammensetzung nach, voneinander verschieden.

Anmerkung 6.

Die chemische Zusammensetzung der vier zuletzt angeführten Chondrite läßt sich aus den folgenden Zahlen erkennen, welche die prozentischen Mengen bezüglich der Silikate nach der Berechnung von Rammelsberg,[1] ferner unter *L* die entsprechenden Quantitäten des durch Säure auflöslichen Anteiles, endlich unter *F* die in 100 Teilen der Meteoriten gefundenen Mengen von Eisen, Magnetkies und Chromerz angeben.

[1] Abhandlungen der Berliner Akademie, 1879.

	Eichstädt Schwager	Bachmut Wöhler	Girgenti v. Rath	West-Liberty Rammelsberg
SiO_2........	46·13	46·18	46·61	46·88
Al_2O_3.......	3·22	3·38	1·68	2·40
FeO	20·02	18·58	19·22	17·49
MgO	27·35	29·19	28·89	31·36
CaO........	0·93	1·78	1·99	1·41
Na_2O......	1·48	0·55	1·61	0·46
K_2O........	0·28	0·24	—	—
L	44·6	49	—	50
F	27	18	15	17

Inhalt.

Beitrag zur Kenntnis der Thoriumzerfallsprodukte

von

Dr. **F. v. Lerch.**

Aus dem II. physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. Dezember 1907.)

In einer früheren Arbeit[1] konnte ich zeigen, daß das Th*A* eine Strahlung aussendet, die zum größten Teile durchdringender wie die α-Partikeln des Th*B*, respektive Th*C* und absorbierbarer wie die β-Strahlung der letztgenannten Substanzen ist. Es wurde die Absorption der Strahlen des Th*B* und des Th*A*+*B* durch verschiedene Aluminiumschirme gemessen und aus den sich ergebenden Differenzen eine Strahlung des Th*A* nachgewiesen. Durch dünne Aluminiumfolien (zirka $2\cdot 1.10^{-4}$ *cm*) wird die Th*B*-Strahlung weniger absorbiert wie die des Th*A*+*B*, das Th*A* sendet also — falls man nicht eine Störung durch Sekundärstrahlen der absorbierten β-Strahlen des Th*B* annimmt[2] — absorbierbarere Strahlen aus wie die α-Partikeln des Th*B*, respektive *C*. Beim Bedecken mit dickeren Aluminiumfiltern kehrt sich der Effekt um. Die Th*B*-Strahlung wird mehr geschwächt wie die vom Th*A*+*B*. Der größte Teil der Th*A*-Strahlen muß also durchdringender sein wie die absorbierten α-Partikeln. Dann wurde noch die Absorbierbarkeit außerhalb des Ionisationsbereiches der α-Partikeln untersucht und gezeigt, daß die Strahlen des Th*A* weniger durchdringend sind wie die β-Strahlen der folgenden Produkte.

[1] Phys. Zeitschr., VII, 913 (1906).

[2] Bei der Deutung der Versuche durch eine einheitliche Strahlung des Th*A* ist ein störender Druckfehler stehen geblieben. Auf Seite 915 soll es heißen: Die durch Absorption der Strahlen des Th*B* (statt Th*A*) in dünnen Schichten erzeugten ......

Mit der gleichen Versuchsanordnung (siehe nebenstehende Figur) wurden einige weitere Messungen mit dickeren Aluminiumfiltern gemacht, über die im folgenden berichtet werden soll. Der zur Erde geleitete Drahtring R leitet die durch die α-Strahlen im Raum $CDEF$ erzeugten Ionen ab, im oberen Meßraum $ABCD$ ionisieren bloß die β-Strahlen. Um genaue Werte zu bekommen, wurde ähnlich wie früher die Ionisation bei bedecktem und freiem Präparat mehrmals gemessen und aus den Zahlen die Absorption bestimmt. Das ThB wurde auf einer Ni-Scheibe durch Eintauchen in eine Thoriuminduktionslösung ausgefällt und gleiche Ni-Scheiben durch direktes Aussetzen der Thoriumemanation mit ThA+B aktiviert.

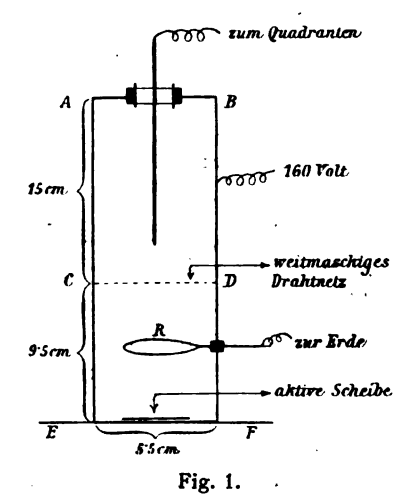


Fig. 1.

Die bei diesen Versuchen verwendeten dickeren Aluminiumfolien hatten die Dicke zirka $1 \cdot 03 \cdot 10^{-3}$ *cm*.

In der Tabelle bedeuten die unter ThA+B und ThB mitgeteilten Zahlen die durchgelassenen Prozente der Strahlung beim Bedecken mit verschieden vielen Aluminiumfolien.

	ThA+ThB	ThB	x
Al 1	101·1	101·7	—
Al 3	91·2	99·8	—
Al 4	88·0	99·3	0·0134
Al 8	75·0	94·0	0·0266
Al 12	68·9	88·1	0·0293
Al 16	63·0	83·0	0·0333
Al 24	57·4	75·2	0·0346
Al 32	49·1	66·4	0·0370
Al 40	43·2	60·0	0·0408
Al 48	38·6	53·4	0·0403
Al 56	34·0	46·4	0·0384

Wie man aus den Zahlen sieht, wird durch Bedecken mit einer $1 \cdot 03 . 10^{-3}\,cm$ dicken Aluminiumfolie die durch die β-Strahlung des Th*B* erzeugte Ionisation vergrößert. Es ist das sicher auf eine Sekundärstrahlung zurückzuführen. Die durchdringenderen β-Strahlen des Th*B* ionisieren im oberen Gefäß, das die β-Strahlung nicht vollständig ausnützt, nicht

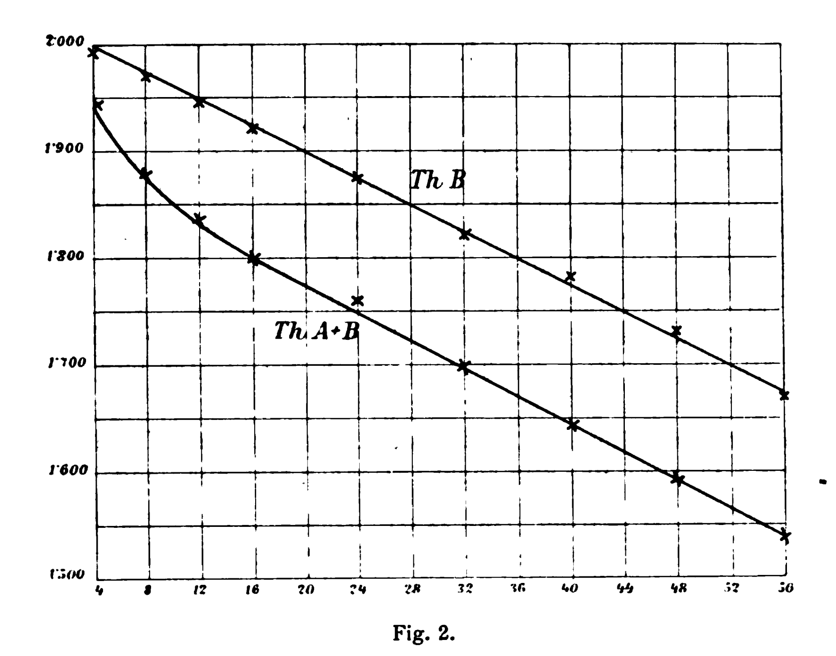


Fig. 2.

so stark als die durch Absorption im Aluminiumfilter entstehenden weicheren Sekundärstrahlen. Trägt man die Logarithmen der durchgelassenen Strahlung auf ein Koordinatenpapier auf, so erhält man zwei Gerade, die einander parallel laufen (Fig. 2).

Hieraus lassen sich einige Schlüsse ziehen. Bezeichnet man mit

M die vorhandene Menge Th*A*,
N » » » Th*B*,
A die Strahlung der Mengeneinheit Th*A*,
B » » » » Th*B*,

$\frac{M}{N} = m, \qquad \frac{A}{B} = x,$

α die durch ein Filter hindurchgelassene Strahlung von ThA,
β » » » » » » » ThB,
γ die durch ein Filter hindurchgelassene Strahlung von einem Gemisch von Th$A+B$, so ist

$$\gamma = \frac{MA\alpha + NB\beta}{MA+NB} = \frac{mx\alpha + \beta}{mx+1}. \tag{1}$$

m, das Verhältnis der auf dem aktiven Blech vorhandenen Menge ThA zur Menge ThB, läßt sich nach der Rutherford-schen Theorie aus der Expositionsdauer und der Abklingungszeit berechnen. Wird γ mit dem gleichen Filter für verschiedene m bestimmt, so läßt sich aus den Zahlen x berechnen, denn es ist β, die Absorption für das abgetrennte ThB, bekannt.

Bei den eben mitgeteilten Versuchen waren die Bleche durch längere Zeit der Thoremanation ausgesetzt und erst längere Zeit nach ihrer Entnahme aus dem das aktivierende Präparat enthaltenden Gefäß untersucht. Die Menge ThA verhält sich dann, wie sich leicht berechnen läßt, zur Menge ThB wie $\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = 9 \cdot 52$, denn es ist

$$\lambda_1 = 1 \cdot 816 . 10^{-5} \sec \qquad \lambda_2 = 1 \cdot 913 . 10^{-4} \sec,$$

$J_t^A = J_0^A e^{-\lambda_1 t}$ die Menge ThA zur Zeit t,

$J_t^B = J_0^A \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$ die Menge ThB zur Zeit t, wenn zur Zeit $t = 0$ nur die Menge J_0^A von ThA vorhanden war,

$\frac{J_t^A}{J_t^B} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \cdot \frac{e^{-\lambda_1 t}}{e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1}$ für große Werte von t.

Absorptionsmessungen für verschiedene Verhältnisse m, etwa Anstiegskurven für bedeckte und freie Strahlung kurz induzierter Bleche, wurden nicht angestellt, da die Versuchsanordnung zu wenig empfindlich, respektive das induzierende Radiothorpräparat zu schwach war.

Aus Gleichung 1) findet man für x

$$x = \frac{\beta - \gamma}{m\gamma - m\alpha}.$$

Da nun, wie die Versuche zeigen, die ThA-Strahlen viel leichter absorbierbar sind wie die β-Strahlen des ThB, α also kleiner ist wie γ und β, kann man in erster Annäherung das Glied $m\alpha$ vernachlässigen und erhalten

$$x = \frac{\beta - \gamma}{m\gamma} \quad \text{und} \quad \frac{\beta}{\gamma} = mx + 1 = \text{const}$$

in Übereinstimmung mit den obigen Zahlen, die Logarithmen der Absorptionen liegen auf parallelen Geraden. Wenn wir in obiger Gleichung für x das Glied $m\alpha$ vernachlässigen, so wird das aus der vereinfachten Gleichung $x = \frac{\beta - \gamma}{m\gamma}$ berechnete x besonders für geringe Filterdicken zu klein ausfallen. Für stärkere Filter, wo die Vernachlässigung $m\alpha$ eher erlaubt ist, muß x konstant werden. Aus den Zahlen der letzten Kolumne der Tabelle I sieht man, daß x von Al 32 an den Wert zirka 0·04 hat.

Unter den gegebenen Umständen ionisiert also die Strahlung des ThA 0·04mal weniger als die β-Strahlung einer gleichen Menge ThB. Da nun auf den Blechen, die längere Zeit induziert sind, mehrere Stunden nach ihrer Entnahme aus dem Aktivierungsgefäß $m = 9 \cdot 52$ ist — die Aktivität eines solchen Bleches sinkt in 10·6 Stunden auf die Hälfte — so ist für diesen Fall das Verhältnis der durch die β-Strahlen des ThA und ThB erzeugten Ionisation $0 \cdot 04 . 9 \cdot 52 = 0 \cdot 38$. Die Th$A$-Strahlen machen also $\frac{0 \cdot 38}{1 \cdot 38} =$ zirka 0·28 der ganzen β-Ionisation aus. Nach St. Meyer und v. Schweidler[1] ist durch β- und γ-Strahlen hervorgerufene Ionisation unter den gewöhnlichen Versuchsbedingungen zirka 1·8$^0/_0$ der Gesamtionisation,

[1] St. Meyer und E. R. v. Schweidler, diese Sitzungsberichte, CXV, Abt. IIa, Mai 1906.

daher sind also $1 \cdot 8 . 0 \cdot 28 = 0 \cdot 5\%$ der Gesamtstrahlung auf das Th*A* zurückzuführen.

Bei diesen und früher mitgeteilten[1] Versuchen wurde eine große Reihe von Abklingungskurven bestimmt, aus denen sich ein recht genauer Wert für die Halbierungskonstante berechnen läßt. Für das auf Ni elektrolytisch niedergeschlagene Th*B* findet man eine prinzipiell zu große Halbierungskonstante, wenn etwas Th*A* mitausgefällt wird, da dann ein Teil des Th*B* nach der *HC* des Th*A* abklingt. Doch läßt sich dieser Fehler leicht korrigieren, wenn man nach einer Zeit, in der sich das spurenweis vorhandene Th*A* schon mit dem Th*B* ins Gleichgewicht gesetzt hat — etwa nach 24 Stunden — die schwache Aktivität der Ni-Scheibe bestimmt und dann die zu Beginn der Abklingung vorhandene Th*A*-Menge ausrechnet. Diese Korrektion wurde für 20 Kurven bestimmt und im Mittel zu 0·75 Minuten gefunden. Es wird also beim Eintauchen von Ni in eine salzsaure Induktionslösung durchschnittlich so viel Th*A* mitausgefällt, daß die *HC* um 0·75 Minuten zu groß erscheint. Diese Zahl wurde von den übrigen *HC* abgezogen, für welche die Korrektur nicht direkt bestimmt war.

Aus 50 Abklingungskurven, mit einem Elektroskop gemessen, ergab sich als mittlere Halbierungskonstante 60·66 Minuten, für 67 Abklingungskurven, mit dem Elektrometer gemessen, als Mittel 60·37 Minuten. Die größten Einzelschwankungen betrugen 58 und 62 Minuten, doch zeigten die mit dem Elektrometer gemessenen Zahlen im allgemeinen geringere Abweichungen vom Mittelwert wie die mit dem Elektroskop bestimmten. Für die mit dem Elektrometer nach der Auflademethode gefundenen *HC* mußte eine Korrektion wegen Isolationsverlusten angebracht werden.

Schlechte Isolation, die bei schwachen Aktivitäten mehr in Betracht kommt, läßt die *HC* zu klein erscheinen. Da meine Bernsteinisolation gut war, betrug die Isolationskorrektur im Mittel nur zirka 0·2 Minuten. Diese Größe wurde also durchschnittlich den mit dem Elektrometer gemessenen *HC* zugezählt.

---

[1] F. v. Lerch, diese Sitzungsberichte, CXIV, Abt. II a, März 1905, und l. c.

Als Mittel aller Versuche kann man 60·4 Minuten als *HC* für Th*B* nehmen, da die mit dem Elektrometer gefundenen Werte etwas genauer sind. Der Fehler dürfte kleiner sein als 0·3 Minuten, $\lambda_2 = 1\cdot 913 . 10^{-4} \frac{1}{\sec}$.

Aus 12 Abklingungskurven für Th*A* erhielt ich, mit dem Elektrometer gemessen, 10·594 Stunden und aus 10 mit einem Elektroskop bestimmten 10·627 Stunden als Halbierungskonstante.

Rechnet man die mit dem Elektrometer gefundene Zahl doppelwertig, so erhält man als *HC* für Th*A* 10·605 Stunden, $\lambda_1 = 1\cdot 816 . 10^{-5} \frac{1}{\sec}$.

Diese Konstanten sind in guter Übereinstimmung mit den von mir in einer früheren Arbeit[1] bestimmten: 1 Stunde, respektive 10·6 Stunden. Letzterer Wert ist inzwischen von verschiedenen Seiten gefunden worden.

Einige genau gemessene Abfallkurven lang induzierter Bleche sollten zeigen, ob sich eine Restaktivität für die aktiven Thoriumbeschläge nachweisen läßt. Das Fehlen beträchtlicher Restaktivitäten ist von O. Hahn und anderen gefunden worden, doch fehlen quantitative Angaben.

Ein durch $3^1/_2$ Monate mit Radiothor induziertes Ni-Blech fiel mit der konstanten *HC* 10·6 Stunden bis auf den 10^{-7}ten Teil seiner Anfangsaktivität und eine durch $13^1/_2$ Monate mit Thorium aktivierte Scheibe zeigte bis zum 10^{-5}ten Teil ihres Anfangswertes regelmäßiges Abklingen. Dann ließ sich eine Ionisationsvermehrung im Versuchsgefäß nicht mehr mit Sicherheit nachweisen. Die großen Werte der Anfangsaktivität konnten mit meiner Versuchsanordnung nicht bestimmt werden; sie wurden aus den nach einigen Tagen gemessenen berechnet. Eine untere Grenze für eine etwaige α-strahlende Restaktivität läßt sich aus der Formel

$$J_t = J_\infty (1 - e^{-\lambda t})$$

angeben.

---

[1] Diese Sitzungsberichte, CXIV, Abt. IIa, März 1905.

$\frac{J_t}{J_\infty}$ war in einem Falle für $t = 3^1/_2$ Monate gleich 10^{-7},

λ berechnet sich zu $3.10^{-7} \frac{1}{\text{Jahre}}$,

ein HC zu zirka 2.10^6 Jahre.

Falls also ein radioaktives Endprodukt existiert, so ist nur ein äußerst stabiles möglich. Die Halbierungskonstante muß größer sein als zirka $2 \cdot 10^6$ Jahre.

Zusammenfassung der Resultate.

Mißt man mittels einer besonderen Versuchsanordnung, welche die Ionisation durch α-Strahlen eliminiert, die Absorption der β-Strahlen durch verschiedene Filter für elektrolytisch abgetrenntes ThB und ein Gemisch von ThA und ThB, wie es auf Blechen, die auf gewöhnliche Weise aktiviert sind, vorhanden ist, so ergeben sich Unterschiede bis zu 20%, die auf eine ThA-Strahlung zurückzuführen sind.

Die ThA-Strahlung macht unter normalen Versuchsbedingungen zirka $0 \cdot 5\%$ der Gesamtstrahlung aus.

Die Halbierungskonstanten für ThA und ThB betragen 10·605 Stunden, respektive 60·4 Minuten.

$$\lambda_1 = 1 \cdot 816.10^{-5} \frac{1}{\text{sec}} \qquad \lambda_2 = 1 \cdot 913.10^{-4} \frac{1}{\text{sec}}.$$

Wenn eine α-strahlende Restaktivität vorhanden ist, so hat sie eine $HC >$ zirka 2.10^6 Jahre.

Kinematische Interpretation der Maxwellschen Gleichungen mit Rücksicht auf das Reziprozitätsprinzip der Geometrie

von

Lucius Hanni in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 24. Oktober 1907.)

Interpretiert man die in den Maxwell'schen Gleichungen für homogene isotrope Nichtleiter[1] auftretenden abhängigen Veränderlichen nicht als die Komponenten der elektrischen und der magnetischen Kraft, sondern als Geschwindigkeits- und Drehungskomponenten, so hat das eine Gleichungssystem eine leicht ersichtliche und bekannte kinematische Bedeutung, wenn man es auf die Punkte eines Volumelementes anwendet. Wie im folgenden gezeigt werden soll, läßt sich aber auch für das zweite Gleichungssystem eine Interpretation angeben, die der bekannten des ersten ganz analog ist. Diese Interpretation des

---

[1] Es sind dies die beiden Gleichungssysteme

$$\text{I)}\quad \begin{aligned} A\mu\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z} \\ A\mu\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x} \\ A\mu\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y} \end{aligned} \qquad \text{II)}\quad \begin{aligned} A\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y} \\ A\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z} \\ A\varepsilon\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}, \end{aligned}$$

zu denen noch die Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0$$

hinzutreten (Hertz, Ges. Werke, II, p. 215). Der Kürze wegen werden I) und II) im folgenden einfach als Maxwell'sche Gleichungen bezeichnet.

zweiten Systems ist zugleich so beschaffen, daß sich dann beide Gleichungssysteme zum Teil aus demselben System von Formeln ergeben. Für das Folgende scheint es nun angezeigt, von diesen Formeln auszugehen und sich nicht nur auf die kinematische Interpretation des zweiten Systems der Maxwellschen Gleichungen zu beschränken, sondern beide Systeme in gleicher Weise zu behandeln. Wenn dabei auch die Wiederholung einer Reihe von bekannten Formeln notwendig ist, so hat dieser Weg doch den Vorteil, daß die Analogie zwischen der kinematischen Bedeutung des einen und der des anderen Systems mehr hervortritt. Außerdem sieht man dabei unmittelbar, wie entsprechend der zwischen Elektrizität und Magnetismus bestehenden Reziprozität auch bei der kinematischen Interpretation der Maxwell'schen Gleichungen wieder eine reziproke Verwandtschaft auftritt, die sich schon von solcher Art erweist, daß sie sich leicht auf das Reziprozitätsprinzip der Geometrie zurückführen läßt.

I.

Einen einfachen speziellen Fall der Maxwell'schen Gleichungen erhält man, wenn man von den Beziehungen ausgeht, die zwischen den Richtungscosinus $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ von drei aufeinander senkrechten Richtungen bestehen. Legt man ein rechtwinkliges Koordinatensystem zu Grunde, so sind diese Beziehungen gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{array}{lll} \alpha_0 = m(\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2) & \alpha_1 = m(\beta_2\gamma_0 - \gamma_2\beta_0) & \alpha_2 = m(\beta_0\gamma_1 - \gamma_0\beta_1) \\ \beta_0 = m(\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2) & \beta_1 = m(\gamma_2\alpha_0 - \alpha_2\gamma_0) & \beta_2 = m(\gamma_0\alpha_1 - \alpha_0\gamma_1) \\ \gamma_0 = m(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) & \gamma_1 = m(\alpha_2\beta_0 - \beta_2\alpha_0) & \gamma_2 = m(\alpha_0\beta_1 - \beta_0\alpha_1), \end{array} \qquad 1)$$

wo m gleich $+1$ oder -1 ist, je nachdem das von diesen drei Richtungen gebildete System von derselben Art wie das zu Grunde gelegte Koordinatensystem ist oder nicht. Wir nehmen nun an, es sei ein Bogenelement δs eines Kreises vom Radius ρ gegeben und $\delta\varphi$ sei der zu δs gehörige Zentriwinkel, so daß

$$\delta s = \rho\,\delta\varphi \qquad 2)$$

ist. Ferner wählen wir als Koordinatensystem ein Rechtssystem und verlegen seinen Anfangspunkt in den Mittelpunkt des

Kreises, zu dem das Bogenelement δs gehört. Außerdem setzen wir die positive Richtung von δs und dementsprechend auch den positiven Sinn von $\delta\varphi$ als gegeben voraus, während die positive Richtung von ρ die vom Mittelpunkte zum Bogenelement hin sei; das von diesen drei aufeinander senkrechten Richtungen gebildete System ist dann ein Linkssystem. Es seien nun $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ die Richtungscosinus von δs, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die von ρ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die von $\delta\varphi$; ferner seien δx, δy, δz die Projektionen von δs, x, y, z die von ρ und $\delta\varphi_x, \delta\varphi_y, \delta\varphi_z$ die von $\delta\varphi$. Aus 2) und dem ersten der drei Gleichungssysteme 1) ergibt sich dann das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \delta x &= z\delta\varphi_y - y\delta\varphi_z \\ \delta y &= x\delta\varphi_z - z\delta\varphi_x \\ \delta z &= y\delta\varphi_x - x\delta\varphi_y \end{aligned} \tag{3}$$

und aus 2) und dem dritten Gleichungssystem von 1)

$$\begin{aligned} \delta\varphi_x &= \frac{1}{\rho}(\beta_1\delta z - \gamma_1\delta y) \\ \delta\varphi_y &= \frac{1}{\rho}(\gamma_1\delta x - \alpha_1\delta z) \\ \delta\varphi_z &= \frac{1}{\rho}(\alpha_1\delta y - \beta_1\delta x). \end{aligned} \tag{4}$$

Wendet man jetzt 3) und 4) auf unendlich kleine Lagenänderungen der Punkte eines Volumens an, so gelangt man zu Gleichungssystemen, welche schon so beschaffen sind, daß man von ihnen unmittelbar zu Gleichungen von derselben Form wie die Maxwell'schen übergehen kann. Um aus 3) ein solches Gleichungssystem zu erhalten, wenden wir dasselbe auf die Punkte eines Volumens an, das sich um eine Achse dreht. Verlegt man den Anfangspunkt des Koordinatensystems in die Drehungsachse und ist ρ der Abstand eines Punktes x, y, z des Volumens vom Koordinatenanfangspunkt, $\delta\varphi$ der Winkel, welchen ρ bei der Drehung des Volumens durchläuft, so gelten nämlich für die Lagenänderungen δs seiner Punkte die Gleichungen 1) und 2) und somit auch 3). Da $\delta\varphi_x, \delta\varphi_y, \delta\varphi_z$

von x, y, z unabhängig sind, so erhält man aus 3) durch partielle Differentiation die beiden Gleichungssysteme

$$\frac{\partial \delta x}{\partial x} = \frac{\partial \delta y}{\partial y} = \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0 \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta z}{\partial y} &= \delta \varphi_x, & \frac{\partial \delta y}{\partial z} &= -\delta \varphi_x \\ \frac{\partial \delta x}{\partial z} &= \delta \varphi_y, & \frac{\partial \delta z}{\partial x} &= -\delta \varphi_y \\ \frac{\partial \delta y}{\partial x} &= \delta \varphi_z, & \frac{\partial \delta x}{\partial y} &= -\delta \varphi_z. \end{aligned} \tag{6}$$

Umgekehrt gelangt man durch Integration dieser beiden Gleichungssysteme wieder zu 3); denn die bei der Integration auftretenden Konstanten fallen nach entsprechender Wahl des Anfangspunktes des Koordinatensystems wieder weg. Somit sind die Gleichungssysteme 5) und 6) dem Gleichungssystem 3) äquivalent. Faßt man nun in 6) je zwei in einer Zeile stehende Gleichungen zusammen, so ergibt sich das bekannte Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \delta \varphi_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta z}{\partial y} - \frac{\partial \delta y}{\partial z}\right) \\ \delta \varphi_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta x}{\partial z} - \frac{\partial \delta z}{\partial x}\right) \\ \delta \varphi_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x} - \frac{\partial \delta x}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Dasselbe kann wieder durch 6) ersetzt werden, falls

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta x}{\partial y} &= -\frac{\partial \delta y}{\partial x} \\ \frac{\partial \delta x}{\partial z} &= -\frac{\partial \delta z}{\partial x} \\ \frac{\partial \delta y}{\partial x} &= -\frac{\partial \delta x}{\partial y} \end{aligned} \tag{8}$$

ist. Daher sind auch die Gleichungssysteme 5), 7) und 8) zusammen dem Systeme 3) äquivalent.

Um auch aus 4) ein den Gleichungen 7) analoges Gleichungssystem zu erhalten, nehmen wir zunächst an, es

möge sich ein Volumen längs eines Bogenelementes verschieben. Jedes von einem Punkte des Volumens dabei durchlaufene Bogenelement ersetzen wir nun durch ein gleich langes, gleich gerichtetes und nach derselben Seite hin konvexes Bogenelement δs eines Kreises, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Symmetrieebene von δs mit einer zur Verschiebungsrichtung parallelen, als gegeben vorausgesetzten, außerhalb des Volumens gelegenen Geraden ist, und nehmen an, daß sich die Punkte des Volumens längs dieser Bogenelemente δs bewegen, deren Länge für alle Punkte dieselbe ist, deren Krümmung aber in der Richtung gegen die gegebene Gerade hin beständig zunimmt. Eine solche Bewegung der Punkte eines Volumens erhält man z. B., wenn seine Punkte frei bewegliche Massenpunkte sind und dieses Volumen sich unter der Einwirkung einer unendlich langen, mit Masse belegten Geraden parallel zu dieser Geraden längs eines Bogenelementes verschiebt, falls für die Massenanziehung das Newton'sche Gravitationsgesetz gült. Ist insbesondere das Volumen sehr klein, so erhält man als Grenzfall der hier angegebenen Lagenänderung seiner Punkte wieder eine unendlich kleine Verschiebung des Volumens. Es sei nun ρ der Radius des Kreises, auf dem sich ein Punkt x, y, z des Volumens verschiebt, und $\delta\varphi$ der zu δs gehörige Zentriwinkel. Für jeden Punkt des Volumens gelten dann die Gleichungen 1) und 2) und daher auch 4). Während aber bei der Drehung eines Volumens um eine Achse $\delta\varphi_x, \delta\varphi_y, \delta\varphi_z$ konstant sind, sind jetzt $\delta x, \delta y, \delta z$ von x, y, z unabhängig und $\delta\varphi_x, \delta\varphi_y, \delta\varphi_z$ veränderlich. Da ρ als stetige Funktion von x, y, z vorausgesetzt ist und außerdem die Gleichungen

$$\frac{\partial\varphi_x}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_y}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_z}{\partial z} = 0 \tag{9}$$

bestehen, so folgt aus 4) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_z}{\partial y} &= \frac{\alpha_1}{\rho}, & \frac{\partial\varphi_y}{\partial z} &= -\frac{\alpha_1}{\rho} \\ \frac{\partial\varphi_x}{\partial z} &= \frac{\beta_1}{\rho}, & \frac{\partial\varphi_z}{\partial x} &= -\frac{\beta_1}{\rho} \\ \frac{\partial\varphi_y}{\partial x} &= \frac{\gamma_1}{\rho}, & \frac{\partial\varphi_x}{\partial y} &= -\frac{\gamma_1}{\rho}. \end{aligned} \tag{10}$$

Umgekehrt ergibt sich aus 10), wenn die darin auftretenden Differentialquotienten stetige Funktionen von x, y, z sind, zusammen mit 9) wieder das Gleichungssystem 4), so daß 9) und 10) dann den Gleichungen 4) äquivalent sind. Faßt man in 10) je zwei in einer Zeile stehende Gleichungen zusammen, so erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1}{\rho} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial z}\right) \\ \frac{\beta_1}{\rho} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_z}{\partial x}\right) \\ \frac{\gamma_1}{\rho} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y}\right), \end{aligned} \qquad 11)$$

das wieder durch 10) ersetzt werden kann, falls

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} &= -\frac{\partial \varphi_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} &= -\frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} &= -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \delta \end{aligned} \qquad 12)$$

ist. Daher sind auch die Systeme 9), 11) und 12) zusammen dem Gleichungssystem 4) äquivalent, wenn die in 10) auftretenden Differentialquotienten stetige Funktionen von x, y, z sind.

Geht man jetzt von den Systemen 7) und 11) zu kinematischen Gleichungssystemen über, so erhält man schon Gleichungen von ähnlicher Form wie die Maxwell'schen. Um 7) in ein solches Gleichungssystem zu verwandeln, nehmen wir an, es drehe sich ein Volumen mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ um eine Achse. Sind dann v_x, v_y, v_z die Geschwindigkeitskomponenten eines Punktes x, y, z des Volumens und wählt man als positive Richtung von δs die Bewegungsrichtung, so folgt aus 7) das Gleichungssystem

$$\frac{d\varphi_x}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)$$
$$\frac{d\varphi_y}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \qquad 13)$$
$$\frac{d\varphi_z}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right),$$

während 5) und 8) die Form annehmen

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \qquad 14)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = -\frac{\partial v_y}{\partial z}$$
$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{\partial v_z}{\partial x} \qquad 15)$$
$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Betrachtet man in 13) t als Parameter, so daß v_x, v_y, v_z nur noch als von x, y, z abhängig erscheinen, so läßt sich nach dem Vorhergehenden 13) in Verbindung mit 14) und 15) auf das Gleichungssystem

$$v_x = z\frac{d\varphi_y}{dt} - y\frac{d\varphi_z}{dt}$$
$$v_y = x\frac{d\varphi_z}{dt} - z\frac{d\varphi_x}{dt} \qquad 16)$$
$$v_z = y\frac{d\varphi_x}{dt} - x\frac{d\varphi_y}{dt}$$

zurückführen. Da man auch umgekehrt aus diesem Gleichungssystem wieder die Gleichungen 13), 14) und 15) erhält, so sind diese drei Gleichungssysteme dem System 16) äquivalent. Wie man durch Vergleichung von 16) mit 3), 2) und 1) unmittelbar sieht, ist daher 13) in dem Falle, wo auch die Gleichungen 14)

und 15) bestehen, einfach eine Übertragung der für die Bewegung eines Punktes in einer Kurve geltenden Gleichung

$$v = \rho \frac{d\varphi}{dt}$$

auf die Punkte eines Volumens, das sich um eine Achse dreht.

Aus 11) ergibt sich ein dem System 13) analoges Gleichungssystem, wenn man voraussetzt, daß sich bei der Verschiebung der Punkte eines Volumens, wie sie bei der Aufstellung der Gleichungen 11) angenommen wurde, sämtliche Punkte desselben mit derselben Geschwindigkeit w bewegen und die Tangentialkomponente der Beschleunigung verschwinde. Zufolge der anfangs über den Sinn von ρ gemachten Festsetzung erhält man dann für die Komponenten $p_{c,x}, p_{c,y}, p_{c,z}$ der Zentripetalbeschleunigung p_c eines Punktes die Ausdrücke

$$p_{c,x} = -\frac{w^2}{\rho}\alpha_1, \quad p_{c,y} = -\frac{w^2}{\rho}\beta_1, \quad p_{c,z} = -\frac{w^2}{\rho}\gamma_1. \qquad 17)$$

Setzt man die Werte, welche sich für $\frac{\alpha_1}{\rho}, \frac{\beta_1}{\rho}, \frac{\gamma_1}{\rho}$ aus diesen Gleichungen ergeben, in 11) ein, so gelangt man zu dem den Gleichungen 13) analogen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} p_{c,x} &= \frac{w^2}{2}\left(\frac{\partial\varphi_y}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_z}{\partial y}\right) \\ p_{c,y} &= \frac{w^2}{2}\left(\frac{\partial\varphi_z}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_x}{\partial z}\right) \\ p_{c,z} &= \frac{w^2}{2}\left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial y} - \frac{\partial\varphi_y}{\partial x}\right). \end{aligned} \qquad 18)$$

Ist umgekehrt ein Gleichungssystem von dieser Form gegeben, so kann man dasselbe mit Hilfe von 17) auf ein Gleichungssystem 11) zurückführen, indem man die Gleichungen 17) ohne Rücksicht auf ihre kinematische Bedeutung lediglich als Definitionsgleichungen von ρ ansieht und die in den abhängigen Veränderlichen des so sich ergebenden Gleichungssystems implizit auftretende Variable t als Parameter betrachtet. Damit ein Gleichungssystem von der Form 18) aber

auch die bei seiner Einführung angegebene kinematische Bedeutung habe, müssen außerdem nicht nur die Bedingungsgleichungen 9) und 12) bestehen und die Differentialquotienten auf der rechten Seite von 18) stetige Funktionen von x, y, z sein, sondern es müssen auch w_x, w_y, w_z, die Komponenten von w, von x, y, z unabhängig sein, so daß wieder umgekehrt in dem aus 11) sich ergebenden Gleichungssystem 4)

$$\delta x = w_x \delta t, \quad \delta y = w_y \delta t, \quad \delta z = w_z \delta t$$

gesetzt werden kann. Da sich die Gleichungen 18) unter diesen Bedingungen somit auf die Systeme 17) und 11) zurückführen lassen, so können sie daher dann angesehen werden als Übertragung der für die gleichförmige Bewegung eines Punktes in einer Kurve geltenden Beziehung

$$p_c = \frac{w^2}{\rho}$$

auf die Punkte eines Volumens, die sich in der bei der Einführung von 11) angegebenen Weise verschieben.

Die Gleichungen 13) und 18) stimmen nun mit den Maxwell'schen Gleichungen zunächst bezüglich der darin auftretenden Konstanten nicht überein. Dieser Unterschied ist jedoch unwesentlich, da die Maxwell'schen Gleichungen durch eine einfache Transformation in die Gleichungen

$$a) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_x}{\partial t} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial t} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial \varphi_z}{\partial t} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \end{aligned} \qquad b) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{w^2}{2}\left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_z}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} &= \frac{w^2}{2}\left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{w^2}{2}\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\right) \end{aligned} \qquad 19)$$

übergehen. Für das Folgende können wir daher die Maxwell'schen Gleichungen als in dieser Form gegeben annehmen.

Ferner unterscheiden sich die Gleichungen 13) und 18) von 19) dadurch, daß in 13) $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ von x, y, z unabhängig sind, und auch die auf der linken Seite von 19 b) auftretenden Differentialquotienten können im allgemeinen nicht mit den

Funktionen $p_{c,x}, p_{c,y}, p_{c,z}$ in 18) identifiziert werden. Interpretiert man in 19) v_x, v_y, v_z als die Komponenten der Geschwindigkeit v eines Punktes x, y, z und $\frac{\partial \varphi_x}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_y}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_z}{\partial t}$ als die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit, mit der sich ein Radiusvektor dreht, dessen Endpunkt derselbe Punkt x, y, z ist, so lassen sich jedoch die Gleichungen 19) auf 13) und 18) zurückführen, wenn man 19) nur auf die Punkte eines Volumelementes anwendet. Aus dem gleichzeitigen Bestehen der beiden Gleichungssysteme 19) folgt nämlich, daß $v_x, v_y, v_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ stetige Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x, y, z und t sind. In einer genügend kleinen Umgebung eines Punktes x, y, z kann man daher jede dieser sechs stetigen Funktionen durch den Grenzwert ersetzen, dem sie sich hier nähert. Ersetzt man nun in 19 *a*) $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ durch diesen Grenzwert, so folgt daraus, daß der Grenzwert von $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ für alle Punkte des betrachteten Volumelementes derselbe ist, daß auch die Differentialquotienten auf der linken Seite von 19 *a*) als Komponenten der Winkelgeschwindigkeit für alle Punkte des betrachteten Volumelementes denselben Wert haben. Es geht also das Gleichungssystem 19 *a*), wenn man es nur auf die Punkte eines Volumelementes anwendet, bei dieser Interpretation in das Gleichungssystem 13) über.

Um 19 *b*) auf ein Gleichungssystem 18) zurückzuführen, multiplizieren wir beide Seiten der Gleichungen 19 *b*) mit $\frac{v^2}{w^2}$ und setzen

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2,$$

$$\frac{1}{w^2}\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\alpha_1}{\rho}, \quad \frac{1}{w^2}\frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\beta_1}{\rho}, \quad \frac{1}{w^2}\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\gamma_1}{\rho}.$$

Das so sich ergebende Gleichungssystem hat dann schon dieselbe Form wie 18), wenn man

$$p_c = \frac{v^2}{\rho}$$

setzt. Da wegen des gleichzeitigen Bestehens der beiden Systeme 19) v_x, v_y, v_z stetige Funktionen von x, y, z sind, so

sind ferner die Differentialquotienten auf der linken Seite von 19 *b*) und somit auch die oben definierten Funktionen $\frac{\alpha_1}{\rho}, \frac{\beta_1}{\rho}, \frac{\gamma_1}{\rho}$ stetige Funktionen von x, y, z. Endlich kann wegen der Stetigkeit von v_x, v_y, v_z jede dieser Funktionen innerhalb einer genügend kleinen Umgebung eines Punktes durch den Grenzwert ersetzt werden, dem sie sich hier nähert, so daß dann in dem aus 19 *b*) hervorgehenden Gleichungssystem 4)

$$\delta x = v_x \delta t, \quad \delta y = v_y \delta t, \quad \delta z = v_z \delta t$$

gesetzt werden kann. Beschränkt man sich auf die Punkte eines Volumelementes, so haben daher die mit $\frac{v^2}{w^2}$ multiplizierten Gleichungen 19 *b*) auch dieselbe kinematische Bedeutung wie 18), falls noch die Bedingungsgleichungen 9) und 12) bestehen.

Endlich müssen wir noch untersuchen, welche Bedeutung die Gleichungen 14) und 15), beziehungsweise 9) und 12) haben, die bei der Einführung von 13) und 18) zu 13), beziehungsweise 18) hinzugetreten sind. Von diesen Bedingungsgleichungen ist 14) ein spezieller Fall der Gleichung

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \tag{20 a}$$

9) ein spezieller Fall von

$$\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} = 0; \tag{20 b}$$

die Gleichungen 15) und 12) aber eine Spezialisierung des Systems 13), beziehungsweise 18). Die funktionentheoretische Bedeutung dieser Spezialisierung der Maxwell'schen Gleichungen findet man in einfacher Weise, wenn man mittels der in den Maxwell'schen Gleichungen auftretenden reellen Funktionen komplexe Funktionen bildet. Setzt man

$$\xi = z + iy, \quad \eta = x + iz, \quad \zeta = y + ix, \quad (i = \sqrt{-1})$$

und

$$v_\xi = v_z + i v_y, \quad v_\eta = v_x + i v_z, \quad v_\zeta = v_y + i v_x,$$

so stellen nämlich die Gleichungen 14) und 15) die Bedingung dar, daß v_ξ eine analytische Funktion von ξ, v_η eine analytische Funktion von η, v_ζ eine analytische Funktion von ζ ist, falls man in v_ξ x und t, in v_η y und t, in v_ζ z und t als Parameter ansieht. Ebenso drücken die Gleichungen 9) und 12), wenn man

$$\varphi_\xi = \varphi_z + i\varphi_y, \quad \varphi_\eta = \varphi_x + i\varphi_z, \quad \varphi_\zeta = \varphi_y + i\varphi_x$$

setzt, die Bedingung aus, daß φ_ξ eine analytische Funktion von ξ mit den Parametern x und t, φ_η eine analytische Funktion von η mit den Parametern y und t, φ_ζ eine analytische Funktion von ζ mit den Parametern z und t sei.

Wie man jetzt unmittelbar sieht, kann man dann, wenn die Bedingungsgleichungen 14), 15) und 9), 12) erfüllt sind, nicht nur von den Maxwell'schen Gleichungen 19) zu Gleichungen von der Form 3) und 4) übergehen, sondern man gelangt dann auch umgekehrt, indem man von 3) und 4) ausgeht, wieder zu den Maxwell'schen Gleichungen, falls man 3) und 4) auf die Punkte eines Volumelementes anwendet und voraussetzt, daß sich in den Systemen 13) und 18) φ_x, φ_y, φ_z, beziehungsweise v_x, v_y, v_z beim Übergang von einem Volumelement zum benachbarten stetig ändern.

Dadurch, daß wir ausgehend von denselben geometrischen Beziehungen beide Systeme der Maxwell'schen Gleichungen nebeneinander einführten, gelangen wir, allerdings zunächst nur unter beschränkenden Voraussetzungen, zu einer Lösung des Problems, in welcher Beziehung die Reziprozität zwischen Elektrizität und Magnetismus zum Reziprozitätsprinzip der Geometrie stehe. Da die zwischen Elektrizität und Magnetismus bestehende Reziprozität in den Maxwell'schen Gleichungen schon vollständig zum Ausdruck kommt, ist dieses Problem identisch mit dem folgenden: In welcher Beziehung steht die durch die Maxwell'schen Gleichungen definierte Reziprozität zu der in der Geometrie auftretenden. Um zur Lösung der so formulierten Aufgabe zu gelangen, interpretieren wir in den Maxwell'schen Gleichungen die abhängigen Veränderlichen wieder in der bereits angegebenen Weise als Geschwindigkeits- und Drehungskomponenten. Außerdem vereinfachen wir diese

Aufgabe noch dadurch, daß wir uns auf die Betrachtung eines Volumelementes beschränken; wie bereits gezeigt wurde, gehen dann die Maxwell'schen Gleichungen in die Gleichungen 13) und 18) über. Nach dieser Vereinfachung der Aufgabe reichen jetzt in dem Falle, wo die Gleichungen 14), 15), 9) und 12) bestehen, schon die bisher erhaltenen Resultate zu ihrer Lösung aus. In diesem Falle können nämlich, wie schon bewiesen wurde, 13) und 18) auf Systeme von der Form 3) und 4) zurückgeführt werden, so daß jetzt an die Stelle der Maxwell'schen Gleichungen zwei Gleichungssysteme treten, die sich rein geometrisch interpretieren lassen. Die beiden Systeme der Maxwell'schen Gleichungen können daher als reziproke Systeme angesehen werden, wenn 3) und 4) zu einander reziprok sind. Diese letzteren Gleichungssysteme besitzen nun wirklich diese Eigenschaft; denn sie lassen sich unter Berücksichtigung von 2) auf das erste und dritte System von 1) zurückführen und es können die Richtungskosinus von $\delta\varphi$ als Ebenenkoordinaten und die von δs als Punktkoordinaten interpretiert werden. Wie man unmittelbar sieht, sind dann das erste und dritte System von 1) reziproke Systeme.

Daß die in der hier angegebenen Weise auf die Punkte eines Volumens angewandten Systeme 3) und 4) zueinander reziprok sind, ergibt sich auch, wenn man die dadurch dargestellten Lagenänderungen betrachtet. Es ist nämlich die bei der Einführung von 11) angegebene unendlich kleine Verschiebung der Punkte eines Volumens reziprok zu einer unendlich kleinen Drehung eines Volumens um eine Achse; denn es entspricht bei diesen beiden infinitesimalen Lagenänderungen dem durch Drehung einer Ebene entstehenden Ebenenbüschel eine durch Bewegung eines Punktes entstehende Punktreihe und umgekehrt.

In dem hier behandelten speziellen Falle der Maxwell-schen Gleichungen gelangt man somit zum zweiten System derselben, indem man von einem Gleichungssystem ausgeht, das zu demjenigen reziprok ist, aus dem sich das erste System ergibt, und es können daher auch die beiden Systeme der Maxwell'schen Gleichungen als zueinander reziprok angesehen werden.

II.

Nach der Erledigung dieses speziellen Falles läßt sich jetzt auch dann, wenn 14), 15), 9) und 12) nicht mehr bestehen, die zwischen Elektrizität und Magnetismus bestehende Reziprozität zum Reziprozitätsprinzip der Geometrie in Beziehung bringen, indem man die Maxwell'schen Gleichungen wieder auf zwei Systeme zurückführt, die sich geometrisch interpretieren lassen. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß die einzelnen partiellen Differentialquotienten von v_x, v_y, v_z, φ_x, φ_y, φ_z nach x, y, z stetige Funktionen von x, y, z sind. Wir setzen nun voraus, daß diese Bedingung erfüllt sei. Außerdem interpretieren wir wieder v_x, v_y, v_z als Geschwindigkeitskomponenten eines Punktes x, y, z und $\frac{\partial \varphi_x}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_y}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_z}{\partial t}$ als die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit, mit der sich ein Radiusvektor dreht, dessen Endpunkt derselbe Punkt x, y, z ist.

Um 19a) auf ein Gleichungssystem zurückführen zu können, das sich geometrisch interpretieren läßt, haben wir zunächst zu berücksichtigen, daß dann, wenn die Differentialquotienten auf der rechten Seite stetige Funktionen sind, nicht nur $\frac{\partial \varphi_x}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_y}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_z}{\partial t}$, sondern auch die Summen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_x}{\partial t} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial t} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial \psi_z}{\partial t} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \end{aligned} \qquad 21)$$

stetige Funktionen von x, y, z sind. Entsprechend der Interpretation von v_x, v_y, v_z als Geschwindigkeitskomponenten können ψ_x, ψ_y, ψ_z als Winkel interpretiert werden. Durch Einführung dieser Hilfswinkel gelangt man nun von 21) und 19 a) zum Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v_z}{\partial y} &= \frac{\partial \psi_x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial t} & \frac{\partial v_y}{\partial z} &= \frac{\partial \psi_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial t} \\
\frac{\partial v_x}{\partial z} &= \frac{\partial \psi_y}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial t} & \frac{\partial v_z}{\partial x} &= \frac{\partial \psi_y}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial t} \qquad 22) \\
\frac{\partial v_y}{\partial x} &= \frac{\partial \psi_z}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial t} & \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \frac{\partial \psi_z}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_z}{\partial t}.
\end{aligned}
$$

Da sich durch Elimination von $\frac{\partial \psi_x}{\partial t}, \frac{\partial \psi_y}{\partial t}, \frac{\partial \psi_z}{\partial t}$ aus 22) wieder das System 19 *a*) ergibt und ψ_x, ψ_y, ψ_z einfach als durch die Gleichungen 21) definierte Hilfsgrößen angesehen werden können, so ist 22) dem System 19 *a*) äquivalent. Von 22) kann man jetzt leicht zu einem den Gleichungen 3) analogen Gleichungssystem gelangen, wenn man sich auf die Betrachtung eines Volumelementes beschränkt. Da nämlich zufolge unserer Voraussetzung $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, \psi_x, \psi_y, \psi_z$ stetige Funktionen von x, y, z sind, so nähern sie sich innerhalb einer genügend kleinen Umgebung eines Punktes x, y, z je einem bestimmten Grenzwert. Wir ersetzen nun $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, \psi_x, \psi_y, \psi_z$ durch diese Grenzwerte und betrachten außerdem die Zeit als Parameter. Bei einer unendlich kleinen Lagenänderung der Punkte des betrachteten Volumelementes geht dann 22), wenn man an Stelle der Geschwindigkeit den Weg δs einführt, in das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \delta z}{\partial y} &= \delta\psi_x + \delta\varphi_x & \frac{\partial \delta y}{\partial z} &= \delta\psi_x - \delta\varphi_x \\
\frac{\partial \delta x}{\partial z} &= \delta\psi_y + \delta\varphi_y & \frac{\partial \delta z}{\partial x} &= \delta\psi_y - \delta\varphi_y \qquad 23) \\
\frac{\partial \delta y}{\partial x} &= \delta\psi_z + \delta\varphi_z & \frac{\partial \delta x}{\partial y} &= \delta\psi_z - \delta\varphi_z
\end{aligned}
$$

über, in dem jetzt die Größen rechts vom Gleichheitszeichen innerhalb des betrachteten Volumelementes von x, y, z unabhängig sind. Endlich setzen wir vorläufig noch voraus, daß an Stelle der Gleichungen von der Form 20 *a*) die spezielleren Gleichungen von der Form 5) zum ersten System der Maxwell-

schen Gleichungen hinzutreten. In diesem Falle ergibt sich aus 23) und 5) durch Integration das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\delta x &= z(\delta\psi_y+\delta\varphi_y)+y(\delta\psi_z-\delta\varphi_z)\\ \delta y &= x(\delta\psi_z+\delta\varphi_z)+z(\delta\psi_x-\delta\varphi_x)\\ \delta z &= y(\delta\psi_x+\delta\varphi_x)+x(\delta\psi_y-\delta\varphi_y),\end{aligned} \tag{24}$$

falls der Einfachheit wegen die Integrationskonstante gleich Null gesetzt wird. Umgekehrt erhält man durch Differentiation dieses Gleichungssystems wieder die Gleichungen 23) und 5), so daß 24) diesen beiden Gleichungssystemen äquivalent ist. Seine geometrische Bedeutung ist bekanntlich die, daß das betrachtete Volumelement eine unendlich kleine Drehung um eine Achse und eine unendlich kleine Deformation ohne Dilatation erfährt.

In analoger Weise kann man auch 19*b*) auf ein Gleichungssystem zurückführen, das sich geometrisch interpretieren läßt, indem man durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{w^2}{2}\left(\frac{\partial\varphi_y}{\partial z}+\frac{\partial\varphi_z}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial u_x}{\partial t}\\ \frac{w^2}{2}\left(\frac{\partial\varphi_z}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_x}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial u_y}{\partial t}\\ \frac{w^2}{2}\left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_y}{\partial x}\right) &= -\frac{\partial u_z}{\partial t}\end{aligned} \tag{25}$$

die Hilfsgrößen u_x, u_y, u_z einführt, die gemäß unserer Interpretation von $v_x, v_y, v_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ als Geschwindigkeiten angesehen werden können. Aus 25) und 19 *b*) ergibt sich nun das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_y}{\partial z} &= \frac{1}{w^2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}-\frac{\partial u_x}{\partial t}\right) & \frac{\partial\varphi_z}{\partial y} &= -\frac{1}{w^2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)\\ \frac{\partial\varphi_z}{\partial x} &= \frac{1}{w^2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}-\frac{\partial u_y}{\partial t}\right) & \frac{\partial\varphi_x}{\partial z} &= -\frac{1}{w^2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+\frac{\partial u_y}{\partial t}\right)\\ \frac{\partial\varphi_x}{\partial y} &= \frac{1}{w^2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}-\frac{\partial u_z}{\partial t}\right) & \frac{\partial\varphi_y}{\partial x} &= -\frac{1}{w^2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+\frac{\partial u_z}{\partial t}\right),\end{aligned} \tag{26}$$

das dem System 19 *b*) äquivalent ist, da $-\frac{\partial u_x}{\partial t}$, $-\frac{\partial u_y}{\partial t}$, $-\frac{\partial u_z}{\partial t}$ einfach als abkürzende Bezeichnung für die Summen auf der linken Seite von 25) angesehen werden können. An Stelle der Beschleunigungen auf der rechten Seite von 26) führen wir jetzt die Funktionen ρ und r ein, indem wir

$$\left.\begin{array}{ll} a) & \frac{1}{w^2}\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\alpha_1}{\rho}, \quad \frac{1}{w^2}\frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\beta_1}{\rho}, \quad \frac{1}{w^2}\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\gamma_1}{\rho} \\ b) & \frac{1}{w^2}\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{a}{r}, \quad \frac{1}{w^2}\frac{\partial u_y}{\partial t} = -\frac{b}{r}, \quad \frac{1}{w^2}\frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{c}{r} \end{array}\right\} \quad 27)$$

setzen, wo $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, a, b, c$ Richtungscosinus sind; es geht dann 26) über in das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} = \frac{a}{r} - \frac{\alpha_1}{\rho} & \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} = \frac{a}{r} + \frac{\alpha_1}{\rho} \\ \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} = \frac{b}{r} - \frac{\beta_1}{\rho} & \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} = \frac{b}{r} + \frac{\beta_1}{\rho} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} = \frac{c}{r} - \frac{\gamma_1}{\rho} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} = \frac{c}{r} + \frac{\gamma_1}{\rho}. \end{array} \quad 28)$$

Außerdem setzen wir vorläufig noch voraus, daß statt der Bedingungsgleichungen von der Form 20 *b*) die spezielleren Gleichungen von der Form 9) zum Gleichungssystem 28) hinzutreten. Aus 28) und 9) erhält man dann das Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} \delta\varphi_x = \left(\frac{b}{r} + \frac{\beta_1}{\rho}\right)\delta z + \left(\frac{c}{r} - \frac{\gamma_1}{\rho}\right)\delta y \\ \delta\varphi_y = \left(\frac{c}{r} + \frac{\gamma_1}{\rho}\right)\delta x + \left(\frac{a}{r} - \frac{\alpha_1}{\rho}\right)\delta z \\ \delta\varphi_z = \left(\frac{a}{r} + \frac{\alpha_1}{\rho}\right)\delta y + \left(\frac{b}{r} - \frac{\beta_1}{\rho}\right)\delta x, \end{array} \quad 29)$$

wenn man die Zeit als Parameter ansieht. Da sich aus 29) wieder die Gleichungen 28) und 9) ergeben, so ist 29) diesen beiden Gleichungssystemen äquivalent. Sollen endlich in 29) schon in dem speziellen Falle, der im I. Teile behandelt wurde,

δx, δy, δz als die den Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y, v_z entsprechenden Lagenänderungen interpretiert werden können, so müssen, wie im I. Teil gezeigt wurde, auch diese Geschwindigkeitskomponenten von x, y, z unabhängig sein. Es darf daher 29) nur auf die Punkte eines Volumelementes angewendet werden, so daß dann die stetigen Funktionen v_x, v_y, v_z durch ihren Grenzwert ersetzt werden können.

Daraus, daß sich die Maxwell'schen Gleichungen unter den angegebenen Bedingungen auf die Systeme 24) und 29) zurückführen lassen, folgt wieder wie früher, daß dann die Maxwell'schen Gleichungen als zwei zueinander reziproke Systeme angesehen werden können, wenn 24) und 29) zueinander reziprok sind. Diese beiden Systeme besitzen nun wirklich diese Eigenschaft. Um dies zu zeigen, setzen wir zunächst in 24)

$$\delta x = \delta x_1 + \delta x_2$$
$$\delta y = \delta y_1 + \delta y_2$$
$$\delta z = \delta z_1 + \delta z_2,$$

wo

$$a)\quad \begin{aligned} \delta x_1 &= z\delta\varphi_y - y\delta\varphi_z \\ \delta y_1 &= x\delta\varphi_z - z\delta\varphi_x \\ \delta z_1 &= y\delta\varphi_x - x\delta\varphi_y \end{aligned} \qquad b)\quad \begin{aligned} \delta x_2 &= z\delta\psi_y + y\delta\psi \\ \delta y_2 &= x\delta\psi_z + z\delta\psi_x \\ \delta z_2 &= y\delta\psi_x + x\delta\psi_y \end{aligned} \qquad 30)$$

ist. In analoger Weise zerlegen wir auch 29) in die Gleichungssysteme

$$a)\quad \begin{aligned} \delta\varphi_x^{(1)} &= \frac{1}{\rho}(\beta_1\delta z - \gamma_1\delta y) \\ \delta\varphi_y^{(1)} &= \frac{1}{\rho}(\gamma_1\delta x - \alpha_1\delta z) \\ \delta\varphi_z^{(1)} &= \frac{1}{\rho}(\alpha_1\delta y - \beta_1\delta x) \end{aligned} \qquad b)\quad \begin{aligned} \delta\varphi_x^{(2)} &= \frac{1}{r}(b\delta z + c\delta y) \\ \delta\varphi_y^{(2)} &= \frac{1}{r}(c\delta x + a\delta z) \\ \delta\varphi_z^{(2)} &= \frac{1}{r}(a\delta y + b\delta x), \end{aligned} \qquad 31)$$

so daß

$$\delta\varphi_x = \delta\varphi_x^{(1)} + \delta\varphi_x^{(2)}$$
$$\delta\varphi_y = \delta\varphi_y^{(1)} + \delta\varphi_y^{(2)}$$
$$\delta\varphi_z = \delta\varphi_z^{(1)} + \delta\varphi_z^{(2)}$$

ist. Wie bereits im I. Teile gezeigt wurde, ist 30 *a*) reziprok zu 31 *a*). Ebenso können aber auch die Systeme 30 *b*) und 31 *b*)

als reziprok angesehen werden; denn sie lassen sich auf die beiden Gleichungen

$$\delta s_2 = \rho \delta \psi, \quad \delta s = r \delta \varphi^{(2)}$$

und auf zwei Gleichungssysteme von der Form

$$\left.\begin{aligned}
\cos a_0 &= \cos b_1 \cos c_2 + \cos c_1 \cos b_2 \\
\cos b_0 &= \cos c_1 \cos a_2 + \cos a_1 \cos c_2 \\
\cos c_0 &= \cos a_1 \cos b_2 + \cos b_1 \cos a_2 \\
\cos a_2 &= \cos b_0 \cos c_1 + \cos c_0 \cos b_1 \\
\cos b_2 &= \cos c_0 \cos a_1 + \cos a_0 \cos c_1 \\
\cos c_2 &= \cos a_0 \cos b_1 + \cos b_0 \cos a_1
\end{aligned}\right\} \qquad 32)$$

zurückführen und es können in ihnen die Richtungscosinus von $\delta\psi$ und $\delta\varphi^{(2)}$ als Ebenenkoordinaten und die von δs und δs_2 als Punktkoordinaten interpretiert werden. Somit sind dann die beiden Systeme 32) und daher auch 30 *b*) und 31 *b*) zueinander reziprok. Infolgedessen besteht jedes der beiden Systeme 24) und 29) aus der Summe von zwei Gleichungssystemen, zu denen im anderen System je eines reziprok ist, und es sind auch 24) und 29) zueinander reziprok.

Durch die Zerlegung von 29) in die beiden Systeme 31) findet man auch unmittelbar die kinematische Bedeutung des dazu äquivalenten Gleichungssystems 19 *b*). Wegen der bereits vorausgesetzten Beschränkung von 29) auf die Punkte eines Volumelementes hat nämlich 31 *a*) die schon angegebene kinematische Bedeutung. Die von 31 *b*) ergibt sich in analoger Weise wie im I. Teil die Bedeutung des auf die Punkte eines Volumens angewandten Gleichungssystems 4), indem man berücksichtigt, daß sich 31 *b*) auf Beziehungen von der Form 2) und 32) zurückführen läßt und in den Gleichungen 29) $\delta x, \delta y, \delta z$ von x, y, z unabhängig sein sollen. Denn daraus folgt zunächst, daß 31 *b*) eine unendlich kleine Verschiebung der Punkte eines Volumens längs Kreisbogen darstellt, deren Länge für alle Punkte dieselbe ist und deren Krümmung dem Abstande eines sich verschiebenden Punktes von einer gegebenen Geraden verkehrt proportional ist. Die Richtungscosinus einer Ebene, in der ein

solcher durch Bewegung eines Punktes x, y, z entstehender Kreisbogen liegt, erhält man durch Vergleichung von 31 *b*) mit dem System 30 *b*), durch das eine unendlich kleine Deformation ohne Dilatation dargestellt wird. Die Richtungscosinus einer solchen Ebene sind nämlich dieselben wie die aus 30 *b*) für einen Punkt mit denselben Koordinaten sich ergebenden Richtungscosinus von δs_2, so daß eine solche Ebene auf der durch δs_2 bestimmten Richtung senkrecht steht. Aus der Bedeutung von 31 *b*) und aus 27 *b*) erhält man jetzt die von 25) in analoger Weise wie im I. Teil aus 4) und 17) die des dort behandelten speziellen Falles von 19 *b*), falls die partiellen Differentialquotienten auf der linken Seite von 25) den Bedingungen genügen, die zu 25) hinzutreten, wenn man von 31 *b*) zu 25) übergeht. Gleichzeitig ergibt sich auch hier, daß wegen der Beziehung

$$\delta x = u_x \delta t, \quad \delta y = u_y \delta t, \quad \delta z = u_z \delta t$$

die Geschwindigkeitskomponenten u_x, u_y, u_z von x, y, z unabhängig sein müssen. Da zufolge der Voraussetzung, daß die partiellen Differentialquotienten von φ_x, φ_y, φ_z nach x, y, z stetige Funktionen von x, y, z sind, auch u_x, u_y, u_z stetige Funktionen von x, y, z sind, so kann man dieser Bedingung dadurch genügen, daß man 31 *b*) nur auf die Punkte eines Volumelementes anwendet und u_x, u_y, u_z durch ihren Grenzwert innerhalb desselben ersetzt. Es ist somit die früher gemachte Beschränkung von 29) auf die Punkte eines Volumelementes nicht nur wegen des speziellen Falles 31 *a*), sondern auch wegen 31 *b*) notwendig. Da sich aus der Bedeutung der beiden Systeme 31) auch die von 29) ergibt, so ist jetzt auch die kinematische Bedeutung des dazu äquivalenten Systems 19 *b*) bekannt.

Aus der hier angegebenen kinematischen Bedeutung der Maxwell'schen Gleichungen erhält man auch die der im I. Teil auftretenden einschränkenden Bedingungsgleichungen 15) und 12). Zufolge 15) und 12) ist nämlich in 21)

$$\delta \psi_x = \delta \psi_y = \delta \psi_z = 0$$

und in 25)

$$\frac{a}{r} = \frac{b}{r} = \frac{c}{r} = 0;$$

daher fällt dann beim ersten System der Maxwell'schen Gleichungen die durch reine Gestaltsänderung verursachte Lagenänderung, beim zweiten System die zu dieser reinen Gestaltsänderung reziproke Verschiebung der Punkte eines Volumelementes weg.

Ebenso wie von den Gleichungen 3) und 4) kann man, um die Maxwell'schen Gleichungen zu erhalten, auch von 24) und 29) ausgehen. Wendet man nämlich 24) und 29) auf die Punkte eines Volumelementes an und setzt man voraus, daß $\delta\varphi_x$, $\delta\varphi_y$, $\delta\varphi_z$, $\delta\psi_x$, $\delta\psi_y$, $\delta\psi_z$ und die durch 27) definierten Geschwindigkeitskomponenten u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z innerhalb eines Volumelementes von x, y, z unabhängig sind, sich aber beim Übergang von einem Volumelement zum benachbarten stetig ändern, so gelangt man in analoger Weise wie im I. Teil zu den Maxwell'schen Gleichungen und den Bedingungsgleichungen 5) und 9). Es ist daher die Voraussetzung, daß in den Maxwell-schen Gleichungen die partiellen Differentialquotienten von v_x, v_y, v_z, φ_x, φ_y, φ_z nach x, y, z stetige Funktionen von x, y, z sind, in dem Falle, wo die Gleichungen 14) und 9) bestehen, nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig dazu, daß sich die Maxwell'schen Gleichungen auf die Gleichungen 24) und 29) zurückführen lassen.

Unter der Voraussetzung, daß die in den Maxwell'schen Gleichungen auftretenden abhängigen Veränderlichen in der angegebenen Weise als Geschwindigkeitskomponenten und Projektionen von Winkeln interpretiert werden, läßt sich jetzt auch der Fall, wo zu den Maxwell'schen Gleichungen anstatt 14) und 9) die Bedingungsgleichungen 20) hinzutreten, unmittelbar auf den hier behandelten zurückführen. Da v_x, v_y, v_z als Geschwindigkeitskomponenten eines Punktes x, y, z definiert sind, so kann man nämlich, wenn man sich auf die Betrachtung von unendlich kleinen Lagenänderungen beschränkt, zunächst 20 *a*) durch die Gleichung

$$\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}=0$$

ersetzen, vermöge der eine unendlich kleine Lagenänderung der Punkte eines Volumelementes von der Art ist, daß keine

Volumänderung auftritt. Es läßt sich nun eine unendlich kleine Deformation in eindeutiger Weise in eine reine Volumänderung und eine reine Gestaltsänderung zerlegen, wo die reine Volumänderung durch das Bestehen der Gleichungen

$$\frac{\partial \delta x}{\partial x} = \frac{\partial \delta y}{\partial y} = \frac{\partial \delta z}{\partial z}$$

definiert ist. Daher kann bei dieser Interpretation der Maxwellschen Gleichungen der Fall, wo die Bedingungsgleichung 20 *a*) zu 19 *a*) hinzutritt, immer auf den bereits in diesem Teil behandelten zurückgeführt werden. Wegen der Symmetrie, die zwischen 19 *a*) und 19 *b*) besteht, folgt daraus, daß man ebenso den Fall, wo 20 *b*) zu 19 *b*) hinzutritt, auf den zurückführen kann, wo 20 *b*) durch die Gleichungen 9) ersetzt wird. Somit lassen sich die Maxwell'schen Gleichungen für homogene isotrope Nichtleiter in solcher Weise kinematisch interpretieren, daß sie in zwei geometrische Gleichungssysteme übergeführt werden können, die zu einander reziprok sind.

Beiträge zur Kenntnis der Radioaktivität der Mineralquellen Tirols

(I. Mitteilung)

von

Max Bamberger.

Aus dem Laboratorium für anorganische Chemie an der k. k. Technischen Hochschule in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Dezember 1907.)

Die Anregung zu vorstehender Arbeit verdanke ich einer Publikation C. Engler's,[1] in welcher derselbe einen sehr bequemen Apparat zur Bestimmung der Radioaktivität von Mineralquellen, den er Fontaktoskop[2] nennt und der sich besonders gut als Reiseapparat benützen läßt, beschreibt.

Es wurde der größte Wert darauf gelegt, die Bestimmung der Radioaktivität unmittelbar an der Quelle oder in möglichster Nähe derselben vorzunehmen, was auch in den meisten Fällen möglich war. Die in der nachfolgenden Tabelle verzeichneten Zahlen geben den für einen Liter direkt beobachteten oder, falls geringere Wassermengen genommen wurden, den auf einen Liter umgerechneten Potentialabfall in Volt pro einer Stunde abzüglich des Normalverlustes. Für die noch im Versuchswasser enthaltene Emanation wurde die Korrektur berücksichtigt. Bei einigen stark radioaktiven Quellen wurde auch die induzierte Aktivität in Abzug gebracht. Die Stärke der Radioaktivität ist nach dem Vorschlage von Mache[3] in elektrostatischen Einheiten angegeben.

Die folgenden Tabellen enthalten die Resultate, die bei Untersuchung der Wässer der Quellen ermittelt wurden.

---

[1] Sitzungsberichte des Naturwissenschaftlichen Vereines in Karlsruhe, Bd. 19. — Cöthener Chemikerzeitung, *31* (1907), 811. — Zeitschrift für Anorganische Chemie, *53* (1907), 1.

[2] Das von C. Engler und H. Sieveking konstruierte Fontaktoskop wurde von der Firma Günther & Tegetmeyer in Braunschweig bezogen und betrug die Kapazität der Elektroskope Nr. 2211 und 2220 13·4, beziehungsweise 13·9.

[3] Monatshefte für Chemie, *26* (1905), 356.

Örtlichkeit		Datum der Bestimmung	Nähere Angabe des Ortes der Entnahme des Wassers und Bezeichnung der Quelle	Temperatur in Celsiusgraden	Potentialabfall in Volt minus Normalverlust pro Liter und Stunde	Macheeinheiten $i \times 10^3$
Bad Steinhof[1]	Pitztal	1907 25. VIII.	Badequelle	8·7	148	1·8
» »	»	26. VIII.	»	8·7	207	2·5
» »	»	30. VIII.	»	8·7	171	2·1
» »	»	5. IX.	»	8·7	167	2·1
» »	»	6. IX.	»	8·7	169	2·1
» »	»	7. IX.	»	8·7	166	2·1
» »	»	25. VIII.	Wasser aus dem zirka 100 Schritte von der Quelle entfernten Bassin	11·2	86	1·6
» »	»	26. VIII.	Wasser aus dem zirka 100 Schritte von der Quelle entfernten Bassin	11·2	78	1·0
» »	»	6. IX.	Wasser aus dem zirka 100 Schritte von der Quelle entfernten Bassin	11·2	77	1·0
» »	»	6. IX.	Auslaufbrunnen	11·2	60	0·7

Langenau bei Steinhof	»	7. IX.	Trinkquelle (gefaßt)	9·4	136	1·7
Langenau-Trenk bei Steinhof	»	8. IX.	Obere Trinkquelle	7·5	207	2·6
	»	8. IX.	»Kupferwasser« aus den Mösern	17·5	53	0·7
	»	8. IX.	Untere Quelle	9·4	271	3·3

[1] H. v. Gilm untersuchte die Schwefelquelle des Bades Steinhof. Die nötigen Arbeiten an der Quelle wurden 1856 von H. Hlasiwetz ausgeführt.

Die Analyse ergab nachstehende Zahlen:

1000 Gewichtsteile des Wassers lieferten:

Natron	0·0020	Gewichtsteile
Magnesia	0·0147	»
Kalk	0·0558	»
Eisenoxydul	0·0128	»
Chlor	0·0023	»
Schwefelsäure	0·0117	»
Kohlensäure (ganz gebunden)	0·0615	Gewichtsteile
Kohlensäure (frei)	0·1098	»
Kieselsäure	0·0038	»
Schwefelwasserstoff	0·0066	»
Ammoniak	0·0092	»
Organische Substanz	0·0796	»

(Zeitschrift des Ferdinandeums für Tirol und Vorarlberg, III. Folge, 6. Heft, 1857, p. 170.)

Auch Nehring in Braunschweig analysierte das Wasser der oben genannten Quelle.

Örtlichkeit		Datum der Bestimmung	Nähere Angabe des Ortes der Entnahme des Wassers und Bezeichnung der Quelle	Temperatur in Celsiusgraden	Potentialabfall in Volt minus Normalverlust pro Liter und Stunde	Macheeinheiten $i \times 10^3$
Mittelberg	Pitztal	1907 28. VIII.	Wasser, am Gletschertor des Mittelbergferners gesammelt	1·2	60	0·74
St. Leonhardt[1]	»	29. VIII.	Wasser der Pitz	7·5	2·8	0·03
Steinhof[2]	»	26. VIII.	» » »	—	0·0	0·0
Bad Ladis	Oberinntal	31. VIII.	I. Schwefelquelle[3]	8·7	157	1·9
» »	»	1. IX.	» »	8·7	91	1·1
» »	»	31. VIII.	II. Schwefelquelle	10·0	84	1·4
» »	»	30. VIII.	Auslaufbrunnen vor der Kuranstalt	—	45	0·6
Bad Obladis	»	31. VIII.	Schwefelquelle	7·1	192	2·4
» »	»	1. IX.	» [4]	7·1	218	2·7

» »	»	1. IX.	Auslaufbrunnen der Schwefelquelle im Kurhaus	10·0	85	1·5
» »	»	31. VIII.	Obladis-Sauerbrunn [5]	5·6	105	1·3
» »	»	1. IX.	Auslaufbrunnen für süßes Wasser im Kurhaus	7·5	73	0·9
Häring	Unterinntal	4. IX.	Wasser aus dem Ferdinandsstollenbrandfeld des Häringer Braunkohlenreviers	19·0	110	1·4
»	»	4. IX.	Wasser aus dem Erbstollenbrandfeld des Häringer Braunkohlenreviers	35·0	78	0·8

[1, 2] St. Leonhardt ist $3^3/_4$ Stunden und Steinhof 7 Stunden vom Gletschertor entfernt.

[3] I. Schwefelquelle ist »gefaßt« und war seit 7 Monaten nicht geöffnet. Dieselbe wurde von H. Hlasiwetz untersucht (Zeitschrift des Ferdinandeums, III. Folge, 5. Heft, 1856; J. Zehenter, Die Mineralquellen Tirols, in Zeitschrift des Ferdinandeums, III. Folge, 37. Heft [1893], p. 122; Raspe, Heilquellenanalysen, p. 246).

[4, 5] H. Hlasiwetz, Analyse des Sauerbrunnens und der Schwefelquelle zu Obladis (Sitzungsber. der mathem.-naturw. Klasse der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, Bd. 18 [1855], p. 133; auch in Raspe, p. 246).

[6] Fontaktoskop wurde in unmittelbarer Nähe der Quelle aufgestellt.

Örtlichkeit		Datum der Bestimmung	Nähere Angabe des Ortes der Entnahme des Wassers und Bezeichnung der Quelle	Temperatur in Celsiusgraden	Potentialabfall in Volt minus Normalverlust pro Liter und Stunde	Mache-einheiten $i \times 10^3$
Brennerbad [1]	Brennerpaß	1907 3. IX.	Wasser direkt von der Quelle	22·8	105	1·3
Bad Schalders bei Brixen	Schaldertal	11. IX.	Obere Quelle	5·0	142	1·7
» » » »	»	11. IX.	Untere Quelle (eisenhaltig)	5·0	223	2·8
Elvas bei Brixen	Rienztal	28. IX.	Wasser direkt von der Quelle [2].........	11·2	314	4·0
Bad Burgstall [3] bei Brixen	Eisacktal	29. IX.	» » » » »	9·4	266	1·0
Vahrn bei Brixen	»	2. X.	Auslaufbrunnen (bei Villa Mayr).......	8·7	154	2·0
» » »	»	6. X.	Eisenhaltige Quelle	11·2	84	0·9

[1] L. Barth, K. Senhofer und R. Koelle haben 1871 die Analyse des Thermalwassers vorgenommen (Zehenter, l. c., p. 34). 1903 wurde die Quellenanalyse im chemischen Laboratorium der Innsbrucker Universität ausgeführt. Das Resultat der 1906 durch das pharmakologische Institut der genannten Hochschule angestellten physikalischen Untersuchung der Heilquelle ergab, »daß die Thermalquelle in Brennerbad bedeutende radioaktive Energie besitzt, welche sie vergleichsweise dem Grade nach zwischen das Quellensediment von Nauheim und dem Fango von Battaglia einreiht« (Prospekt des Brennerbades).

[2] Die Quelle ist zirka eine halbe Stunde von Elvas entfernt.

[3] Zehenter, l. c., p. 39.

Örtlichkeit		Datum der Bestimmung	Nähere Angabe des Ortes der Entnahme des Wassers und Bezeichnung der Quelle	Temperatur in Celsiusgraden	Potentialabfall in Volt minus Normalverlust pro Liter und Stunde	Macheeinheiten $i \times 10^3$
		1907				
Alt-Prags [1]	Pustertal	30./IX.	Badequelle	8·7	166	2·1
Wildbad Neu-Prags [2]	»	30. IX.	»	8·7	76	1·0
» »	»	30. IX.	Augenquelle	9·0	139	1·8
» »	»	30. IX.	Haarquelle	9·4	148	1·9
Bad Maistatt [3]	»	1. X.	Heilquelle	4·0	128	1·5
Wildbad Innichen [4]	Hoch-Pustertal	1. X.	Eisenquelle	6·9	123	1·6
» »	»	1. X.	Schwefelquelle	8·1	92	1·2
» »	»	1. X.	Schwefel-Eisenquelle	8·1	40	0·5

[1] 1878 Analyse von K. Senhofer und Ph. Sarlay (Zehenter, l. c., p. 25).

[2] Josef Anton v. Vogl und Peter Erharter haben 1800 eine Analyse der Quelle des Mößlbades Erlach in Neu-Prags ausgeführt und geben nachstehende Bestandteile an: 1. etwas Kohlensäure oder fixe Luft, 2. Kalk oder absorbierende Erde in ziemlicher Menge, 3. etwas Gips und darin 4. Vitriol oder Schwefelgeist, 5. einige Spuren von Eisenerde. 6. ein würflichtes Salz, verbunden 7. mit etwas wenigem Alaun (Zehenter, l. c., p. 90).

[3] Vermöge der von Prof. Crantz angestellten chemischen Analyse enthält diese Quelle viel Kohlensäuere und geringe Anteile von kohlensauerer Kalkerde, schwefelsauerer Magnesia und Eisenvitriol (Zehenter, l. c., p. 81).

[4] Genauere Untersuchungen liegen über die Schwefelquelle und über die Stahlquelle vor, welche wahrscheinlich Ende der Fünfzigerjahre des vorigen Jahrhunderts von Gilm ausgeführt wurden (Zehenter, l. c., p. 63). Im Prospekt des Wildbades Innichen finden sich Analysen der genannten Quelle, welche nicht identisch mit den vorhin angeführten sind.

Örtlichkeit		Datum der Bestimmung	Nähere Angabe des Ortes der Entnahme des Wassers und Bezeichnung der Quelle	Temperatur in Celsiusgraden	Potentialabfall in Volt minus Normalverlust pro Liter und Stunde	Macheeinheiten $i \times 10^3$
		1907				
Wildbad Innichen	Hoch-Pustertal	1. X.	Magnesiaquelle	7·5	192	2·5
» »	»	1. X.	Magenquelle	5·9	184	2·4
» »	»	1. X.	Teichwasser [1]	7·5	83	1·0
Levico	Val Sugana	3. X.	Starkquelle (Reservoir beim neuen Kurhaus)	—	65	0·84
Vetriolo	»	4. X.	Levico-Starkquelle [2] (Ursprung)	13·6	92	1·2
»	»	4. X.	Levico-Schwachquelle [3] (Ursprung)	8·7	252	3·2
Roncegno [4]	»	5. X.	Badequelle (Ursprung)	13·7	42	0·54
»	»	5. X.	Trinkquelle (Ursprung)	13·4	117	1·5

[1] Teichwasser durch Zusammenfließen sämtlicher Quellen entstanden.

[2] G. v. d. Borne hat am 23. Mai 1905 die Radioaktivität untersucht und 0·41 gefunden. Emanation trägt gemischten Radium-Thoriumcharakter, Radium überwiegt. — Das Wasser der Starkquelle wird, soweit es Badezwecken dient, in einer 5 *km* langen Rohrleitung zu Tale nach Levico geführt und hier in großen Reservoirs gesammelt.

[3] Die Schwachquelle ergab nach G. v d. Borne 4·2; bezüglich der Emanation gilt das vorhin Erwähnte. (Das Gutachten v. d. Borne's wurde mir von der Kurdirektion Levico zur Verfügung gestellt.)

[2, 3] E. Ludwig und V. Zeynek, Chemische Untersuchung der Mineralquellen von Levico (Wiener klin. Wochenschrift, 1898).

[4] Analyse von M. Gläser und W. Kalman (Berl. Ber., *21* (1888), p. 1637 und 2879.

Örtlichkeit		Datum der Bestimmung	Nähere Angabe des Ortes der Entnahme des Wassers und Bezeichnung der Quelle	Temperatur in Celsiusgraden	Potentialabfall in Volt minus Normalverlust pro Liter und Stunde	Macheeinheiten $i \times 10^3$
		1907				
Bad Froy[1]	Villnößtal	12. IX.	Magenquelle (unterer Auslauf)	6·2	3388	43
» »	»	13. IX.	» » »	6·2	2941	36
» »	»	7. X.	» » »	6·2	3225	41
» »	»	7. X.	Magenquelle (oberer Auslauf)	6·2	4010	51
» »	»	12. IX.	Eisenquelle[2]	8·2	893	11
» »	»	13. IX.	»	6·2	563	7·0
» »	»	7. X.	»	5·6	500	5·1
» »	»	13. IX.	Schwefelquelle	6·2	365	4·5
» »	»	7. X.	»	6·2	402	5·1
» »	»	13. IX.	Theobaldquelle[3]	6·9	410	5·0
» »	»	7. X.	»	6·5	471	6·0

[1] Näheres über Bad Froy in J. S. Stafflers, Das deutsche Tirol und Vorarlberg, II. Bd., p. 1001.

[2] Prof. Senhofer untersuchte 1879 die »Eisenquelle« qualitativ und fand nachstehende Bestandteile: Eisenoxydul, Tonerde, Manganoxydul, Kalk, Magnesia, Natron, Kieselsäure, Salzsäure, Schwefelsäure, Kohlensäure (Zehenter, l. c., p. 55).

[3] Theobaldquelle soll schwefelsaures Natron und schwefelsaure Magnesia in ziemlicher Menge enthalten (Zehenter, l. c., p. 55).

Zur näheren Beurteilung der in vorstehenden Tabellen auf p. 1477, die Quelle zu Häring im Unterinntal betreffenden Angaben stellt mir Herr A. Pfeffer, k. k. Bergrat im Ackerbauministerium, nachstehende Daten über den ärarischen Braunkohlenbergbau Häring-Kirchbichl gütigst zur Verfügung.

Die Grubenwässer, welche sich in den Bauen des Braunkohlenwerkes Häring-Kirchbichl ansammeln, fließen vorwiegend durch den tiefst gelegenen Stolleneinbau, den 2800 *m* langen Erbstollen, zu Tage und ergießen sich bei der Ortschaft Kirchbichl in den Innfluß. Der übrige Teil fließt durch einen kurzen Stolleneinbau (Ferdinandstollen) oberhalb der Ortschaft Häring aus.

Die Menge der Erbstollenwässer variiert je nach der Intensität und Dauer der atmosphärischen Niederschläge und je nach der Jahreszeit; sie schwankt zwischen 0·3 und 3·0 m^3 pro Minute. Nach Zeit und Umständen verschieden ist auch ihre Temperatur; doch sind die Schwankungen nicht so augenfällig und bloß mit dem Thermometer meßbar. Aber stets ist die Wärme höher, als nach der Tiefenlage der Gebirgsschichten, welche die Wässer durchsickern, geschlossen werden könnte.

Die Erwärmung der Grubenwässer ist auf Flözbrände zurückzuleiten, welche in verschiedenen Partien des Grubengebäudes sich im Laufe der Jahre eingenistet haben, die heute noch bestehen und den Ausbau der restlichen Kohlenmittel verhindern.

Diese Flözbrände fanden sich mit dem Fortschreiten des Kohlenausbaues nach der Tiefe zu ein: der erste Brand brach im östlichen Teile des höchst gelegenen Abbaufeldes, genannt das »Franciscirevier« im Jahre 1836 aus, nachdem hier schon durch mehr als 40 Jahre der Betrieb und damit die Kohlenausbeute vor sich gegangen war.

Am 1. Mai 1873 geriet das westlich von Francisci gelegene »Berggrüblrevier« in Brand und mußte geräumt werden, was ohne besondere Verluste erfolgen konnte, da ja die Kohle bis auf wenige Pfeiler ausgebaut war.

Am 28. Dezember 1892 entstand im Barbararevier, dessen oberer Teil an Berggrübl grenzt, ein Brand, dem drei Wochen

später ein katastrophal wirkender im tiefer gelegenen »Erbstollenrevier« folgte.

Die Grubenwässer aus dem Franciscireviere übertrafen an Wärme weitaus die Wässer des Berggrüblfeldes; die Temperatur betrug beim Austritte aus dem Brandfelde, d. i. bei den siphonartigen Ausflußstellen in den Verdämmungen 35 bis 40° C. Der Abfluß erfolgte seinerzeit teils durch den Francisci-stollen zu Tage, teils durch die Grubenbaue, die an das Brandfeld angrenzen.

Diese Wässer sind wegen ihrer Wärme von den breiten Volksschichten bald zu Reinigungsbädern benützt worden. Das Sammelbassin befand sich im 150 *m* langen Stollen knapp vor der Dammauer an der Flözanfahrung und diente zugleich als Badebassin. Als jedoch ganz gute Heilwirkungen auch wahrgenommen wurden und infolgedessen die Frequenz des Bades stieg, das sich nur zu bald als räumlich unzureichend erwies, verlegte ein Unternehmer im Jahre 1877 das Bad aus dem Stollen in eine eigens errichtete Bretterhütte vor dem Stolleneingange. Diese Hütte war in Kabinen geteilt und mit Badewannen ausgestattet.

Doch auch diese Vorsorge genügte bei dem Zudrange von Badebedürftigen bald nicht mehr. Der Unternehmer schritt zehn Jahre später an die Errichtung eines netten, geräumigen Badehotels mit zirka 20 Badewannen. Dieses Hotel ist in der Ortschaft Häring erbaut und erhielt das Brandwasser mittels eines Rohrstranges zugeleitet.

Bei dem erweiterten Badebetriebe reichte das Stollenwasser nicht mehr aus; es mußte auch das übrige Wasser, das bisher aus dem Franciscibrandfelde in die tiefer liegenden Grubenbaue gesickert ist, gesammelt, in Rohre gefaßt und dem Badehotel zugeleitet werden.

Bis zum Ausbruch des Grubenbrandes im Erbstollenrevier ging die Versorgung des Bades mit »Heilwasser« ohne weitere Störungen vor sich. Während der mannigfaltigen Gewältigungen, welche auch auf Arbeiten im Franciscistollen sich erstreckten, litt jedoch die Rohrleitung vielfachen Schaden und versagte schließlich ganz. Das Wasser ist fortan ausgeblieben; es hat neue Wege durch entstandene Verbrüche des Hangend-

gesteines gefunden und fließt nun durch das Erbstollenrevier auf den Erbstollenhorizont herab.

Die Wässer aus dem Berggrüblbrandfelde fließen zum Teil durch den Ferdinandstollen zu Tage, zum Teil durch die Grubenverhaue des Barbara- und Erbstollenreviers zum Erbstollenhorizont.

Die Stollenwässer haben eine durchschnittliche Temperatur von 19 bis 20° C.; sie werden mittels eines Rohrstranges dem Hotel zum Badebetrieb als Ersatz für das Francisciwasser zugeleitet.

Die Wässer des Barbara- und Erbstollenbrandfeldes fließen ausnahmslos auf den Erbstollenhorizont.

Auf diesem tiefsten Horizont des alten Grubenfeldes findet also die Vereinigung der Brandwässer aus den genannten Revieren mit den sonstigen, in die Grubenbaue eindringenden indifferenten Wässern statt. Von hier aus rinnen sie, wie eingangs erwähnt ist, gemeinsam durch den Erbstollen nach Kirchbichl ab.

Diese Mischwässer besitzen beim Eintritt in den Erbstollen immerhin noch eine Wärme von 30, 35, ja noch mehr Grad Celsius.

Schließlich verdient noch bemerkt zu werden, daß diese Mischwässer gleich beim Eintritt in den Erbstollen ein geräumiges Bassin passieren, in welchem Grubenarbeiter Bäder zu nehmen pflegten. Seit der Errichtung der obertägigen bequemen Umkleide- und Badeanstalt für das Werkspersonal am Tiefbauschacht in Häring wird der Badegelegenheit in der Grube keine Beachtung mehr geschenkt.

Bestimmung der Radioaktivität einiger Quellsedimente.

Die Bestimmungen wurden mit Engler's für feste Stoffe abgeänderten »Fontaktoskop« ausgeführt. Als Normalmenge wurden je 125 *g* trockene Substanz verwendet.

		Verlust in Volt pro Stunde
Alt-Prags:	Sediment von der Badequelle........	7
Vetriolo:	Levico-Ockererde (von der Schwachquelle)	41

		Verlust in Volt pro Stunde
Froy:	Sediment von der Schwefelquelle[1] ...	224
»	Sediment von der Eisenquelle[1]	18

Über die geologischen Verhältnisse der näheren Umgebung des Bades Froy erhalte ich von Herrn Chefgeologen Prof. A. Rosiwal die folgende Mitteilung:

Auf Grund der Aufnahmen der k. k. Geologischen Reichsanstalt, über welche die geologische Spezialkarte 1 : 75000 des Kartenblattes Klausen von Bergrat F. Teller vorliegt, ist die Situation des Bades Froy wie folgt zu skizzieren.

Das genannte Bad liegt in dem östlich vom Eisacktale bei Klausen befindlichen Abschnitte des langen, ostwestlich streichenden Zuges von Tonglimmerschiefern, der »Quarzphyllit-Gruppe« G. Stache's,[2] welcher die Südflanke der kristallinischen Zentralkette der Alpen in Tirol bildet, und von der Mündung des Passeyrertales nach Ost quer über das Eisacktal bei Brixen streichend, sich längs des Pustertales bis Lienz verfolgen läßt.

Vom Eisacktal im Westen, vom Grödner- und Villnößtal im Süden, beziehungsweise Norden begrenzt, erhebt sich der Tschanberg zu Gipfelhöhen von 1913 und 2007 *m*, zwischen deren Einsattelung das kleine Quertal beginnt und nach Norden vorläuft, in welchem Bad Froy liegt.

Erst jenseits des Grödnertales im Süden liegt die nächste geologische Formationsgrenze, indem die genannten Tonglimmerschiefer der Zentralkette unter der mächtigen Platte der Bozener Quarzporphyrdecke verschwinden. Noch näher gerückt tritt dieser Porphyrdeckenrand in der östlichen orographischen Fortsetzung des Tschanberges in der Gipfelregion

---

[1] Der Schlamm von der Schwefelquelle ist rot, der von der Eisenquelle braungelb gefärbt. Beide Sedimente lösen sich sehr leicht in Salzsäure unter Chlorentwicklung und unter Zurücklassung des beigemengten Phyllits zu einer dunkelbraunen Flüssigkeit. (Die genannten Quellabsätze verdanke ich der Güte des Herrn F. Ringler, Direktors des Bades Froy, welcher dieselben am 26. November 1907 gesammelt hat.)

[2] Paläozoische Gebiete der Ostalpen. Jahrb. d. k. k. Geolog. Reichsanst., 1874.

der Raschötzer Berge auf, deren Nordgehänge (östlich von dem zirka 2 *km* entfernten Flitzbachtale) in den oberen Teilen aus Porphyr besteht, während am unteren Hange gegen das Villnößtal noch die Tonglimmerschiefer freiliegen, bis sie, wie v. Mojsisovics festgestellt hat, an der ostwestlich streichenden »Villnösser Bruchlinie« verschwinden.[1] Längs dieser markanten tektonischen Störungslinie ragen von Osten her die Triaskalke und -dolomite des Peitlerkofels und der Koflеralpe vom Wurzenpaß bis in die Nähe von St. Magdalena und St. Johann, während von da ab die darunter liegenden Werfener Schiefer und Bellerophonschichten und weiter westlich bis Villnöß der Grödener Sandstein die unteren Hänge des Villnösser Tales bilden. Dasselbe schneidet sich in seinem weiteren Verlaufe zwischen Villnöß und St. Josef wieder in das Grundgebirge des Tonglimmerschiefers ein, in welchem es bis zu seiner Ausmündung ins Eisacktal verbleibt. Im untersten Kilometer des Tales, bei Gufidaun, wurden jene Gneise und Amphibolite angeschnitten, welche der Quarzphyllitgruppe stellenweise eingelagert sind und anläßlich der geologischen Untersuchung des benachbarten Dioritgebietes von Klausen von Teller und v. John[2] näher beschrieben wurden. In der näheren Umgebung des Bades Froy sind lokale Einlagerungen hornblendeführender Schiefergesteine (Amphibolite) nur von der Ostseite des benachbarten Flitzbachtales bei St. Florian und unweit davon im Südhang des Villnößtales oberhalb »Fuchsloch« bekannt.

Es ist nach dieser orographischen und geologischen Lage fast mit Sicherheit anzunehmen, daß die Quellen von Bad Froy ausschließlich aus dem Tonglimmerschiefer stammen, beziehungsweise nur innerhalb dieses Formationsgliedes auf Klüften und Spalten zirkulieren, welche den Nordhang des Tschanberges durchsetzen.

---

[1] Die Dolomitriffe von Südtirol. Hölder, Wien 1879, p. 119, 121. Profile p. 123, in welchen das generelle Südfallen der phyllitischen Schiefer des Tschanberges verzeichnet erscheint.

[2] Geolog.-petrogr. Beiträge zur Kenntnis der dioritischen Gesteine von Klausen. Jahrb. d. k. k. Geolog. Reichsanst., 1882.

Ein ganzes System von Längs- und Querbrüchen, beziehungsweise Verwerfungen wurde in der Klausener Gegend von Teller beobachtet und dürften sich manche derselben auch in den geologisch einheitlichen Schichtenkomplex des Tschanberges, der in der östlichen Streichungsfortsetzung liegt, hinein fortsetzen, wie schon v. Mojsisovics vermutet hat.

Über die petrographischen Komponenten des genannten mächtigen Schieferkomplexes der »Quarzphyllitgruppe« sei erwähnt, daß von Teller a. a. O. darauf hingewiesen wurde, daß man es hier weniger mit Faltenbildungen verschiedenalteriger Gesteine der Gneis- und Phyllitreihe zu tun habe, sondern mit einer vielfach wiederholten, oft bankweisen Wechsellagerung von Schiefern, welche einem raschen Wechsel der Faziesverhältnisse ihren Ursprung verdanken.

»Feldspatreiche, dickbankige Muskovitgneise wechseln wiederholt mit dünnschichtigen, durch talkigen und serizitischen Glimmer ausgezeichneten Schiefergesteinen und echten Tonglimmerschiefern. In die letzteren schalten sich häufig jene dunklen graphitischen Schieferlagen ein, die im Villnöß- und Aferstal eine so große Verbreitung besitzen« (Teller, a. a. O.).

Erwähnt sei hiezu, daß der Befund an eingeschwemmtem Detritus der Nachbargesteine im Ockerschlamme der Schwefelquelle ausnahmslos Fragmente von Tonglimmerschiefer ergab. Sie gehören speziell einem normalen typischen grauen Phyllit an, der häufig deutliche Clivage und jenen halbmetallischen Glanz der Schieferungsflächen zeigt, welcher auf reichliche mikrolithische Interpositionen von Rutit und Graphit zwischen den Glimmermembranen zurückzuführen ist.

Wie aus der vorstehenden Tabelle hervorgeht, zeichnen sich die Quellen des Bades Froy im Villnößtale durch hohe Radioaktivität aus und sollen diese im kommenden Jahre einer eingehenden Untersuchung unterzogen werden, welch letztere ich auch noch auf andere Heilquellen Tirols auszudehnen beabsichtige.

Die Angaben über die Temperatur der untersuchten Quellen wurden teilweise von den Quellenbesitzern mitgeteilt, teilweise wurden sie von mir selbst ermittelt.

Schließlich ist es mir eine sehr angenehme Pflicht, den Besitzern und Direktoren der verschiedenen Bäder- und Kuranstalten den verbindlichsten Dank für das überaus liebenswürdige Entgegenkommen, das sie mir bei Ausführung dieser Arbeit angedeihen ließen, auszusprechen.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Klasse erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abteilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abteilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Kristallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.

Abteilung II a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abteilung II b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abteilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Tiere sowie aus jenem der theoretischen Medizin.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichnisse ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Alfred Hölder, k. u. k. Hof- und Universitätsbuchhändler (Wien, I., Rothenthurmstraße 13), zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Teile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Teile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 14 K — 14 M.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Originalauszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird wie bisher acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 5 K — 5 M.



